内容简介

“黎曼几何引论”课是基础数学专业研究生的基础课。从1854年黎曼首次提出黎曼几何的概念以来，黎曼几何学经历了从局部理论到大范围理论的发展过程。现在，黎曼几何学已经成为广泛应用于数学、物理的各个分支学科的基本理论。本书上册是“黎曼几何引论”课的教材，前四章是黎曼几何的基础；第五与第六章介绍黎曼几何的变分方法，是大范围黎曼几何学的初步；第七章介绍黎曼几何子流形的理论。每章末都附有大量的习题，书末并附有习题解答和提示，便于读者深入学习和自学。

本书可供综合大学、师范院校数学系、物理系学生和研究生用作教材，并且可供数学工作者参考。

作者简介

陈维桓　北京大学数学科学学院教授、博士生导师。1964年毕业于北京大学数学力学系，后师从吴光磊先生读研究生。长期从事微分几何方面的研究工作和教学工作，开设的课程有“微分几何”、“微分流形”、“黎曼几何引论”和“纤维丛的微分几何”等。已出版的著作有：《微分几何讲义》(与陈省身合著)、《黎曼几何选讲》(与伍鸿熙合著)、《微分几何初步》、《微分流形初步》和《极小曲面》等。

李兴校　河南师范大学数学系教授，1994年在四川大学获得博士学位，主要研究方向是子流形微分几何。

北京大学数学教学系列丛书

黎曼几何引论

（上　册）

陈维桓　李兴校　编著

北京大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

黎曼几何引论(上册)/陈维桓,李兴校编著. —北京:北京大学出版社,2002.12

(北京大学数学教学系列丛书)

ISBN 7-301-05368-1

Ⅰ.黎… Ⅱ.①陈… ②李… Ⅲ.黎曼几何-高等学校-教材 Ⅳ.O186.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 036504 号

书　　　名:黎曼几何引论(上册)
著作责任者:陈维桓　李兴校　编著
责 任 编 辑:邱淑清
标 准 书 号:ISBN 7-301-05368-1/O·0522
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　　址:http://cbs.pku.edu.cn　电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn
电　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
排　版　者:北京大学印刷厂
印　刷　者:北京大学印刷厂
经　销　者:新华书店
890×1240　A5 开本　16.75 印张　450 千字
2002 年 12 月第 1 版　2005 年 6 月第 3 次印刷
印　　　数:6001—9000 册
定　　　价:21.00 元

序　　言

自 1995 年以来,在姜伯驹院士的主持下,北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际,创造性地贯彻教育部"加强基础,淡化专业,因材施教,分流培养"的办学方针,全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势,在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新,以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革,取得了显著的成效。2001 年,北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖,在国内外产生很大反响。

在本科教育改革方面,我们按照加强基础、淡化专业的要求,对教学各主要环节进行了调整,使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上,接受学时充分、强度足够的严格训练;在对学生分流培养阶段,我们在课程内容上坚决贯彻"少而精"的原则,大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容,为新的培养方向、实践性教学环节,以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间。这样既使学生打下宽广、坚实的基础,又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向。与上述改革相适应,积极而慎重地进行教学计划的修订,适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时。并增加了数学模型和计算机的相关课程,使学生有更大的选课余地。

在研究生教育中,在注重专题课程的同时,我们制定了 30 多门研究生普选基础课程(其中数学系 18 门),重点拓宽学生的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解。

教材建设是教学成果的一个重要体现。与修订的教学计划相

配合，我们进行了有组织的教材建设。计划自1999年起用8年的时间修订、编写和出版40余种教材，这就是将陆续呈现在大家面前的《北京大学数学教学系列丛书》。这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考，记录了我们教学实践的足迹，体现了我们教学改革的成果，反映了我们对新世纪人才培养的理念，代表了我们新时期的数学教学水平。

经过20世纪的空前发展，数学的基本理论更加深入和完善，而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛，而且活跃于生产力第一线，促进着技术和经济的发展，所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识。同时也促使数学研究的方式发生巨大变化。作为整个科学技术基础的数学，正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透。作为一种文化，数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素，将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识。数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础。数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革，我们现在的改革还是初步的。教学改革无禁区，但要十分稳重和积极；人才培养无止境，既要遵循基本规律，更要不断创新。我们现在推出这套丛书，目的是向大家学习。让我们大家携起手来，为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力。

张　继　平

2002年5月18日

于北京大学燕园

前　　言

自从 B. Riemann 在 1854 年给出"关于几何学的基本假设"的就职演讲以来，黎曼几何已经成为数学中十分重要的基本理论．黎曼几何的基础知识是从事现代数学研究的人必须掌握的内容．"黎曼几何引论"课程是数学系研究生的必修课程之一．

经过我们在北京大学长期的教学实践，和持续不断的教学体系及教学内容的改革，在10年前把"流形论"部分从"黎曼几何引论"课中分离出来，单独成为一门"微分流形"课，并且已经出版了教材《微分流形初步》(陈维桓编著，高等教育出版社，1998年第一版，2001年第二版)．该课程作为黎曼几何的预备课程，既适用于硕士研究生一年级，也可供数学系本科高年级学生选修．我们相信，该课程的开设对于加强大学的几何教学和提高大学生的数学知识水平会起相当大的作用．现在的"黎曼几何引论"以"微分流形"课为先修课程，其教学重点是联络、黎曼度量、测地线、曲率等黎曼几何的基本概念和基础理论，并且比较系统地介绍大范围黎曼几何、特别是变分方法在黎曼几何中的应用．本书在实质上是我在北京大学多年讲授"黎曼几何引论"课的讲稿，其取材受到参考文献[5; 21]的重大影响．其中第八、九、十章的内容我也在北京大学的研究生进修课或讨论班上，以及在南开数学研究所举办的"几何拓扑学术年"(1986)和"微分几何学术年"(1995)的讲座中分别讲过多次．

一本适用的教材首先要取材适当．一方面，它必须反映当代数学发展的水平、满足数学发展的需要．黎曼几何发展到现在，已经成为相当成熟的学科，黎曼流形已经成为许多数学分支演绎的舞台．我们不仅需要在平直空间中研究数学，而且需要在弯曲空间中发展数学．在目前，这个最适当的弯曲空间就是黎曼流形．所以，不仅是专门从事几何研究的学生要学习黎曼几何，而且数学系的从事各个方向研究

和学习的学生都应该学习这门课．因此，课程设计和教学内容必须要兼顾到各方面的需求．在另一方面，教材又不能写成“百科全书”，把黎曼几何各个方面的成果都收集进来．我们只能以黎曼几何中与当前数学发展水平相适应的基础知识和基本理论为重点，务必使学生通过本教材的学习，理解和掌握黎曼几何的基本思想和基本方法．

教材的语言要通畅而平易近人；讲理要透彻并富于启发性和直观性；所用术语和记号要准确、明快和简洁．有的数学著作以言简意赅为其写作风格．但是，我们认为教材更应该写得易于理解，能够吸引读者，使读者感到亲切，而不要板着脸把读者拒之门外．

我感到很高兴的是李兴校教授愿意参加到编写《黎曼几何引论》这项工作中来．他的参加使得本书的写作进程加快了，并且全书的编著质量也得到了提高．特别是全书的习题、解答及提示是由他负责编写的．本书是我们两个人愉快合作的结晶．

普遍认为，编写教材是费力不讨好的任务；尤其是不少年轻一些的同志觉得编写教材无非是抄抄写写，是剪刀加浆糊的产物，是脑力劳动中的低层次工作．实际上，一本好的教材是研究工作的长期积累和教学实践的经验总结，也是重要的创新成果．作者不仅要了解该学科的全貌，能够博采众长，而且要成为教学实践、教学改革的有心人，能够持续不断地投入全部精力和甘于默默无闻的长期不懈的努力，总结自己在教学中的心得体会．如《南开大学数学教学丛书》（科学出版社出版）的序中所说：这些教材不是编出来的，而是在长期教学中“教”出来的，“改”出来的．我十分赞同关于教材建设的这个观点．形成一个先进的教材体系，是创新人才培养工作中的“百年大计”，从上到下都应该重视这件事．基于这些认识，我们自己在几何类课程的教材建设方面已经作出了长期、艰苦、系统的努力．值得欣慰的是，这些努力没有白费；献给读者的一系列几何教科书在培养数学人才和普及微分几何知识方面应该说起到了显著的作用．

本书可以用于高等院校数学系研究生的不同层次的几何课程．标

准的研究生课程“黎曼几何引论”可以在先修课“微分流形”的基础上，以本书第二章至第七章为主要内容，在一学期内讲完（周学时为 3）．“黎曼几何引论”课的另一种设计可以从微分流形的概念讲起，以本书第一章至第四章的内容为主，结合《微分流形初步》，也可以在一学期内完成（周学时为 3，或 4）．后一种课的设计也许会有更广泛的适应性，而第五章至第七章可以作为同学自学的材料．第八、九、十章分别讲述 Kähler 流形、黎曼对称空间和主纤维丛上的联络的基础知识，它们是黎曼几何的有机组成部分，对于学习、了解和应用黎曼几何基本理论是不可或缺的．这些内容可以作为微分几何、拓扑学、几何分析、函数论、数学物理等研究方向的研究生进一步自学的材料；也可以作为“黎曼几何 II”的教材．为方便读者使用，本书按照上面的设想分成上、下两册出版．

在这里，我们需要特别提一下，第九章“黎曼对称空间”的取材和写作参照了南开数学研究所孟道骥教授的讲稿．在 1988 年，我们曾经邀请孟道骥教授到北京大学数学系给研究生系统地讲授“黎曼对称空间”；后来，我在北京大学的几何讨论班上也多次讲过此内容．在我们编写第九章时，孟道骥教授把他当年的讲稿慷慨地借给我们参考；并且在第九章完稿之后，他又认真地审读过一遍．作者在此特向他表示崇高的敬意和衷心的感谢．虽然黎曼对称空间在本质上是李群、李代数的理论，但是它是特殊的黎曼空间，是检验几何理论的重要场所，所以本书的重点是强调它的基本理论和几何性质．读者在熟悉（或承认）李代数的一些基本事实之后，阅读本章似乎没有特别的困难．由于篇幅的限制，也为了不喧宾夺主，关于李代数我们只提及所要用到的一些基本概念和事实，没有给出它们的详细的证明．但是，这样处理的结果反而使得黎曼对称空间的性质和结构能够更加清晰、更加突出地展现在读者面前，达到更好的效果．

在本书的写作过程中，第一作者得到北京大学数学科学学院、北京大学研究生院、北京大学教材建设委员会、北京大学出版社以及国

家自然科学基金 (项目号: 19871001, 10226037) 的支持和资助. 在这期间, 第二作者得到国家自然科学基金 (项目号: 19971060) 和河南省自然科学基金的资助. 作者在此向他们表示衷心的感谢. 在本书交付北京大学出版社正式出版之前, 孟道骥教授和马辉博士受本丛书编辑委员会的委托, 认真、细致地审读过全书初稿, 并且提出过许多宝贵的意见和建议. 作者在此向他 (她) 们表示深切的谢意. 最后, 作者对责任编辑邱淑清老师卓有成效的辛勤工作表示敬意.

限于作者的水平, 本书中的不足之处肯定是存在的, 诚恳地希望读者能不吝指正.

陈维桓

2002 年 1 月于北京大学

上册目录

下册目录预告

第八章 Kähler 流形

复向量空间，复流形和近复流形，复向量丛上的联络， Kähler 流形的几何，全纯截面曲率， Kähler 流形的例子，陈示性类

绪 论

“什么是黎曼几何学？” 每一位初学者在打开本书时都会提出这样的问题. 对这个问题的回答既是简单、容易的，又是复杂、困难的. 让我们从 Gauss 的 “绝妙定理”(Theorema Egregium) 谈起.

为了刻画三维欧氏空间中正则参数曲面的形状，通常要引进曲面的第一基本形式和第二基本形式的概念. 第一基本形式是曲面上的切向量 $\mathrm{d}\vec{r}$ 的长度平方，即

$$I = \mathrm{d}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r},$$

第二基本形式是

$$II = \mathrm{d}^2\vec{r}\cdot\vec{n}$$

(其中 $\vec{n}$ 为曲面的单位法向量)，在本质上它是曲面上任意一点的邻近点到该点切平面的有向距离. 特别是，两个基本形式之比

$$\frac{II}{I} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}\cdot\vec{n}}{\mathrm{d}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}s^2}\cdot\vec{n}$$

是曲面上通过该点、以 $\mathrm{d}\vec{r}$ 为方向的曲线的曲率向量 $\kappa\vec{\beta} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}s^2}$ 在曲面该点处的单位法向量 $\vec{n}$ 上的投影 (这里的 κ 和 $\vec{\beta}$ 分别是曲线的曲率和主法向量)，它是仅依赖曲面在该点的切方向的函数. 如果考虑曲面上由该点的切方向 $\mathrm{d}\vec{r}$ 和单位法向量 $\vec{n}$ 所张成的平面，并且用该平面在曲面上截出一条曲线，则这条曲线以 $\mathrm{d}\vec{r}$ 为切向量，同时它在该点的曲率向量与 $\vec{n}$ 是共线的. 所以该曲线在该点的曲率正好是 $\frac{II}{I}$，我们把它称为曲面在该点沿切方向 $\mathrm{d}\vec{r}$ 的法曲率，记为 κ_n. 在曲面上任意固定一点，则 κ_n 是在该点的切方向的函数，它反映了曲面在该点沿该切方向的弯曲方向和弯曲程度. 一般说来，曲面在每一点有两个彼此垂直的切方向，使得法曲率 κ_n 在这两个方向分别达到它的最大值和

最小值. 这两个切方向称为曲面在该点的主方向, 相应的两个法曲率称为曲面在该点的主曲率, 记为 κ_1,κ_2. 所谓的 Gauss 曲率 K 指的就是这两个主曲率的乘积, 即 $K=\kappa_1\kappa_2$. 自然, 它是借助于曲面的第一基本形式和第二基本形式计算而得的.

Gauss 经过复杂的计算, 获得了一个惊人的发现 (1827 年): Gauss 曲率 K 只依赖于曲面的第一基本形式, 而与曲面的第二基本形式无关. 这就是 Gauss 的绝妙定理.

Gauss 的绝妙定理的意义在哪里? 如果我们把参数曲面的定义域记为 D, 它是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个开子集, 其中的点的坐标记为 (u^1,u^2), 那么曲面的第一基本形式 I 是在区域 D 上坐标 u^1,u^2 的 2 次微分式:

$$I=\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u^1,u^2)du^idu^j,$$

其中 $g_{ij}=g_{ji}$, 并且在每一点 $(u^1,u^2)\in D$, (g_{ij}) 是正定的 2×2 矩阵. 在这样一种结构下, 能够做些什么事呢? 按照曲面论, 我们能够计算区域 D 上任意一条分段光滑曲线的长度, 能够计算区域 D 内一个有界子区域的面积等等; 而且这些量与定义区域 D 内所取的坐标系无关. Gauss 的定理则进一步断言: 利用 (g_{ij}), 我们还可以计算曲面在 D 内每一点处的 Gauss 曲率 (!) 而不管曲面的具体形状如何. 这是一个非常了不起的结果, 它开创了曲面的内蕴微分几何. Gauss 曲率的意义是什么? 它所反映的不只是我们所观察到的曲面的 "外在" 形状, 而且是衡量定义在区域 D 上的第一基本形式 I 与标准的欧氏度量偏离程度的量度. 以 Gauss 曲率 K 为常数 c 的第一基本形式为例 (参看参考文献 [2, 第 184 页]):

当 $c=0$ 时, $I=(du^1)^2+(du^2)^2$;

当 $c>0$ 时, $I=(du^1)^2+\cos^2(\sqrt{c}u^1)(du^2)^2$;

当 $c<0$ 时, $I=(du^1)^2+\cosh^2(\sqrt{-c}u^1)(du^2)^2$.

通过坐标变换, 可以用等温参数把上述三种情况统一起来:

$$I=\frac{(du^1)^2+(du^2)^2}{[1+\frac{c}{4}((u^1)^2+(u^2)^2)]^2}.$$

更一般地, 可以证明: 在 D 上的第一基本形式 I 是欧氏度量, 当且仅当它的 Gauss 曲率 K 恒为零. 由此可见, Gauss 曲率衡量了第一基本形式相对于欧氏度量的偏离程度, 即曲面 (或二维空间) 的 "内在" 弯曲程度. 我们可以研究各种不同的二维 "弯曲" 空间, 而经典的非欧几何恰恰是在常 "弯曲" 空间中的几何学.

B. Riemann 在 1854 年给出的著名就职演说《关于几何学的基本假设》(参看参考文献 [30, Vol.2, 第 135 页]) 中把 Gauss 的曲面内蕴微分几何推广到任意维数的情形. 首先, 他提出了 n 维流形的概念. 尽管在当时, 尚没有具体、确切地表述度量空间和拓扑空间等概念的方式, 但在他的头脑里已把 n 维流形设想为在局部上与 n 维欧氏空间相仿的对象, 其中每一个点都可以用 n 个有序实数的组 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ 来描写. 在欧氏空间中, 为了求曲线的长度, 需要先指定直线段的长度, 然后把曲线的长度定义为它的内接折线长度的上确界. 在这里, "直线段" 是一类特殊的曲线, 需要预先把它从一般的曲线中区分出来. 现在, Riemann 提出一种与之不同的统一的模式, 不需要预先区分直线和曲线, 而是先定义切向量的长度, 然后把曲线的长度定义为切向量的长度沿曲线的积分. 因而, 这种做法适用于任意的 (光滑) 流形, 不必要求该流形有如同欧氏空间的平直结构. Riemann 进一步提出: 切向量 dx 的长度 ds(称为线元) 可以是 dx 的分量的任意的一次齐次函数, 要求该函数的值在 dx 的分量全部反号时不改变; 并且该函数的系数与 x 有关 (后来, Finsler 首次对此作了系统的研究, 现在称这种度量为 Finsler 度量). 特别地, ds 可以是 dx^i 的、处处为正的二次齐次函数的算术平方根, 而其中的系数是变量 x 的连续函数. 后者就是现在的 Riemann 度量. 由此可见, 简单地说, 黎曼几何恰恰是 Gauss 的曲面内蕴微分几何在高维的推广. 曲面的内蕴微分几何是

二维黎曼流形的几何学.

Gauss 对 Riemann 的演讲评价很高, 他在步出演讲厅时以罕有的激动心情对 W. Weber 谈起 "Riemann 所表述的观点的深度" (参看参考文献 [30, Vol.2, 第 134 页]). 事实的确是如此. 为了理解、并在技术细节上完善 Riemann 的思想差不多花了大半个世纪. 首先是 Christoffel, 然后是 Ricci 和 Levi-Civita, 他们创造了一整套张量分析的方法, 引进了所谓的绝对微分学, 给出了 Riemann 所提出的曲率的表达式. 尤其是 Levi-Civita 提出了曲面上的切向量沿曲线平行移动的概念. 这样, 对于黎曼几何在几何直观上的理解便提高到一个崭新的水平, 大大地推动了黎曼几何的发展.

1916 年, A. Einstein 在他所发表的广义相对论中成功地运用了黎曼几何学, 把质量分布表述为黎曼度量, 把引力现象解释为黎曼空间的曲率性质. 于是, 黎曼几何开始受到普遍的重视, 研究 "弯曲" 空间的必要性再次得到肯定. 在其后不久出版的教科书:

L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, New Jersey, 1926

在传播黎曼几何知识方面起到了重大的作用. 与此同时, E. Cartan 出版了他的重要著作:

E. Cartan, *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

流形论是黎曼几何的基础. 对流形 (拓扑流形) 的概念第一次作出准确描述的是 D. Hilbert (《几何基础》, 1902 年). 后来, H. Weyl 在他的名著《黎曼面的概念》(1913 年) 中对于微分流形给出了清晰的数学描述. 在 20 世纪 30 年代, H. Whitney 开始对微分流形的拓扑进行了认真的研究. 在做了这些准备之后, H. Hopf 在 1932 年提出了研究大范围黎曼几何的问题, 即截面曲率 K 的符号与 (紧致) 黎曼流形 (M,g) 的拓扑相互制约的问题 (参看 M. Berger, *Riemannian Manifolds: From Curvature to Topology*, In: Chern — A Great Geometer of the Twentieth Century, 第 184 页, International Press, Hong Kong, 1992). 在 1942 年, 陈省身用 Cartan 的外微分和活动标架方法, 成功地用内蕴的方法证明了偶数维紧致黎曼流形上的 Gauss-Bonnet 定理, 这是大范围黎曼几何发展过程中的里程碑, 开创了大范围黎曼几何的新纪元. 陈省身在他的论文: *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds* (Ann. of Math., 45(1944), 747~752) 中以深邃的思想揭示了联络、曲率形式、切丛和球丛的重要性以及它们之间的相互联系, 编织了黎曼流形的局部不变量 (曲率) 和整体不变量 (Euler 示性数) 之间的辉煌图景. 陈省身的这项研究成果以及随后发表的关于陈示性式的一系列论文, 展示了后来的微分几何发展方向, 影响极为深远, 很快使得微分几何的思想和方法成为拓扑学、代数几何学、大范围分析、数学物理等许多数学分支的有机组成部分, 并使微分几何成为数学研究的一个中心课题.

在这里, 我们不能不提到陈省身在芝加哥大学讲授微分几何的油印讲义《Differentiable Manifolds》(1953 年), 它以清晰的现代语言讲述微分流形、联络、黎曼流形等基本理论. 后来出版的微分流形与黎曼几何教科书都受到这本讲义的深刻影响. 当代许多重要的微分几何学家都是在陈省身的研究工作及上述讲义的养育、鼓舞下成长起来的. 陈省身的著作成为当代微分几何学家的必读经典.

从黎曼几何的发展过程, 以及黎曼几何在各个数学分支中的应用来看, 联络的概念处于中心的位置. 在流形上给定微分结构之后, 微分流形上的切向量、切空间和光滑切向量场都是有意义的, 因为它们所涉及的是微分流形上的光滑函数, 以及光滑函数的导数. 若要在微分流形上进一步运用微分手段, 必须能够对光滑切向量场求微分. 然而, 微分流形的光滑结构本身并未提供对光滑切向量场求导的手段. 对光滑切向量场求导本身是加在光滑流形上的一种新的结构, 这种结构就是所谓的联络. 有幸的是, 在黎曼流形上存在一种自然的特殊联络 (称为黎曼联络或 Levi-Civita 联络), 它是被黎曼结构 (即黎曼度量) 唯一

确定的. 由此可见, 联络是比黎曼度量更为基本的一种结构. 在 20 世纪的五六十年代, 围绕联络的概念进行了紧张的研究, 其主要结晶是建立并完善了向量丛上的联络 (Koszul) 和主丛上的联络 (Ehresmann) 等概念. 陈示性式是通过复向量丛上的联络构造出来的, 然而它是与向量丛上联络的选取无关的不变量 (Chern-Weil 定理), 因此它反映了复向量丛的结构特性, 特别是量度了复向量丛偏离平凡丛 (空间的直积) 的程度.

从 20 世纪五六十年代以来, 大范围黎曼几何本身及其在各个数学分支中的应用已经发展到相当可观的程度. 例如, 度量的曲率性质与流形本身的拓扑的相互制约关系, de Rham-Hodge 理论, Yang-Mills 理论, 黎曼流形的谱, 调和映射, 黎曼流形上的函数论, 黎曼流形中的极小子流形, 热流方法和问题, 非线性理论中的几何问题, Gromov 的黎曼度量的收敛问题, 等等, 都是黎曼几何中的重要课题. 由于黎曼几何已经有如此众多的分支, 所以, 我们说, "什么是黎曼几何学?" 是一个难以确切回答的问题. 在本书最后所列的参考书目, 有些是新近出版的黎曼几何教科书, 有些是黎曼几何专著, 往往侧重于或强调黎曼几何的某些课题. 若想更多地了解上述问题的答案, 读者可以选读这些书.

"在本课程中能够学到些什么?" 本课程是黎曼几何学的入门课程, 其先修课程是 "微分流形". 本课程面向基础数学专业、应用数学专业 (以及理论物理专业和近代力学专业) 的全体硕士研究生和博士研究生, 主要目标是向他们介绍黎曼几何的基本概念和基础理论, 大体上可以分为三个部分. 鉴于联络的重要性, 我们首先在联络的引进、联络的一般概念和黎曼联络的特性、切向量的平行移动等方面倾注了很大的力量, 务使读者对此有一个清晰的了解. 然后在黎曼流形上对测地线、弧长第一变分公式和曲率展开讨论. 前四章是黎曼几何的基础, 它们构成本书 (上册) 的第一部分. 在第二部分, 我们要导出弧长的第二变分公式, 在此基础上, 讨论测地线的最短性 (即短程性), Jacobi 场和共轭点理论, 以及它们在大范围黎曼几何中的应用. 这部分内容的教学目的是帮助读者初步建立起大范围黎曼几何的观念, 并掌握研究大范围黎曼几何的变分方法. 第三部分旨在建立黎曼子流形的框架理论, 并导出子流形体积的第一、第二变分公式.

除了前七章作为标准的 "黎曼几何引论" 课程的基本内容以外, 我们还辟专章介绍 Kähler 流形、黎曼对称空间等特殊黎曼流形, 以及主丛上的联络. 它们构成本书的下册. 这些内容本身是微分几何的重要研究课题, 而且是黎曼几何以及微分几何在各个数学分支中的应用的重要的基础. 当然, 在这里我们强调的还是这些内容的基础理论, 而不是它们的最新发展. 但是, 这些基础理论对于从事有关研究工作的读者来讲是必备的知识.

第一章　微分流形

微分流形是 20 世纪数学有代表性的基本概念，当代数学的许多重要结构和研究对象都以微分流形为载体．本书要介绍的黎曼几何学就是在光滑流形上给定了一个黎曼结构的几何学．在本章我们要回顾有关微分流形的一些基本概念，包括光滑流形，光滑函数，光滑切向量场，外微分式，切丛等等．这方面的详细内容，可参看参考文献 [3]．

§1.1　微分流形

微分流形的概念是从欧氏空间脱胎而来的，而欧氏空间则是微分流形中最简单的例子和模型．所谓的 n 维欧氏空间，简记为 $\mathbb{R}^n$，是有序的 n 元实数组的集合，并赋予标准的距离 d 所构成的空间，其元素称为"点"．$\mathbb{R}^n$ 中任意两点 $a=(a^1,\cdots,a^n)$，$b=(b^1,\cdots,b^n)$ 之间的距离定义为

$$d(a,b)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b^i-a^i)^2}.$$

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开集，r 为正数．如果 U 上的实函数 $f:U\to\mathbb{R}$ 具有直到 r 阶的各阶连续偏导数，则称 f 为 U 上的一个 r 次 **可微函数**．U 上 r 次可微函数的集合记为 $C^r(U)$．依此记法，U 上连续函数的集合记作 $C^0(U)$．给定函数 $f:U\to\mathbb{R}$，如果对于任意的非负整数 r，都有 $f\in C^r(U)$，则称 f 是 U 上的一个 **光滑函数**．U 上光滑函数的集合记作 $C^\infty(U)$．如果函数 $f:U\to\mathbb{R}$ 在 U 中每一点的某个邻域内都能展开为收敛的幂级数，则称 f 为 U 上的 **实解析函数**．U 上的实解析函数的集合记作 $C^\omega(U)$．以后，在记号 $C^r(U)$ 中，总是认为 r 是非负整数、∞ 或 ω．为了方便起见，把 $C^r(U)$ 中的函数称为 (U 上的)C^r 函数．

上述概念可以推广到两个欧氏空间之间的映射. 设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个开子集, $f: U \to \mathbb{R}^k$ 是从 U 到 k 维欧氏空间 $\mathbb{R}^k$ 的映射. 显然, 映射 f 可以用 U 上的 k 个实函数 $f^\alpha(1\le\alpha\le k)$ 表示为:

$$f=(f^1,\cdots,f^k),$$

其中的 $f^\alpha(1\le\alpha\le k)$ 称为映射 f 的分量. 如果对于每一个 $\alpha(1\le\alpha\le k)$, f^α 都是 U 上的 C^r 函数, 则称映射 f 为(从 U 到 $\mathbb{R}^k$ 的) C^r **映射**. 类似地, 可以引入光滑映射和实解析映射等等. 特别地, 如果 U 是 $\mathbb{R}$ 的一个开区间, 则 C^∞ 映射 $f:U\to\mathbb{R}^k$ 又称为 $\mathbb{R}^k$ 中的一条**光滑曲线**.

定义 1.1 设 M 是一个非空的 Hausdorff 空间. 如果对于每一点 $p\in M$, 都存在 p 点的开邻域 $U\subset M$, 以及从 U 到 m 维欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 的某个开集上的同胚 $\varphi: U\to\mathbb{R}^m$, 则称 M 为一个 m 维**拓扑流形**.

上述定义中的 (U,φ) 称为 M 的一个**坐标卡**; 此时, 开集 U 称为点 $p\in U$ 的**坐标邻域**, φ 称为**坐标映射**. 于是, 所谓的拓扑流形实际上就是在局部上同胚于 m 维欧氏空间的 Hausdorff 空间, 即它的每一点都有同胚于 $\mathbb{R}^m$ 中某个开集的坐标邻域.

定义 1.2 设 M 是一个 m 维拓扑流形, (U,φ) 与 (V,ψ) 是 M 的两个坐标卡. 如果 $U\cap V=\emptyset$, 或者, 当 $U\cap V\ne\emptyset$ 时, 映射

$$\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(V) \text{ 和 } \varphi\circ\psi^{-1}:\psi(U\cap V)\to\varphi(U)$$

都是 C^r 映射, 则称坐标卡 (U,φ) 与 (V,ψ) 是 C^r **相关的**.

显然, 拓扑流形 M 的任意两个坐标卡必定是 C^0 相关的.

定义 1.3 设 M 是一个拓扑流形, $\mathscr{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha);\alpha\in I\}$ 是 M 的若干坐标卡构成的集合, I 为指标集. 如果 $\mathscr{A}$ 满足下列三个条件, 则称 $\mathscr{A}$ 为拓扑流形 M 的一个 C^r **微分结构**:

(1) $\{U_\alpha;\alpha\in I\}$ 是 M 的一个开覆盖;

(2) $\forall\alpha,\beta\in I$, $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 与 (U_β,φ_β) 是 C^r 相关的;

(3) $\mathscr{A}$ 是极大的, 换句话说, 对于 M 的任意一个坐标卡 (U,φ), 如果它和 $\mathscr{A}$ 中的每一个成员都是 C^r 相关的, 则它一定属于 $\mathscr{A}$.

C^∞ 微分结构称为**光滑结构**; C^ω 结构称为**实解析结构**.

定义 1.4 设 M 是一个 m 维拓扑流形, $\mathscr{A}$ 是 M 的一个 C^r 微分结构, 则称 $(M,\mathscr{A})$ 是一个 m 维 C^r **微分流形**. 此时, $\mathscr{A}$ 中的坐标卡称为 C^r 微分流形 $(M,\mathscr{A})$ 的**容许坐标卡**.

特别地, C^∞ 微分流形和 C^ω 微分流形分别称为**光滑流形**和**实解析流形**.

在不会引起混淆的情况下, 也用 M 表示一个 C^r 微分流形 $(M,\mathscr{A})$.

注记 1.1 对于 $r\ge1$, 并非每一个拓扑流形都有 C^r 的微分结构.

注记 1.2 任意一个 C^r 微分结构 $\mathscr{A}$ 都可以由 M 的一个 C^r 相关的坐标覆盖 $\mathscr{A}_0$ 唯一确定. 这里所谓的 C^r 相关的坐标覆盖 $\mathscr{A}_0$ 是指流形 M 上满足定义 1.3 中前两个条件的坐标卡集. 事实上, $\mathscr{A}$ 由 $\mathscr{A}_0$ 通过下面的方式确定:

$$\mathscr{A}=\{(U,\varphi);(U,\varphi)\text{是 } M \text{ 的坐标卡, 且 } \forall(V,\psi)\in\mathscr{A}_0,$$
$$(U,\varphi)\text{与 }(V,\psi)\text{ 是 } C^r \text{ 相关的}\}.$$

注记 1.3 设 (U,φ) 是 m 维微分流形 M 的一个容许坐标卡, 则对于 $\forall p\in U$, 把 $x=\varphi(p)$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中的坐标 $(x^1(p),\cdots,x^m(p))$ 称为点 p 的**局部坐标**. 以这样的方式在 U 上确定了一个坐标系, 称为 M 在 p 点的一个(由局部坐标卡 (U,φ) 给出的)**局部坐标系**, 记为 $(U,\varphi;x^i)$ 或 $(U;x^i)$; 其中, 定义在 U 上的 m 个函数 $x^i:U\to\mathbb{R}$ $(i=1,\cdots,m)$ 称为(**局部**)**坐标函数**.

对于 M 的任意两个 C^r-相关的局部坐标系 $(U,\varphi;x^i)$ 和 $(V,\psi;y^i)$, 如果 $U\cap V\ne\emptyset$, 则称映射

$$\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$$

为从 $(U;\varphi;x^i)$ 到 $(V;\psi;y^i)$ 的 (**局部**) **坐标变换**, 它可以表示为

$$y^i=(\psi\circ\varphi^{-1})^i=y^i(x^1,\cdots,x^m),\qquad 1\le i\le m.$$

由此所得到的 m 阶方阵

$$J_{x;y}=\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$$

称为局部坐标变换 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 的 **Jacobi 矩阵**, 相应的行列式称为 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 的 **Jacobi 行列式**, 并且记

$$\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}=\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right).$$

由于局部坐标变换是可逆的, 利用求偏导数的链式法则容易看出, 局部坐标变换的 Jacobi 矩阵都是非退化的, 即相应的 Jacobi 行列式恒不为零 (证明留作练习).

利用局部坐标变换的 Jacobi 行列式, 容易引入可定向流形及有向流形的概念.

定义 1.5 设 M 是一个微分流形. 如果在 M 上存在一族容许的局部坐标系 $\mathscr{U}=\{(U_\alpha;x_\alpha^i);\ \alpha\in I\}$, 满足以下两个条件:

(1) $\bigcup\limits_{\alpha\in I}U_\alpha=M$;

(2) $\forall\alpha,\beta\in I$, 或者 $U_\alpha\cap U_\beta=\emptyset$, 或者当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ 时, 在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上必有

$$\frac{\partial(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^m)}{\partial(x_\beta^1,\cdots,x_\beta^m)}>0,\tag{1.1}$$

则称 M 是**可定向的微分流形**.

一般地, 满足 (1.1) 的两个局部坐标系 $(U_\alpha;x_\alpha^i)$、$(U_\beta;x_\beta^i)$ 称为是**定向相符的**.

定义 1.6 设 M 是可定向的 m 维微分流形, 如果

$$\mathscr{U}=\{(U_\alpha;x_\alpha^i);\alpha\in I\}$$

是使定义 1.5 中条件 (1) 和 (2) 成立的一族局部坐标系, 并且满足条件:

(3) $\mathscr{U}$ 是极大的, 即对于任意的容许局部坐标系 $(U;x^i)$, 只要对于任意的 $\alpha\in I$, $(U;x^i)$ 和 $(U_\alpha;x_\alpha^i)$ 都是定向相符的, 便有 $(U;x^i)\in\mathscr{U}$, 则称 $\mathscr{U}$ 是 M 的一个**定向**.

具有指定定向的微分流形称为**有向的微分流形**. 关于有向微分流形的其他等价定义以及相应的详细讨论可参看参考文献 [3].

现在给出一些常见的微分流形的例子.

例 1.1 设 M 是 $\mathbb{R}^m$ 的任意一个开子集, 令 $U=M$, $\varphi:U\to\mathbb{R}^m$ 为包含映射, 则对于任意的 r (正整数、∞ 或 ω), $\mathscr{A}_0=\{(U,\varphi)\}$ 是 M 的一个 C^r 坐标覆盖. 于是 $\mathscr{A}_0$ 在 M 上确定了一个 C^r 微分结构 $\mathscr{A}$, 使 M 成为 m 维的 C^r 微分流形.

例 1.2 $\mathbb{R}^n$ 到其自身的所有可逆线性变换关于复合运算构成一个群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, 称为 n 阶的**一般线性群**. $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 可等同于全体非奇异的 n 阶实方阵所构成的乘法群. 由于每一个 n 阶实方阵 $A=(a_{ij})$ 都可以看作 $\mathbb{R}^{n^2}$ 中的一个点, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 可表示为

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})=\{A\in\mathbb{R}^{n^2};\ \det A\neq 0\}.$$

由此可见, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的开子集, 因而是一个 n^2 维的 C^r 微分流形.

例 1.3 设 $M=\mathbb{R}$, r 为正整数、∞ 或 ω. 例 1.1 已经给出了 M 上的一个 C^r 微分结构 $\mathscr{A}$. 现令 $V=M$, 映射 $\psi:V\to\mathbb{R}$ 由 $\psi(x)=x^3$ $(\forall x\in V)$ 确定. 易见 ψ 和 ψ^{-1} 均为连续映射, 所以 ψ 是同胚, 即 (V,ψ) 是 M 的一个坐标卡. 由坐标覆盖 $\{(V,\psi)\}$ 在 M 上确定的 C^r 微分结构记为 $\mathscr{A}_1$. 于是 $(M,\mathscr{A}_1)$ 也是一个 C^r 的微分流形.

注意到坐标变换 $\varphi\circ\psi^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处是不可微的, 于是这两个坐标卡 (U,φ) 和 (V,ψ) 不是 C^1 相关的. 所以, $(M,\mathscr{A})$ 与 $(M,\mathscr{A}_1)$ 是两个不同的一维 C^r 微分流形.

例 1.4 设 f 是定义在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的实值 C^r 函数，$r \geq 1$. 如果 f 的梯度

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^{n+1}}\right)$$

在 f 的一个水平集

$$M_c = \{p \in \mathbb{R}^{n+1};\ f(p) = c\}$$

(c 为常数) 上恒不为零，则 M_c 是一个 n 维的 C^r 微分流形，证明如下：

对于任意的 $p = (x_0^1, \cdots, x_0^{n+1}) \in M_c$，不妨设

$$\frac{\partial f}{\partial x^{n+1}}(p) \neq 0.$$

根据隐函数定理，存在点 $(x_0^1, \cdots, x_0^n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的邻域 $\tilde{U}$，以及定义在 $\tilde{U}$ 上的 C^r 函数 $x^{n+1} = h(x^1 \cdots, x^n)$，使得

$$x_0^{n+1} = h(x_0^1, \cdots, x_0^n),$$

并且在 $\tilde{U}$ 上有恒等式

$$f(x^1, \cdots, x^n, h(x^1, \cdots, x^n)) \equiv c.$$

由此可见，从点 p 在 M_c 中的一个邻域 U 到坐标平面 $x^{n+1} = 0$ 上的投影 $j: U \to \tilde{U}$ 是一一对应，其逆映射 j^{-1} 由

$$(x^1, \cdots, x^n) \longmapsto (x^1, \cdots, x^n, h(x^1, \cdots, x^n))$$

确定。易知，j 与 j^{-1} 都是连续的。因此，(U, j) 是 M_c 在 p 点的一个坐标卡。可以验证，对于所有的 $p \in M_c$，由上述方法得到的坐标卡彼此都是 C^r 相关的，并构成了 M_c 的一个 C^r 相关的坐标覆盖，它在 M_c 上确定了一个 C^r 微分结构 $\mathscr{A}$，使 M_c 成为一个 n 维的 C^r 微分流形。

例 1.4 说明，欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的正则超曲面都是微分流形，其中包括许多最常见的例子。例如：设 $r > 0$，并设

$$f = \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2, \quad \forall (x^1, \cdots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

则以原点为心、r 为半径的 n 维球面

$$S^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1};\ f(x) = r^2\}$$

是 f 的一个水平集，并且 $\operatorname{grad} f$ 在 $S^n(r)$ 上处处不为零，因此它是一个 n 维 C^r 微分流形。为了简便起见，以后记 $S^n = S^n(1)$.

例 1.5 开子流形.

设 M 为 m 维光滑流形，其光滑结构记为

$$\mathscr{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha);\ \alpha \in I\};$$

又设 U 是 M 的一个非空开子集，令

$$V_\alpha = U \cap U_\alpha, \quad \psi_\alpha = \varphi_\alpha|_{V_\alpha},$$

则 $\tilde{\mathscr{A}} = \{(V_\alpha, \psi_\alpha);\ \alpha \in I, V_\alpha \neq \emptyset\}$ 给出了 U 的一个光滑结构，使得 $(U, \tilde{\mathscr{A}})$ 成为一个 m 维光滑流形，称为 M 的**开子流形**.

例 1.6 n 维实射影空间 $\mathbb{R}P^n$.

用 $\mathbb{R}P^n$ 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中经过原点 $O = (0, \cdots, 0)$ 的直线的集合。若把 $\mathbb{R}^{n+1}$ 视为 $n+1$ 维的实向量空间，则 $\mathbb{R}P^n$ 就是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的所有一维子空间的集合。下面要在 $\mathbb{R}P^n$ 上引入一个"标准"的微分结构，使之成为 n 维光滑流形.

为此，先在 $\mathbb{R}_*^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ 上定义一种等价关系 $\sim$ 如下：

$$\forall x = (x^1, \cdots, x^{n+1}), \quad y = (y^1, \cdots, y^{n+1}) \in \mathbb{R}_*^{n+1},$$

$x \sim y$ 当且仅当存在非零实数 λ, 使得 $y = \lambda x$, 即 $y^\alpha = \lambda x^\alpha (1 \le \alpha \le n+1)$. 不难知道, $\mathbb{R}P^n$ 可以等同于 $\mathbb{R}_*^{n+1}$ 关于等价关系 $\sim$ 的商空间, 即有

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}_*^{n+1} / \sim .$$

为方便起见, 用 $[x] = [(x^1, \cdots, x^{n+1})]$ 表示 $\mathbb{R}_*^{n+1}$ 中的元素 $x = (x^1, \cdots, x^{n+1})$ 所在的等价类, 于是有

$$\mathbb{R}P^n = \{[x] = [(x^1, \cdots, x^{n+1})];\ x = (x^1, \cdots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}_*^{n+1}\}.$$

把对应 $x \in \mathbb{R}_*^{n+1} \mapsto [x] \in \mathbb{R}P^n$ 记为 π. $\mathbb{R}P^n$ 上的拓扑结构定义如下: $U \subset \mathbb{R}P^n$ 是开集当且仅当 $\pi^{-1}(U)$ 是 $\mathbb{R}_*^{n+1}$ 的开子集. 由此可见, $\pi: \mathbb{R}_*^{n+1} \to \mathbb{R}P^n$ 是连续映射, 并且 $\mathbb{R}P^n$ 是 Hausdorff 空间. 通常把 x 的坐标 $(x^1, \cdots, x^{n+1})$ 称为 $\mathbb{R}P^n$ 中的点 $[x]$ 的 **齐次坐标**. 显然, 一个点的齐次坐标不是唯一的, 并且当 $x^\alpha \ne 0$ 时, 总有

$$[(x^1, \cdots, x^{n+1})] = \left[\left(\frac{x^1}{x^\alpha}, \cdots, \frac{x^{\alpha-1}}{x^\alpha}, 1, \frac{x^{\alpha+1}}{x^\alpha}, \cdots, \frac{x^{n+1}}{x^\alpha}\right)\right].$$

定义 $\mathbb{R}P^n$ 的 $n+1$ 个开子集如下:

$$V_\alpha = \{[(x^1, \cdots, x^{n+1})] \in \mathbb{R}P^n;\ x^\alpha \ne 0\}, \quad \alpha = 1, \cdots, n+1.$$

从直观上讲, V_α 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中全体通过原点但不落在超平面 $x^\alpha = 0$ 之中的直线所构成的集合. 再引入映射

$$\varphi_\alpha : V_\alpha \to \mathbb{R}^n, \quad 1 \le \alpha \le n+1.$$

其定义如下:

$$\begin{aligned}(\xi^1, \cdots, \xi^n) &= \varphi_\alpha([(x^1, \cdots, x^{n+1})]) \\ &= \left(\frac{x^1}{x^\alpha}, \cdots, \frac{x^{\alpha-1}}{x^\alpha}, \frac{x^{\alpha+1}}{x^\alpha}, \cdots, \frac{x^{n+1}}{x^\alpha}\right), \\ &\forall [(x^1, \cdots, x^{n+1})] \in V_\alpha.\end{aligned}$$

容易看出, φ_α 完全确定, 并且是从 V_α 到 $\mathbb{R}^n$ 的同胚. 故 $(V_\alpha, \varphi_\alpha)$ 是 $\mathbb{R}P^n$ 的一个坐标卡, 相应的局部坐标 $(\xi^1, \cdots, \xi^n)$ 通常称为 $\mathbb{R}P^n$ 中的点的 **非齐次坐标**. 当 $V_\alpha \cap V_\beta \ne \emptyset$ 时 (不妨设 $\alpha > \beta$), 局部坐标变换

$$(\eta^1, \cdots, \eta^n) = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(\xi^1, \cdots, \xi^n), \quad \xi^\beta \ne 0$$

由下式确定:

$$\eta^1 = \frac{\xi^1}{\xi^\beta}, \quad \cdots, \quad \eta^{\beta-1} = \frac{\xi^{\beta-1}}{\xi^\beta}, \quad \eta^\beta = \frac{\xi^{\beta+1}}{\xi^\beta}, \quad \cdots,$$
$$\eta^{\alpha-2} = \frac{\xi^{\alpha-1}}{\xi^\beta}, \quad \eta^{\alpha-1} = \frac{1}{\xi^\beta}, \quad \eta^\alpha = \frac{\xi^\alpha}{\xi^\beta}, \quad \cdots, \quad \eta^n = \frac{\xi^n}{\xi^\beta}.$$

它们都是 $(\xi^1, \cdots, \xi^n)$ 的光滑函数, 因而

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta) \to \varphi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)$$

是光滑映射. 所以 $\{(V_\alpha, \varphi_\alpha); 1 \le \alpha \le n+1\}$ 确定了 $\mathbb{R}P^n$ 上的一个光滑结构, 使得 $\mathbb{R}P^n$ 成为 n 维光滑流形, 称为 n 维 **实射影空间**.

§1.2 光滑映射

在本书中只考虑 $r = \infty$ 的情况, 也就是只在光滑流形上进行讨论. 利用流形上的光滑结构, 可以在流形上以自然的方式建立光滑函数的概念, 然后再定义并讨论光滑流形之间的光滑映射.

如果没有另外的说明, 以下假定 $s > 0$ 或 $s = \infty$.

定义 2.1 设 M 是一个 m 维光滑流形, G 为 M 的非空开子集, $f: G \to \mathbb{R}$ 是定义在 G 上的实值函数. 如果对于 M 的任意一个容许坐标卡 (U, φ), 当 $U \cap G \ne \emptyset$ 时,

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(G \cap U) \to \mathbb{R}$$

是 C^s 函数, 则称 f 是 G 上的 C^s 函数; G 上的 C^∞ 函数又称为 **光滑函数**.

开子集 G 上全体 C^s 函数的集合记作 $C^s(G)$. 特别地, M 上全体光滑函数的集合记为 $C^\infty(M)$. 不难看出, $C^s(G)$ 关于函数的加法和乘法构成一个环.

例 2.1 设 $(U,\varphi;x^i)$ 是 m 维光滑流形 M 的一个局部坐标系, 则由例 1.5, U 是一个光滑流形. 根据定义 2.1, 不难验证, 每一个局部坐标函数 $x^i: U \to \mathbb{R}$ 都是光滑函数.

定义 2.2 设 M 为光滑流形, $p \in M$, f 是定义在 p 点的某个邻域 A 上的函数. 如果存在 p 的开邻域 $U \subset A$, 使得 $f|_U$ 是 U 上的 C^s 函数, 则称 f 是定义在 p 点附近的 C^s 函数, 简称为在 p 点的 C^s 函数.

全体在 p 点的 C^s 函数构成的集合记作 C^s_p. 一般地, C^s_p 中两个函数可以有不同的定义域, 但是它们在 p 点的某一个开邻域上都有定义并且是 C^s 的. 因此, 在 C^s_p 中可以定义加法和乘法.

定义 2.3 设 M, N 分别是 m, n 维光滑流形, $f: M \to N$ 为映射, $p \in M$. 如果存在 M 在点 p 的容许坐标卡 (U,φ) 以及 N 在点 $f(p)$ 的容许坐标卡 (V,ψ), 使得 $f(U) \subset V$, 并且复合映射

$$\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \psi(V)$$

是 C^∞ 映射, 则称映射 f 在 p 点是 C^∞ 的 (或光滑的).

通常, 称映射 $\tilde{f}$ 为映射 f 关于坐标卡 (U,φ) 和 (V,ψ) 的局部表示; 具体地写出来, 它由 n 个 m 元实函数组成. 另外, 由坐标卡的 C^∞ 相关性易知, 定义 2.3 与坐标卡 (U,φ) 和 (V,ψ) 的选取无关.

定义 2.4 设 $f: M \to N$ 是光滑流形 M, N 间的映射. 如果 f 在 M 的每一点 p 处都是 C^∞ 的, 则称 f 为 C^∞ **映射**或**光滑映射**.

显然, 光滑函数是光滑映射的特例.

例 2.2 流形上的光滑曲线.

设 M 是一个 m 维光滑流形, I 是 $\mathbb{R}$ 中的一个闭区间, $\gamma: I \to M$ 是映射. 如果存在开区间 (a,b) 以及光滑映射 $\tilde{\gamma}: (a,b) \to M$, 使得 $I \subset (a,b)$, 并且 $\tilde{\gamma}|_I = \gamma$, 则称 γ 是 M 中的一条光滑曲线. 当然, I 也可以是开区间, 或半开半闭区间, 视所讨论的问题而定.

定义 2.5 设 M 和 N 是两个光滑流形, $f: M \to N$ 是一个同胚. 如果 f 及其逆映射 $f^{-1}: N \to M$ 都是光滑的, 则称 f 是从 M 到 N 的**光滑同胚**或**微分同胚**; 此时, 也称 M 和 N 是彼此光滑 (或微分) 同胚的. 如果 $f: M \to N$ 是一个光滑映射, 并且对于每一点 $p \in M$ 都有 p 的一个开邻域 U 使得 $f(U)$ 是 N 中的开子集, 并且 $f|_U: U \to f(U)$ 是从 U 到 $f(U)$ 的光滑同胚, 则称 f 是从 M 到 N 的**局部光滑同胚**.

显然, 如果 f 是从 M 到 N 的光滑同胚, 则 f^{-1} 是从 N 到 M 的光滑同胚.

例 2.3 在例 1.1 和 1.3 中给出的两个光滑流形 $(\mathbb{R},\mathscr{A})$ 和 $(\mathbb{R},\mathscr{A}_1)$ 之间存在光滑同胚, 其中 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{A}_1$ 分别由局部坐标卡覆盖 $\{(U,\varphi)\}$ 和 $\{(V,\psi)\}$ 确定.

事实上, 可以取映射 $f: (\mathbb{R},\mathscr{A}) \to (\mathbb{R},\mathscr{A}_1)$, 其定义如下: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. f 的逆映射 f^{-1} 存在并且 $f^{-1}(x) = x^3$.

由于 $\varphi = \mathrm{id}$, $\psi = f^{-1}$, 所以 f 与 f^{-1} 关于坐标卡 (U,φ) 和 (V,ψ) 的表达式分别是

$$\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}, \qquad \tilde{f}^{-1} = \varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1} = \mathrm{id}.$$

它们都是 $\mathbb{R}$ 到自身的恒等映射, 自然是光滑的. 由定义, f 和 f^{-1} 均为光滑映射, 因而是光滑同胚.

下面, 要定义光滑映射的秩. 为此, 先做一点准备工作.

设 M 和 N 分别是 m 维和 n 维的光滑流形, $f: M \to N$ 为光滑映射. 对于 $p \in M$, 记 $q = f(p) \in N$. 则 p 和 q 两点分别在 M, N 中有局部坐标系 $(U;x^i)$ 和 $(V;y^\alpha)$, 使得 $f(U) \subset V$. 相应地, 映射 f 在 U 上的限制可以表示为

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1, \cdots, x^m), \qquad 1 \le \alpha \le n.$$

令

$$J_{x;y}(f)=\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\right),$$

则 $J_{x;y}(f)$ 是定义在 U 内的一个 $n\times m$ 阶矩阵函数，它与局部坐标系 $(U;x^i)$ 和 $(V;y^\alpha)$ 的选取有关. 通常把 $J_{x;y}(f)$ 称为映射 f 关于局部坐标系 $(U;x^i)$, $(V;y^\alpha)$ 的 **Jacobi 矩阵**.

现假定 $(\tilde{U};\tilde{x}^i)$ 和 $(\tilde{V};\tilde{y}^\alpha)$ 分别是 p, q 在 M, N 中的另外一个相容局部坐标系，它们满足 $f(\tilde{U})\subset\tilde{V}$. 如果映射 f 关于局部坐标系 $(\tilde{U};\tilde{x}^i)$ 和 $(\tilde{V};\tilde{y}^\alpha)$ 的局部表达式为

$$\tilde{y}^\alpha=\tilde{f}^\alpha(\tilde{x}^1,\cdots,\tilde{x}^m),\quad 1\le\alpha\le m,$$

则由链式法则，在 p 点的一个开邻域 $U_0\subset U\cap\tilde{U}$ 内成立如下的变换公式:

$$\begin{aligned}J_{\tilde{x};\tilde{y}}(f)&=\left(\frac{\partial\tilde{f}^\alpha}{\partial\tilde{x}^i}\right)=\left(\frac{\partial\tilde{y}^\alpha}{\partial y^\beta}\right)\left(\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}\right)\left(\frac{\partial x^j}{\partial\tilde{x}^i}\right)\\&=\left(\frac{\partial\tilde{y}^\alpha}{\partial y^\beta}\right)J_{x;y}(f)\left(\frac{\partial x^j}{\partial\tilde{x}^i}\right),\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中

$$\left(\frac{\partial x^j}{\partial\tilde{x}^i}\right)\quad 和\quad\left(\frac{\partial\tilde{y}^\alpha}{\partial y^\beta}\right)$$

分别是 M,N 上局部坐标变换的 Jacobi 矩阵. 由 (2.1) 式立即可知，矩阵函数 $J_{x;y}(f)$ 在 p 点的秩

$$\operatorname{rank}J_{x;y}(f)(p)=\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}(p)\right)$$

与局部坐标 x^i 与 y^α 的选取无关，它是映射 f 的不变量，称为 f 在 p 点的**秩**, 并记为 $\operatorname{rank}_p(f)$.

关于光滑映射的秩，有如下的定理:

定理 2.1(映射秩定理) 设 M, N 分别是 m, n 维光滑流形，$f:M\to N$ 是光滑映射，$p\in M$. 如果 f 在 p 点的一个开邻域上具有常秩 r, 则存在点 p 在 M 中的局部坐标系 $(U,\varphi;x^i)$ 和 $f(p)$ 在 N 中的局部坐标系 $(V,\psi;y^\alpha)$, 使得

$$f(U)\subset V,\quad x^i(p)=0,\quad y^\alpha(f(p))=0,$$

并且

$$(y^1,\cdots,y^n)=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^r,0,\cdots,0).$$

定理 2.1 的证明要用到欧氏空间之间映射的反函数定理 (见本章习题第 8 题), 留给读者作为练习.

在很长一段时间内，人们相信，在光滑同胚的意义下，拓扑流形上至多只有一种光滑结构. 然而在 1956 年， J. Milnor 构造了一个与 7 维球面 S^7 同胚的拓扑空间 Σ^7, 并且在 Σ^7 上造出了一种新的光滑结构 $\mathscr{A}'$, 从而得到一个与通常的微分流形 $(S^7,\mathscr{A})$(参看例 1.4) 不同的光滑流形 $(\Sigma,\mathscr{A}')$. 这就是所谓的 7 维 "怪球". Milnor 同时证明了在 S^7 与 Σ^7 之间不存在任何光滑同胚. 由此可见，一个流形的光滑结构并非是其拓扑结构的衍生物. 另一方面， Kervaire 在 1961 年构造了一个 10 维拓扑流形的例子，它没有任何的微分结构. 直到 1982 年，由于 Freedman 和 Donaldson 等人的工作，人们终于知道，当 $n\ne4$ 时，$\mathbb{R}^n$ 在任意两个光滑结构下都是光滑同胚的，而在 $\mathbb{R}^4$ 上却有许多互不等价的光滑结构.

§1.3 单位分解定理

设 U 是光滑流形 M 的一个开子流形，并且 $U\ne M$. 一般而言，定义在 U 上的光滑函数和定义在 M 上的光滑函数是两个不同的对象；因而 $C^\infty(U)$ 和 $C^\infty(M)$ 是两个不同的集合. 一个局部上有定义的光滑函数是否能够 (或者如何) 扩充为定义在整个流形上的光滑函数在微分流形理论中具有十分重要的实际意义. 处理这种问题，常常要依

赖定义在整个流形上的所谓截断函数. 另一方面, 如果在流形每一点的某个邻域内都能以一种确定的方式定义一个数学对象, 如何将这些局部定义的对象拼接为定义在整个流形上的数学对象, 也是微分流形理论中经常要解决的问题. 在这一方面, 最为基本而有效的工具就是单位分解定理. 本节仅扼要地叙述一下有关的事实, 详细的讨论可参看参考文献 [3].

引理 3.1 设 $B_p(r_1)$ 和 $B_p(r_2)$, $0 < r_1 < r_2$, 是 $\mathbb{R}^m$ 中的两个同心球, 则存在 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, 使得 $0 \le f \le 1$, 并且

$$f|_{B_p(r_1)} \equiv 1, \quad f|_{\mathbb{R}^m \setminus B_p(r_2)} \equiv 0.$$

借助于流形的坐标卡, 并利用引理 3.1 容易得到下面更一般的结论:

引理 3.2 设 U, V 是光滑流形 M 中的两个开子集, 其中 $\overline{U}$ 是紧子集, 并且满足 $\overline{U} \subset V$. 则存在 $f \in C^\infty(M)$, 使得 $0 \le f \le 1$, 并且

$$f|_U \equiv 1, \quad f|_{M \setminus V} \equiv 0.$$

引理 3.2 中的光滑函数 f 常常称为 M 上的**截断函数**. 通过与这样的函数相乘, 任意的 $h \in C^\infty(M)$ 都可以被"光滑地截断", 即有

$$(f \cdot h)|_U \equiv h_U, \quad (f \cdot h)|_{M \setminus V} \equiv 0.$$

换句话说, 通过 f 把 h 在 U 上的限制突现出来了, 而把 h 在 V 之外的部分都变成了零.

定理 3.3 设 U 是光滑流形上的一个开子集, $g \in C^\infty(U)$, 则对于任意的 $p \in U$, 必存在 p 点的一个邻域 $W \subset U$, 以及函数 $\tilde{g} \in C^\infty(M)$, 使得

$$\tilde{g}|_W = g|_W.$$

证明 取 p 点的开邻域 W, V, 使得 $\overline{W}$ 是紧致的, 并且 $\overline{W} \subset V \subset \overline{V} \subset U$. 根据引理 3.2, 存在函数 $f \in C^\infty(M)$, 使得 $f|_W \equiv 1$, $f|_{M \setminus V} \equiv 0$. 对于任意的 $q \in M$, 令

$$\tilde{g}(q) = \begin{cases} g(q)f(q), & \text{如果 } q \in U; \\ 0, & \text{如果 } q \notin U. \end{cases}$$

不难看出, $f \cdot g$ 在 U 上是光滑的, 并且在开集 $U \cap (M \setminus \overline{V})$ 上恒为零. 由此可见, $\tilde{g}$ 在 U 上是光滑的, 且它在 $M \setminus \overline{V}$ 上恒为零, 因而也是光滑的. 注意到

$$M = U \cup (M \setminus \overline{V}).$$

所以, $\tilde{g}$ 在 M 上是光滑的. 另外, 对于任意的 $q \in W$,

$$\tilde{g}(q) = f(q) \cdot g(q) = g(q).$$

故有 $\tilde{g}|_W = g|_W$. 证毕.

定理 3.3 的意思是: 设 g 是定义在光滑流形 M 的开子集 U 上的任意一个光滑函数, 则它在每一点 $p \in U$ 的一个邻域上的限制能够扩充为整体地定义在 M 上的光滑函数. 后面要介绍的光滑切向量场、光滑张量场都有这个类似的性质, 其证明方法也是类似的.

定义 3.1 设 M 是一个拓扑空间, $\Sigma_1 = \{U_\alpha\}$ 和 $\Sigma_2 = \{V_i\}$ 是 M 的两个开覆盖. 如果对于 Σ_2 中的每一个成员 V_i, 都存在 $U_{\alpha_i} \in \Sigma_1$, 使得 $V_i \subset U_{\alpha_i}$, 则称 Σ_2 为覆盖 Σ_1 的一个**加细**.

定义 3.2 设 M 是一个拓扑空间, $\Sigma = \{W_\alpha\}$ 是 M 的一个子集族. 如果对于任意一点 $p \in M$, 都存在 p 点的一个邻域 $U \subset M$, 使得 U 仅与 Σ 中有限多个成员有非空的交集, 则称子集族 Σ 是**局部有限的**.

定理 3.4 设 M 是满足第二可数公理 (即 A_2 公理) 的 m 维光滑流形, 则对于 M 的任意一个开覆盖 Σ, 必有 Σ 的一个局部有限的加细

$$\Sigma_1 = \{U_\alpha;\ \alpha \in \mathbb{N}\},$$

其中 $\mathbb{N}$ 是自然数集, 以及一族函数 $f_\alpha \in C^\infty(M)$, 满足下述条件:

(1) $\forall \alpha \in \mathbb{N}$, $0 \le f_\alpha \le 1$;

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{N}$, 函数 f 的支撑集

$$\operatorname{Supp} f_\alpha = \overline{\{p \in M;\ f_\alpha(p) \neq 0\}} \subset U_\alpha;$$

(3) $\sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}} f_\alpha = 1$.

满足定理中条件的光滑函数族 $\{f_\alpha;\ \alpha \in \mathbb{N}\}$ 称为从属于开覆盖 Σ 的一个 **单位分解**.

证明 根据拓扑学的一个定理 (参看参考文献 [3, 第二章的引理 2.6])、作为 A_2 空间的光滑流形 M、它的任意一个开覆盖 $\Sigma = \{W_\lambda;\ \lambda \in I\}$, 都有一个局部有限的可数加细开覆盖

$$\Sigma_1 = \{U_\alpha;\ \alpha \in \mathbb{N}\},$$

使得对于任意的 $\alpha \in \mathbb{N}$, U_α 是包含在某个 W_λ 之内的紧子集. 同时, 适当地缩小 U_α, 可以得到 M 的新的开覆盖 $\{Z_\alpha\}$ 和 $\{V_\alpha\}$, 满足

$$\overline{V}_\alpha \subset Z_\alpha \subset \overline{Z}_\alpha \subset U_\alpha.$$

由引理 3.2, 对每一个 $\alpha \in \mathbb{N}$, 存在函数 $\tilde{f}_\alpha \in C^\infty(M)$, 使得 $0 \le \tilde{f}_\alpha \le 1$, 并且

$$\tilde{f}_\alpha\Big|_{V_\alpha} \equiv 1,$$

$\tilde{f}_\alpha\Big|_{M\setminus Z_\alpha} \equiv 0$. 由于 $\{U_\alpha;\ \alpha \in \mathbb{N}\}$ 是局部有限的开覆盖,

$$\tilde{f} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}} \tilde{f}_\alpha$$

在每一点 $p \in M$ 的一个邻域上都是有限多个光滑函数的和, 因而 $\tilde{f} \in C^\infty(M)$. 注意到 $\{V_\alpha\}$ 也是 M 的一个开覆盖, 易知 $\tilde{f}$ 处处大于零. 因此, 如果对于任意的 $\alpha \in \mathbb{N}$, 令 $f_\alpha = \tilde{f}_\alpha/\tilde{f}$, 则

$$f_\alpha \in C^\infty(M),$$

并且函数族 $\{f_\alpha;\ \alpha \in \mathbb{N}\}$ 满足定理的要求. 证毕.

§1.4 切向量和切空间

本节将借用方向导数的模型在光滑流形上引入切向量的概念, 并对一些相关的内容进行必要的讨论.

假定 M 是一个 m 维光滑流形, $p \in M$, C_p^∞ 表示在 p 点的光滑函数的集合.

定义 4.1 所谓光滑流形 M 在点 $p \in M$ 的一个 **切向量** v 指的是满足下列两个条件的映射 $v: C_p^\infty \to \mathbb{R}$:

(1) $\forall f, g \in C_p^\infty$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $v(f + \lambda g) = v(f) + \lambda v(g)$;

(2) $\forall f, g \in C_p^\infty$, $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$.

在给出切向量的具体例子并说明定义 4.1 的背景之前, 先证明一个虽然初等、却很有用的引理.

设 $(U;\varphi;x^i)$ 是 p 点的一个局部坐标系. 对于任意的 $f \in C_p^\infty$, 记

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial (f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)).$$

引理 4.1 设 $(U;x^i)$ 是 m 维光滑流形 M 在一点 p 的容许局部坐标系, 记 $x_0^i = x^i(p)$. 则对于任意的 $f \in C_p^\infty$, 存在 m 个光滑函数 $g_i \in C_p^\infty$, 满足

$$g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p), \quad 1 \le i \le m,$$

并且对于点 p 附近的任意一点 q, 有

$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^m (x^i(q) - x_0^i) g_i(q).$$

证明 假设 $(U;x^i)$ 由容许坐标卡 (U,φ) 确定. 由定义 2.2 可知,

$$\tilde{f} = f\circ\varphi^{-1} \in C_{\varphi(p)}^\infty.$$

由微积分基本定理, 在点 $x_0 = \varphi(p)$ 的某个球状邻域 $\tilde{W}$ 上, 有

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{f}(x_0 + t(x - x_0))\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{i=1}^{m}(x^i - x_0^i)\int_0^1 \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^i}(x_0 + t(x - x_0))\mathrm{d}t.$$

对于点 $x \in \bar{W}$，定义

$$\bar{g}_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^i}(x_0 + t(x - x_0))\mathrm{d}t, \quad g_i = \bar{g}_i \circ \varphi,$$

则有

$$g_i(p) = \bar{g}_i(x_0) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^i}(x_0) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p),$$

并且在 p 点的邻域 $W = \phi^{-1}(\bar{W})$ 内有

$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^{m}(x^i(q) - x_0^i)g_i(q).$$

引理得证.

现在来介绍欧氏空间的切向量.

例 4.1　设 $M = \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$. 对于向量 $v \in \mathbb{R}^m$，我们定义映射 $\mathrm{D}_v : C_{x_0}^\infty \to \mathbb{R}$ 如下：对于任意的函数 $f \in C_{x_0}^\infty$，令

$$\mathrm{D}_v f = \left.\frac{\mathrm{d}f(x_0 + tv)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}, \tag{4.1}$$

则 $\mathrm{D}_v f$ 是函数 f 在点 x_0 沿向量 v 的方向导数. 容易验证，方向导数算子 D_v 满足定义 4.1 中的条件，所以它是 $\mathbb{R}^m$ 在 x_0 点的一个切向量. 假定 $v = (v^1, \cdots, v^m)$，那么由 (4.1) 式可知

$$\mathrm{D}_v f = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \cdot v^i.$$

因此，算子 D_v 是由向量 v 决定的.

反之，可以证明：如果映射 $\sigma : C_{x_0}^\infty \to \mathbb{R}$ 满足定义 4.1 的条件，则必有唯一的一个向量 $v \in \mathbb{R}^m$，使得相应的方向导数算子 $\mathrm{D}_v = \sigma$. 事实上，根据引理 4.1，对于任意的 $f \in C_{x_0}^\infty$，存在 m 个 $g_i \in C_{x_0}^\infty$，使得

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{m}(x^i - x_0^i)g_i(x), \tag{4.2}$$

其中 $g_i(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$. 由条件 (2)，

$$\sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1) = 1 \cdot \sigma(1) + 1 \cdot \sigma(1) = 2\sigma(1).$$

所以 $\sigma(1) = 0$. 对于任意的常值函数 λ 再次使用条件 (1)，有

$$\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda \cdot 1) = \lambda \cdot \sigma(1) = 0.$$

通过 (4.2) 式，把 σ 作用于函数 f 得到

$$\sigma(f) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \cdot \sigma(x^i).$$

由此可见，若令 $v = (\sigma(x^1), \cdots, \sigma(x^n))$，便有

$$\sigma(f) = \mathrm{D}_v(f), \quad \forall f \in C_{x_0}^\infty.$$

另外，容易验证满足上述条件的向量 v 是由算子 σ 唯一确定的. 所以，向量 v 与方向导数算子 D_v 是一一对应的；这就是说，可以把 v 和 D_v 等同起来.

例 4.2　设 M 是一个 m 维光滑流形，$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ 是 M 上的一条光滑曲线，记 $p = \gamma(0)$. 利用 γ 可以定义一个映射 $v : C_p^\infty \to \mathbb{R}$ 如下：对于任意的 $f \in C_p^\infty$，令

$$v(f) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f \circ \gamma(t) = \left.\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}.$$

容易验证，映射 $v : C_p^\infty \to \mathbb{R}$ 满足定义 4.1 的条件. 因此，v 是光滑流形 M 在 p 点的一个切向量，称为**曲线 γ 在 $t = 0$ 点处的切向量**，记为 $\gamma'(0)$. 这样，上式成为

$$\gamma'(0)(f) = \left.\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}. \tag{4.3}$$

下面建立光滑流形在一点的切空间的概念，并作一些相关的讨论.

首先，把光滑流形 M 在点 p 处的切向量构成的集合记为 T_pM. 在 T_pM 中，引入加法和数乘运算如下：对于任意的 $u,v\in T_pM$; $\lambda\in\mathbb{R}$, 以及 $f\in C_p^\infty$, 定义

$$(u+v)(f)=u(f)+v(f),\quad (\lambda u)(f)=\lambda\cdot u(f).$$

显然，这样定义的 $u+v$ 和 λu 仍然是 M 在 p 点的切向量，即 T_pM 关于这样的加法和数乘运算是封闭的. 进一步可以验证，T_pM 关于上述的加法和数乘运算构成一个实向量空间.

定义 4.2 向量空间 T_pM 称为光滑流形 M 在点 p 的 **切空间**.

为了求得切空间 T_pM 的维数，首先利用局部坐标系导出它的一个基底.

设 $(U,\varphi;x^i)$ 是 M 在 p 点的一个局部坐标系，

$$x^i(p)=x_0^i,\quad 1\le i\le m.$$

对于每一个 i, 设 $\gamma_i:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是通过点 p 的第 i 条坐标曲线 (称为 x^i-曲线), 即对于任意的 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$,

$$\gamma_i(t)=\varphi^{-1}(x_0^1,\cdots,x_0^i+t,\cdots,x_0^m).$$

由例 4.2 知，$\gamma_i'(0)$ 是 M 在 p 点的一个切向量，以后记为 $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$. 由定义，对于任意的 $f\in C_p^\infty$,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p(f)&=\left.\frac{\mathrm{d}f(\gamma_i(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}f\circ\varphi^{-1}(x_0^1,\cdots,x_0^i+t,\cdots,x_0^m)\\&=\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p))=\frac{\partial f}{\partial x^i}(p).\end{aligned}\tag{4.4}$$

定理 4.2 设 M 是一个 m 维光滑流形，$p\in M$, $(U;x^i)$ 是包含 p 点的任意一个容许局部坐标系. 则 M 在 p 点的 m 个切向量

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p,\quad 1\le i\le m,$$

构成了切空间 T_pM 的一个基底；特别地，$\dim T_pM=m$.

通常把基底

$$\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p,\ 1\le i\le m\right\}$$

称为在 p 点处由局部坐标系 $(U;x^i)$ 给出的 **自然基底**.

证明 首先说明，任意一个切向量 $v\in T_pM$ 都可以表示为

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p,\quad 1\le i\le m$$

的线性组合. 根据例 4.1, 对于任意的常值函数 λ 有 $v(\lambda)=0$. 在另一方面，由引理 4.1, 对于任意的 $f\in C_p^\infty$, 存在 $g_i\in C_p^\infty$, 使得

$$f=f(p)+\sum_{i=1}^m(x^i-x_0^i)g_i,\quad 并且\ g_i(p)=\frac{\partial f}{\partial x^i}(p),$$

其中 $x_0^i=x^i(p)(1\le i\le m)$. 于是由定义 4.1,

$$\begin{aligned}v(f)&=v\left(f(p)+\sum_{i=1}^m(x^i-x_0^i)g_i\right)=v(f(p))+\sum_{i=1}^m v((x^i-x_0^i)g_i)\\&=\sum_{i=1}^m(g_i(p)\cdot v(x^i-x_0^i)+(x^i(p)-x_0^i)\cdot v(g_i))\\&=\sum_{i=1}^m\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\cdot v(x^i)=\sum_{i=1}^m v(x^i)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p(f),\end{aligned}$$

因而

$$v=\sum_{i=1}^m v(x^i)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p.\tag{4.5}$$

其次，对于任意的 $a^1,\cdots,a^m\in\mathbb{R}$，如果

$$\sum_i a^i\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p=0,$$

则对于每一个指标 j，$1\le j\le m$，有

$$0=\left(\sum_{i=1}^m a^i\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)(x^j)=\sum_{i=1}^m a^i\frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p)=a^j.$$

因此，$\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p;\ 1\le i\le m\right\}$ 是线性无关的．这就证明了 $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right\}$ 是 T_pM 的基底．证毕．

上面的 (4.5) 式有重要的意义，它说明：任何一个切向量 v 在自然基底

$$\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p;\ 1\le j\le m\right\}$$

下的分量 v^i 恰好是该切向量在第 i 个局部坐标函数 x^i 上作用所得的值 $v(x^i)$．

定义 4.3 切空间 T_pM 的对偶空间称为光滑流形 M 在 p 点的**余切空间**，记为 T_p^*M；其中的元素，即线性函数 $\alpha:T_pM\to\mathbb{R}$，称为 M 在 p 点的**余切向量**．

为了强调切空间与余切空间的对偶性，常常把一个余切向量 $\alpha\in T_p^*M$ 在切向量 $v\in T_pM$ 上的作用记为 $\alpha(v)=\langle v,\alpha\rangle$．由 $(v,\alpha)\mapsto\langle v,\alpha\rangle$ 确定的映射

$$\langle\cdot,\cdot\rangle:T_pM\times T_p^*M\to\mathbb{R}$$

称为 T_pM 与 T_p^*M 之间的**配合**．

例 4.3 设 $f\in C_p^\infty$．定义映射 $\mathrm{d}f:T_pM\to\mathbb{R}$ 如下：对于任意的 $v\in T_pM$，

$$\langle v,\mathrm{d}f\rangle=\mathrm{d}f(v)=v(f)\in\mathbb{R}.$$

显然，$\mathrm{d}f$ 是 T_pM 上的线性函数，即 $\mathrm{d}f\in T_p^*M$．有时，为了强调 $\mathrm{d}f$ 是在 p 点的一个余切向量，也把 $\mathrm{d}f$ 记为 $\mathrm{d}f|_p$ 或 $\mathrm{d}f(p)$．

设 $(U;x^i)$ 是光滑流形 M 的一个容许局部坐标系，$p\in U$．由于每个坐标函数都是 U 上的光滑函数，因而 $\mathrm{d}x^i|_p\in T_p^*M$，并且

$$\left\langle\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p,\mathrm{d}x^i|_p\right\rangle=\left.\frac{\partial x^i}{\partial x^j}\right|_p=\delta_j^i.$$

由此可见，$\{\mathrm{d}x^i|_p;\ 1\le i\le m\}$ 是 T_p^*M 中与自然基底

$$\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p;\ 1\le i\le m\right\}$$

对偶的基底．一般地，对于任意的 $\alpha\in T_p^*M$，有

$$\alpha=\sum_{i=1}^m\alpha_i\mathrm{d}x^i|_p=\sum_{i=1}^m\left\langle\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p,\alpha\right\rangle\mathrm{d}x^i|_p.$$

特别地，对于任意的 $f\in C_p^\infty$，

$$\mathrm{d}f|_p=\sum_{i=1}^m\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\mathrm{d}x^i|_p.$$

因此，余切向量 $\mathrm{d}f|_p=\mathrm{d}f(p)$ 也称为函数 f 在 p 点的**微分**．

下面要定义光滑映射的两种重要的诱导映射 — 切映射和余切映射．

设 M，N 分别是 m，n 维光滑流形，$F:M\to N$ 是光滑映射，$p\in M$．对于任意的 $v\in T_pM$，我们可以通过映射 F 得到切向量 $F_*(v)\in T_{F(p)}N$，其定义为

$$F_*(v)(f)=v(f\circ F),\quad\forall f\in C_{F(p)}^\infty.$$

这样，就得到一个映射 $F_*:T_pM\to T_{F(p)}N$．易知，F_* 是线性映射．

定义 4.4　线性映射 $F_*: T_pM \to T_{F(p)}N$ 称为光滑映射 F 在 p 点的 **切映射** 或 **微分**; 它的对偶映射 $F^*: T^*_{F(p)}N \to T^*_pM$ 称为光滑映射 F 在 p 点的 **余切映射** 或 **拉回映射**.

由对偶映射的定义, 余切映射 $F^*: T^*_{F(p)}N \to T^*_pM$ 也是线性映射, 并且对于任意的 $\omega \in T^*_{F(p)}N$, $F^*\omega$ 由下式确定:

$$(F^*\omega)(v) = \omega(F_*(v)), \quad \forall v \in T_pM.$$

为了强调对于点 p 的依赖性, 常常用 F_{*p} 和 F^*_p 来表示映射 F 在 p 点的切映射和余切映射.

利用光滑映射的切映射, 可以引入浸入、淹没和嵌入等概念.

定义 4.5　设 $F: M \to N$ 是光滑流形间的光滑映射, $p \in M$.

(1) 如果切映射 $F_{*p}: T_pM \to T_{F(p)}N$ 是单射, 则称映射 F 在 p 点是浸入. 如果 F 在 M 的每一点都是浸入, 则称映射 F 为 **浸入映射**, 简称为 **浸入**; 此时, 称映射 $F: M \to N$ 为 N 的 **(浸入) 子流形**, 并记为 (F, M). 如果浸入本身是单射, 则称它为 **单浸入**.

(2) 如果切映射 $F_{*p}: T_pM \to T_{F(p)}N$ 是满射, 则称映射 F 在 p 点是淹没; 如果 F 为满射并且在 M 的每一点都是淹没, 则称映射 F 为 **淹没映射**, 简称为 **淹没**.

(3) 设 $F: M \to N$ 是单浸入, 于是 F 是从 M 到它的像集 $F(M) \subset N$ 的一一对应. 如果对于 N 在 $F(M)$ 上诱导的拓扑, $F: M \to F(M)$ 是同胚, 则称映射 F 是 **嵌入映射**, 简称为 **嵌入**; 此时, 称 (F, M) 为 N 的 **嵌入子流形** 或 **正则子流形**.

假定 $(U; x^i)$ 和 $(V; y^\alpha)$ 分别是点 p 和 $F(p)$ 附近的局部坐标系, 并且 $F(U) \subset V$, 则根据切映射的定义容易看出, 切映射 F_{*p} 关于自然基底

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\} \text{ 和 } \left\{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right\}$$

的矩阵恰好是 F 在 p 点的 Jacobi 矩阵 $J_{x;y}(F)(p)$. 于是由定义 4.5, 有

定理 4.3　设 $F: M \to N$ 是光滑映射, $p \in M$. 则

(1) F 在 p 点为浸入当且仅当 F 在 p 点的秩

$$\operatorname{rank}_p(F) = \dim M;$$

(2) F 在 p 点为淹没当且仅当 F 在 p 点的秩

$$\operatorname{rank}_p(F) = \dim N.$$

下面的定理说明了浸入与嵌入之间的关系:

定理 4.4　如果光滑映射 $F: M \to N$ 在一点 $p \in M$ 是浸入, 则存在 p 点的开邻域 U, 使得 F 在 U 上的限制 $F|_U: U \to N$ 为嵌入.

此定理的证明要用到 §1.2 的映射秩定理, 留给读者作为练习.

§1.5　光滑切向量场

设 M 是一个 m 维光滑流形. 如 §1.4 所述, M 在每一点 p 处都有切空间 T_pM. 记

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM.$$

通俗地讲, M 上的一个切向量场 X 是指在 M 的每一个点 p 处指定了 M 在该点的一个切向量 $X(p)$. 换句话说, M 上的切向量场是一个映射 $X: M \to TM$, 使得对于任意一点 $p \in M$, $X(p) \in T_pM$.

比如, 在 M 的任意一个容许局部坐标系 $(U; x^i)$ 下, $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 是 U 上的切向量场. 特别是, 这样一组切向量场在 U 中每一点 p 处的值, 构成该点的切空间 T_pM 的一个基底; 通常称这样一组切向量场为 U 上的一个 **标架场**. 为了叙述的方便, 以后把 $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right\}$ 称为 M 在局部坐标系 $(U; x^i)$ 下的 **自然标架场**.

定义 5.1 设 $X: M \to TM$ 是 m 维光滑流形 M 上的切向量场. 如果对于每一点 $p \in M$, 存在 p 点的容许局部坐标系 $(U; x^i)$, 使得 X 限制在 U 上的局部坐标表达式

$$X|_U = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

中的分量 X^i 都是 U 上的光滑函数 $(1 \le i \le m)$, 则称 X 是 M 上的**光滑切向量场**.

由定义和局部坐标系的 C^∞ 相关性立即可得, M 上的一个切向量场 X 为光滑切向量场 $\Longleftrightarrow X$ 关于每一个自然标架场的分量是光滑函数 $\Longleftrightarrow X$ 在每一个容许坐标系 $(U; x^i)$ 上的限制 $X|_U$ 是 U 上的光滑切向量场.

例 5.1 设 $(U; x^i)$ 是 m 维光滑流形 M 的容许局部坐标系, 则相应的坐标切向量场 $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ 是定义在 U 上的光滑切向量场.

M 上光滑切向量场的集合记为 $\mathfrak{X}(M)$. 显然, $\mathfrak{X}(M)$ 关于加法和数乘是封闭的, 因而它是一个向量空间. 还可以进一步定义光滑函数与光滑切向量场的乘法如下: 对于任意的 $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, M 上的切向量场 fX 定义为

$$(fX)(p) = f(p) \cdot X(p), \quad \forall p \in M.$$

在任意的容许局部坐标 $(U; x^i)$ 下, 如果

$$X|_U = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

则有

$$(fX)|_U = \sum_{i=1}^m (f|_U \cdot X^i) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

由此得知, $fX \in \mathfrak{X}(M)$. 所以, $\mathfrak{X}(M)$ 实际上是一个 $C^\infty(M)$-模, 即 $C^\infty(M)$ 上的向量空间.

定理 5.1 设 X 是 m 维光滑流形 M 上的一个光滑切向量场, 则 X 可以视为映射

$$X: C^\infty(M) \to C^\infty(M),$$

其定义如下: 对于任意的 $f \in C^\infty(M)$,

$$(X(f))(p) = (X(p))(f), \ \forall p \in M; \tag{5.1}$$

并且映射 $X: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 满足下面的两个条件: 对于任意的 $f, g \in C^\infty(M)$ 以及 $\lambda \in \mathbb{R}$,

(1) $X(f + \lambda g) = X(f) + \lambda X(g)$,

(2) $X(fg) = gX(f) + fX(g)$.

反之, 任意一个满足上述两个条件的映射

$$X: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

都是由 M 上的一个光滑切向量场通过 (5.1) 式确定的.

证明 设 $X \in \mathfrak{X}(M)$. 首先证明: 对于任意的 $f \in C^\infty(M)$, 由 (5.1) 式确定的函数 $X(f): M \to \mathbb{R}$ 是光滑的. $\forall p \in M$, 设 $(U; x^i)$ 是 p 点的一个容许局部坐标系, 则 X 有局部表达式

$$X|_U = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

其中 $X^i \in C^\infty(U)$. 根据 (5.1) 式, 对于 $q \in U$ 有

$$(X(f))(q) = (X(q))(f) = \sum_{i=1}^m X^i(q) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q (f) = \sum_{i=1}^m X^i(q) \frac{\partial f}{\partial x^i}(q)$$
$$= \left(\sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right)(q),$$

即

$$(X(f))|_U = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

由此可见，$X(f)\in C_p^\infty$. 再由 p 的任意性，$X(f)\in C^\infty(M)$. 另外，由于 X 是切向量场，它处处满足定义 4.1 中的两个条件. 于是根据 (5.1) 式，映射

$$X: C^\infty(M)\to C^\infty(M)$$

满足本定理中的条件 (1) 和 (2).

反之，如果映射 $X: C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ 满足定理中的两个条件，我们要通过 X 构造出 M 上的一个切向量场，即在 M 的每一个点 p 处定义一个切向量 $\tilde{X}(p)\in T_pM$，然后再证明这个切向量场是光滑的. 作为准备，首先说明满足上述两个条件的映射 X 具有局部性，即对于任意的 $f,g\in C^\infty(M)$，如果存在 M 的开子集 U，使得 $f|_U=g|_U$，则必有

$$X(f)|_U = X(g)|_U.$$

事实上，由条件 (1) 和 (2) 可知，X 在常值函数上的作用必为零，其推理过程与例 4.1 中的有关推理是相同的. 根据引理 3.2，对于任意的 $p\in U$，存在 p 点的开邻域 V 以及光滑函数 $h\in C^\infty(M)$，使得 $\overline{V}$ 是包含在 U 内的紧子集，并且

$$h|_V\equiv 1,\quad h|_{M\setminus U}\equiv 0.$$

显然，光滑函数 $(f-g)\cdot h=0$. 于是，

$$0 = X((f-g)\cdot h) = (f-g)\cdot X(h) + h\cdot(X(f)-X(g)).$$

将两端在 p 点取值，并注意到 $f(p)=g(p)$, $h(p)=1$，便得 $(X(f))(p) = (X(g))(p)$. 再由 $p\in U$ 的任意性，$X(f)|_U=X(g)|_U$.

现在利用映射 X 的局部性来构造我们所需要的向量场. $\forall p\in M$，定义映射 $X_p: C_p^\infty\to\mathbb{R}$ 如下：$\forall f\in C_p^\infty$，它在 p 的一个开邻域 V 上是光滑的. 根据定理 3.3，存在 p 点的开邻域 $U\subset V$，以及函数 $\tilde{f}\in C^\infty(M)$，满足 $\tilde{f}|_U = f|_U$. 令

$$X_p(f) = (X(\tilde{f}))(p). \tag{5.2}$$

上述定义是合理的. 如果有另一个 $\tilde{g}\in C^\infty(M)$，以及 p 点的开邻域 W，使得 $\tilde{g}|_W=f|_W$. 不失一般性，可以假定 $W=U$，不然的话可以用 $W\cap U$ 来代替. 于是

$$\tilde{f}|_U=\tilde{g}|_U.$$

由刚刚证明的局部性，$X(\tilde{g})|_U = X(\tilde{f})|_U$；特别地，

$$(X(\tilde{g}))(p) = (X(\tilde{f}))(p).$$

上式说明了用 (5.2) 式定义的 $X_p(f)$ 与 $\tilde{f}$ 的选取无关，因而映射 $X_p: C_p^\infty\to\mathbb{R}$ 是完全确定的. 此外，由于 X 满足本定理中的条件 (1) 和 (2)，易知 X_p 满足定义 4.1 的条件. 所以 $X_p\in T_pM$. 这样，就得到了定义在 M 上的切向量场 $\tilde{X}$，使得

$$\tilde{X}(p) = X_p,\quad \forall p\in M.$$

如此构造的切向量场 $\tilde{X}$ 一定是光滑的. 事实上，设 $(U;x^i)$ 是 M 的一个容许局部坐标系，令

$$\tilde{X}|_U = \sum_{i=1}^m \tilde{X}^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

对于任意的 $p\in U$，由定理 3.3，存在 p 点的开邻域 $V\subset U$ 以及 m 个光滑函数 $\tilde{x}^i\in C^\infty(M)$，满足

$$\tilde{x}^i|_V = x^i|_V,\quad i=1,\cdots,m.$$

根据 $\tilde{X}$ 的定义，特别是 (5.2) 式，

$$\tilde{X}^i|_V = \tilde{X}|_V(x^i) = \tilde{X}|_V(\tilde{x}^i) = (X(\tilde{x}^i))|_V,\quad 1\le i\le m.$$

由于 $X(\tilde{x}^i)\in C^\infty(M)$，$\tilde{X}^i|_V\in C^\infty(V)$. 所以 $\tilde{X}^i$ 在 p 点附近是光滑的. 再由 p 的任意性得知 $\tilde{X}^i\in C^\infty(U)$，这就证明了 $\tilde{X}$ 的光滑性.

最后，(5.2) 式和 $\tilde{X}$ 的构造告诉我们，由 $\tilde{X}$ 借助于 (5.1) 式所确定的映射 $\tilde{X}: C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ 正是 X. 定理证毕.

设 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$. 将 X,Y 视为定理 5.1 中所描述的从 $C^\infty(M)$ 到它自身的映射. 直接可以验证, 由

$$[X,Y]=X\circ Y-Y\circ X \tag{5.3}$$

定义的映射 $[X,Y]:C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ 仍然满足定理 5.1 的条件 (1) 和 (2). 所以, $[X,Y]\in\mathfrak{X}(M)$.

定义 5.2　由 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ 通过 (5.3) 式确定的光滑切向量场 $[X,Y]$ 称为 X 和 Y 的 **Poisson 括号积**.

定理 5.2　Poisson 括号积 $[\cdot,\cdot]:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ 服从下述运算规律: $\forall X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M),\forall\lambda\in\mathbb{R},\forall f,g\in C^\infty(M)$,

(1) 分配律: $[X+Y,Z]=[X,Z]+[Y,Z]$;

(2) $[\lambda X,Y]=\lambda[X,Y]$;

(3) 反交换律: $[X,Y]=-[Y,X]$;

(4) Jacobi恒等式:

$$[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0;$$

(5) $[fX,gY]=fX(g)Y-gY(f)X+fg[X,Y]$.

证明留给读者作为练习.

注记 5.1　一般地, 设 $[\cdot,\cdot]$ 是在向量空间 V 中满足条件 (1) ~ (4) 的乘法, 则称 $(V,[\cdot,\cdot])$ 是一个 **李代数**. 因此, $\mathfrak{X}(M)$ 关于 Poisson 括号积是李代数.

§1.6　光滑张量场

已经知道, 在 m 维光滑流形 M 的每一点 p 都有切空间 T_pM 以及与之对偶的余切空间 T_p^*M. 由此出发就可以在 M 的每一点 p 处定义一般的 (r,s) 型张量以及这些张量所构成的张量空间 $T^r_s(p)$; 类似于光滑的切向量场, 也可以引入光滑张量场的概念.

按照定义, 所谓 M 在点 p 处的一个 (r,s) 型张量 τ 是指一个 $r+s$ 重线性映射

$$\tau:\underbrace{T_p^*M\times\cdots\times T_p^*M}_{r\text{ 个}}\times\underbrace{T_pM\times\cdots\times T_pM}_{s\text{ 个}}\to\mathbb{R},$$

其中 r 称为 τ 的 **反变阶数**, s 称为 τ 的 **协变阶数**. 若以 $T^r_s(p)$ 表示 M 在 p 点的所有 (r,s) 型张量构成的集合, 则有

$$T^r_s(p)=\mathscr{L}(\underbrace{T_p^*M,\cdots,T_p^*M}_{r\text{ 个}},\underbrace{T_pM,\cdots,T_pM}_{s\text{ 个}};\ \mathbb{R}).$$

不难看出, $T^r_s(p)$ 是一个 m^{r+s} 维的向量空间; 并且, 在 p 点的容许局部坐标系 $(U;x^i)$ 下, $T^r_s(p)$ 有一个自然的基底, 即

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_p\otimes\cdots\otimes\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right|_p\otimes \mathrm{d}x^{j_1}|_p\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{j_s}|_p,$$

$$1\le i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s\le m.$$

由此可见,

$$T^r_s(p)=\underbrace{T_pM\otimes\cdots\otimes T_pM}_{r\text{ 个}}\otimes\underbrace{T_p^*M\otimes\cdots\otimes T_p^*M}_{s\text{ 个}}.$$

令

$$T^r_s(M)=\bigcup_{p\in M}T^r_s(p).$$

所谓光滑流形 M 上的一个 (r,s) 型 **张量场** τ 是指从 M 到 $T^r_s(M)$ 的一个映射 $\tau:M\to T^r_s(M)$, 使得对于任意的 $p\in M$, 都有 $\tau(p)\in T^r_s(p)$.

M 上的 $(r,0)$ 型和 $(0,r)$ 型张量场分别称为 r 阶反变张量场和 r 阶协变张量场.

定义 6.1 光滑流形 M 上的一个 (r,s) 型张量场 $\tau: M \to T^r_s(M)$ 称为是**光滑的**, 如果对于任意的 $p \in M$, 存在 p 点的容许局部坐标系 $(U;x^i)$, 使得 τ 在 U 上的限制具有如下的局部表达式:

$$\tau|_U = \tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s},$$

其中 $\tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 是 U 上的光滑函数. M 上光滑的 (r,s) 型张量场构成的集合记作 $\mathscr{T}^r_s(M)$. 特别地,

$$\mathscr{T}^1_0(M) = \mathfrak{X}(M), \quad \mathscr{T}^0_0(M) = C^\infty(M).$$

在集合 $\mathscr{T}^r_s(M)$ 中有自然的加法、数乘等运算; 任意两个光滑张量场能够逐点作张量积运算. 另外, 张量场还可以与光滑函数相乘, 使得 $\mathscr{T}^r_s(M)$ 成为一个 $C^\infty(M)$-模.

例 6.1 设 $f \in C^\infty(M)$, 则 df 是 M 上的一个光滑的 $(0,1)$ 型张量场, 即光滑的一阶协变张量场, 称为 f 的微分. 事实上, 由例 4.3 可知, 对于任意的 $p \in M$, $df(p) \in T^*_pM$. 在 p 点的容许坐标系 $(U;x^i)$ 下, df 有如下的局部表示:

$$df|_U = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i,$$

其中 $\dfrac{\partial f}{\partial x^i} \in C^\infty(U)$.

定义 6.2 光滑的一阶协变张量场 (即余切向量场) 又称为 **1 次微分式**.

把光滑流形 M 上的 1 次微分式的集合记为 $A^1(M)$, 即

$$A^1(M) = \mathscr{T}^0_1(M).$$

例 6.2 设 $\tau \in \mathscr{T}^1_1(M)$. 则对于任意的 $p \in M$, 利用 p 点的一个容许局部坐标系 $(U;x^i)$, $\tau(p)$ 给出了 T_pM 上的线性变换 $\tilde\tau: T_pM \to T_pM$, 它的定义是:

$$(\tilde\tau(p))(v) = \tau(p)(dx^i, v)\frac{\partial}{\partial x^i}(p), \quad \forall v \in T_pM. \tag{6.1}$$

上式的右端与局部坐标系 $(U;x^i)$ 的选取无关.

反过来, 如果在 M 的每一点 p 处都指定了一个线性变换 $\tilde\tau(p): T_pM \to T_pM$, 即给出了 M 上的一个线性变换场 $\tilde\tau$, 则 $\tilde\tau$ 在 M 上确定一个 $(1,1)$ 型张量场 τ, 使得在每一点 $p \in M$, 以及 $\forall \alpha \in T^*_pM$, $\forall v \in T_pM$, 有

$$\tau(p)(\alpha, v) = \alpha(\tilde\tau(p)(v)).$$

容易证明, τ 是 M 上光滑的 $(1,1)$ 型张量场 $\iff$ 对于任意的 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 都有 $\tilde\tau(X) \in \mathfrak{X}(M)$, 其中 $\tilde\tau(X)$ 的定义如下:

$$(\tilde\tau(X))(p) = (\tilde\tau(p))(X(p)), \quad \forall p \in M.$$

作为特例, 对每一点 $p \in M$, 令 $\tilde\tau(p)$ 为 T_pM 上的恒等变换 id. 此时, $\tilde\tau$ 所确定的 $(1,1)$ 型光滑张量场 τ 在任意一个局部坐标系 $(U;x^i)$ 下有如下表示:

$$\tau|_U = \frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^i.$$

事实上, 对于任意的 $p \in U$, $\alpha \in T^*_pM$ 以及 $v \in T_pM$, 可设

$$\alpha = \alpha_i dx^i|_p, \quad v = v^i\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p,$$

则有

$$\begin{aligned}\tau(p)(\alpha,v) &= \alpha(\mathrm{id}(v)) = \alpha(v) = \left\langle v^j\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p, \alpha_i dx^i|_p\right\rangle \\ &= \alpha_i v^i = \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\otimes dx^i|_p\right)(\alpha, v).\end{aligned}$$

定理 6.1 设 τ 是光滑流形 M 上的一个光滑的 (r,s) 型张量场, 则由 τ 可以给出下述 $r+s$ 重线性映射

$$\hat\tau: \underbrace{A^1(M)\times\cdots\times A^1(M)}_{r\text{ 个}}\times\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)}_{s\text{ 个}} \to C^\infty(M), \tag{6.2}$$

其定义为：对于任意的 $\alpha^1,\cdots,\alpha^r\in A^1(M)$, $X_1,\cdots,X_s\in\mathfrak{X}(M)$ 以及 $\forall p\in M$,

$$(\tilde{\tau}(\alpha^1,\cdots,\alpha^r,X_1,\cdots,X_s))(p) = \tau(p)(\alpha^1(p),\cdots,\alpha^r(p),X_1(p),\cdots,X_s(p)). \tag{6.3}$$

并且这样确定的映射 $\tilde{\tau}$ 关于每一个自变量都是 $C^\infty(M)$-线性的，即有

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}(\alpha^1,\cdots,\alpha^\lambda+f\alpha,\cdots,\alpha^r,X_1,\cdots,X_s) &= \tilde{\tau}(\alpha^1,\cdots,\alpha^r,X_1,\cdots,X_s)\\ &\quad+f\cdot\tilde{\tau}(\alpha^1,\cdots,\alpha^{\lambda-1},\alpha,\alpha^{\lambda+1},\cdots,\alpha^r,X_1,\cdots,X_s)\\ &\quad(\forall\alpha\in A^1(M),\ f\in C^\infty(M),\ 1\leq\lambda\leq r);\end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}(\alpha^1,\cdots,\alpha^r,X_1,\cdots,X_\mu+fX,\cdots,X_s) &= \tilde{\tau}(\alpha^1,\cdots,\alpha^r,X_1,\cdots,X_s)\\ &\quad+f\cdot\tilde{\tau}(\alpha^1,\cdots,\alpha^r,X_1,\cdots,X_{\mu-1},X,X_{\mu+1},\cdots,X_s)\\ &\quad(\forall X\in\mathfrak{X}(M),\ f\in C^\infty(M),\ 1\leq\mu\leq s).\end{aligned} \tag{6.5}$$

特别地，$\tilde{\tau}$ 也是 $\mathbb{R}$-线性的.

反过来，任意给定一个 $r+s$ 重线性映射

$$\tilde{\tau}:\underbrace{A^1(M)\times\cdots\times A^1(M)}_{r\text{ 个}}\times\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)}_{s\text{ 个}}\to C^\infty(M),$$

如果它关于每一个自变量都是 $C^\infty(M)$-线性的，则在 M 上存在唯一的一个 (r,s) 型光滑张量场 τ 满足 (6.3) 式.

因此，以后可以把多重 $C^\infty(M)$-线性映射 $\tilde{\tau}$ 和相应的 (r,s) 型光滑张量场 τ 不加区别地等同起来.

证明留给读者自己考虑，有关的详细讨论可以参看参考文献 [3].

定理 6.1 说明，一个多重线性映射

$$\tilde{\tau}:A^1(M)\times\cdots\times A^1(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M)$$

是否为光滑张量场，关键在于它对于每一个自变量是否是 $C^\infty(M)$-线性的. 因此，人们常常把这种多重 $C^\infty(M)$-线性性质称为**张量性质**.

例 6.3 定义映射 $\tau:A^1(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M)$ 如下：

$$\tau(\alpha,X,Y)=\alpha([X,Y]),\quad\forall\alpha\in A^1(M),\quad X,Y\in\mathfrak{X}(M).$$

很明显，映射 τ 关于每一个自变量都是 $\mathbb{R}$-线性的，并且关于自变量 α 还是 $C^\infty(M)$-线性的. 但是，τ 关于另外两个自变量 X,Y 却不具有 $C^\infty(M)$-线性性质. 实际上，对于 $f\in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned}\tau(\alpha,fX,Y)&=\alpha([fX,Y])=\alpha(f[X,Y]-Y(f)X)\\&=f\cdot\tau(\alpha,X,Y)-Y(f)\cdot\alpha(X).\end{aligned}$$

由此可见，映射 τ 不是 M 上的 $(1,2)$ 型光滑张量场.

§1.7 外微分式

光滑流形 M 上的一个光滑的 r 阶协变张量场 φ 称为是**反对称的**，如果它作为映射

$$\varphi:\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)}_{r\text{ 个}}\to C^\infty(M),$$

关于所有的自变量是反对称的，即交换任意两个自变量的位置，所得的值反号；或等价地说，在任意的局部坐标系下，φ 的分量关于下指标是反对称的.

定义 7.1 光滑流形 M 上的一个光滑的 r 阶反对称协变张量场 φ 称为 M 上的一个 r **次外微分式**.

同时，还约定：M 上的 1 次外微分式就是 M 上的 1 次微分式，即光滑的一阶协变张量场；M 上的 0 次外微分式指的是 M 上的光滑函数.

M 上 r 次外微分式的集合记作 $A^r(M)$. 特别地,

$$A^1(M)=\mathscr{T}_1^0(M),\quad A^0(M)=C^\infty(M).$$

由定义可知, 若 $\varphi\in A^r(M)$, 则在每一点 $p\in M$, $\varphi(p)$ 是 T_pM 上的一个 r 次外形式, 即

$$\varphi(p):\underbrace{T_pM\times\cdots\times T_pM}_{r\text{ 个}}\to\mathbb{R}$$

是一个反对称的 r 重线性函数. 在另一方面, 由定理 6.1 可知, 每一个 r 次外微分式 φ 可以等同于反对称的 r 重 $C^\infty(M)$-线性映射

$$\varphi:\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)}_{r\text{ 个}}\to C^\infty(M).$$

通过逐点定义的方式, 可以引入外微分式的加法、数乘和外积等运算. 比如, 外积的定义如下: $\forall\varphi\in A^r(M),\ \psi\in A^s(M)$,

$$\begin{aligned}(\varphi\wedge\psi)(p)&=\varphi(p)\wedge\psi(p)=\frac{(r+s)!}{r!s!}A_{r+s}(\varphi(p)\otimes\psi(p))\\&=\frac{(r+s)!}{r!s!}A_{r+s}(\varphi\otimes\psi)(p),\quad\forall p\in M.\end{aligned}$$

即有

$$\varphi\wedge\psi=\frac{(r+s)!}{r!s!}A_{r+s}(\varphi\otimes\psi).$$

这里的 A_{r+s} 是反对称化算子 (参看参考文献 [3, 第一章, §5]).

进而, 若命

$$A(M)=\bigoplus_{r=0}^{m}A^r(M),\quad m=\dim M,$$

则在 $A(M)$ 上可以引入外微分运算.

定理 7.1　设 M 是 m 维光滑流形, 则存在唯一的一个映射

$$\mathrm{d}:A(M)\to A(M),$$

使得对于任意的非负整数 r, 有 $\mathrm{d}(A^r(M))\subset A^{r+1}(M)$, 并且满足以下条件:

(1) d 是线性的, 即对于任意的 $\varphi,\psi\in A(M)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, 有

$$\mathrm{d}(\varphi+\lambda\cdot\psi)=\mathrm{d}\varphi+\lambda\mathrm{d}\psi;$$

(2) $\forall\varphi\in A^r(M)$, $\psi\in A(M)$, 有

$$\mathrm{d}(\varphi\wedge\psi)=\mathrm{d}\varphi\wedge\psi+(-1)^r\varphi\wedge\mathrm{d}\psi;$$

(3) $\forall f\in A^0(M)$, $\mathrm{d}f$ 是 f 的微分;

(4) $\mathrm{d}^2=\mathrm{d}\circ\mathrm{d}=0$.

这样的映射 d 称为**外微分 (算子)**.

定理的证明可参看参考文献 [3] 的第四章. 在其证明过程中, 首先指出外微分算子 d 的局部性: 若 φ, ψ 是 M 上的两个外微分式, 且在 M 的一个开子集 U 上有 $\varphi|_U=\psi|_U$, 则

$$\mathrm{d}\varphi|_U=\mathrm{d}\psi|_U.$$

由此可见, 如果 d 是定理所述的映射, 则在 M 的任意一个开子集 U 上可以诱导出映射 $\mathrm{d}:A(U)\to A(U)$, 它仍然满足定理所述的条件; 并且对于 $\varphi\in A^r(M)$ 有

$$\mathrm{d}(\varphi|_U)=(\mathrm{d}\varphi)|_U.$$

这样, 对于任意的 $\varphi\in A^r(M)$, 如果它在 M 的一个容许局部坐标系 $(U;x^i)$ 下有局部表达式

$$\varphi|_U=\frac{1}{r!}\varphi_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r},$$

则根据 d 所满足的条件将算子 d 作用在 $\varphi|_U$ 上得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\varphi|_U)=&\frac{1}{r!}\mathrm{d}\varphi_{i_1\cdots i_r}\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}\\=&\frac{1}{r!}\frac{\partial\varphi_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}.\end{aligned}\tag{7.1}$$

容易验证，(7.1) 式中最后的表达式与局部坐标系 $(U;x^i)$ 的选取无关. 因此，实际上我们是用 (7.1) 式来定义 $(\mathrm{d}\varphi)|_U$ 的.

定理 7.2　设 $\omega\in A^1(M)$, 则对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, 有

$$\mathrm{d}\omega(X,Y)=X(\omega(Y))-Y(\omega(X))-\omega([X,Y]).$$

证明　将上式右端记为 $\alpha(X,Y)$, 便得映射

$$\alpha:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M).$$

显然，α 是反对称的双线性映射. 另外，对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, $f\in C^\infty(M)$ 有

$$\begin{aligned}\alpha(fX,Y)=&fX(\omega(Y))-Y(\omega(fX))-\omega([fX,Y])\\=&fX(\omega(Y))-Y(f\omega(X))-\omega(f[X,Y]-Y(f)\cdot X)\\=&f\alpha(X,Y),\end{aligned}$$

并且

$$\alpha(X,fY)=-\alpha(fY,X)=-f\cdot\alpha(Y,X)=f\cdot\alpha(X,Y),$$

故 α 是 M 上的一个 2 次外微分式. 因此要证明 α 和 $\mathrm{d}\omega$ 相等，只需说明它们的局部表达式相同即可.

设在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下，ω 的局部表示为 $\omega|_U=\omega_i\mathrm{d}x^i$, 则

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\omega)|_U=&\mathrm{d}(\omega|_U)=\frac{\partial\omega_i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i\\=&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x^j}-\frac{\partial\omega_j}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i.\end{aligned}$$

另一方面，$\alpha|_U=\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i$, 其中

$$\begin{aligned}\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=&\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)\\&-\omega\left(\left[\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^i}\right]\right)\\=&\frac{\partial\omega_i}{\partial x^j}-\frac{\partial\omega_j}{\partial x^i}.\end{aligned}$$

因此，$\mathrm{d}\omega|_U=\alpha|_U$.

一般地，对于任意的 r 次外微分式，有如下的外微分求值公式：

定理 7.3　设 $\omega\in A^r(M)$. 则对于任意的 $X_1,\cdots,X_{r+1}\in\mathfrak{X}(M)$, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(X_1,\cdots,X_{r+1})=&\sum_{\alpha=1}^{r+1}(-1)^{\alpha+1}X_\alpha(\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_\alpha,\cdots,X_{r+1}))\\&+\sum_{\alpha<\beta}(-1)^{\alpha+\beta}\omega([X_\alpha,X_\beta],X_1,\cdots,\hat{X}_\alpha,\cdots,\hat{X}_\beta,\cdots X_{r+1}).\end{aligned}$$

此定理的证明和定理 7.2 的证明是类似的，留给读者作为练习.

从定理 7.1(4) 得知，外微分算子 d 满足 $\mathrm{d}\circ\mathrm{d}=0$. 这意味着 $\mathrm{d}:A^r(M)\to A^{r+1}(M)$ 可以看作拓扑学中的上边缘算子. 在这里，$A^r(M)$ 被看作加法群.

定义 7.2　命

$$\begin{aligned}Z^r(M)=&\{\alpha\in A^r(M):\mathrm{d}\alpha=0\},\\B^r(M)=&\mathrm{d}(A^{r-1}(M))\\=&\{\alpha\in A^r(M):\text{存在}\beta\in A^{r-1}(M),\text{使得}\alpha=\mathrm{d}\beta\}.\end{aligned}$$

$Z^r(M)$ 中的元素称为 M 上的 r 次**闭微分式**; $B^r(M)$ 中的元素称为 M 上的**恰当微分式**.

这样，性质 $\mathrm{d}\circ\mathrm{d}=0$ 表明 $B^r(M)$ 是 $Z^r(M)$ 的子群.

定义 7.3 商群 $H^r(M)=Z^r(M)/B^r(M)$ 称为光滑流形 M 上的第 r 个 **de Rham 上同调群**.

应该注意的是，de Rham 上同调群 $H^r(M)$ 是光滑流形的光滑结构的产物. 但是，著名的 de Rham 定理说：当 M 是紧致光滑流形时，de Rham 上同调群 $H^r(M)$ 与 M 的第 r 个实系数上同调群是同构的. 由此可见，de Rham 上同调群 $H^r(M)$ 是流形 M 的拓扑不变量.

§1.8 外微分式的积分和 Stokes 定理

在 m 维有向光滑流形 M 上可以定义 m 次外微分式的积分. 实质上，这是 m 重黎曼积分的推广.

假定 M 是满足第二可数公理的 m 维有向光滑流形. 设 $\omega\in A^r(M)$, ω 的 **支撑集** 定义为

$$\operatorname{Supp}\omega=\overline{\{p\in M;\omega(p)\neq 0\}}. \tag{8.1}$$

在 M 上有紧致支撑集的 r 次外微分式的集合记作 $A_0^r(M)$. 要定义的积分 $\int_M$ 是一个线性映射 $\int_M: A_0^r\to\mathbb{R}$.

先假定 (U,φ) 是 M 的一个定向相符的坐标卡，$\omega\in A_0^m(M)$, 且 $\operatorname{Supp}\omega\subset U$. 这样，$\omega|_{M\setminus U}=0$, 且

$$\omega|_U=a\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m, \tag{8.2}$$

其中 $a\in C^\infty(U)$, (x^i) 是在 U 上由坐标映射 φ 给出的局部坐标系. 因为 $\operatorname{Supp}a\subset\operatorname{Supp}\omega\subset U$ 是紧致的，故 m 重黎曼积分

$$\int_{\varphi(U)}(a\circ\varphi^{-1})dx^1\cdots dx^m$$

是一个有限的数值. 因此，可以规定

$$\int_M\omega=\int_{\varphi(U)}(a\circ\varphi^{-1})dx^1\cdots dx^m. \tag{8.3}$$

需要指出的是，上式右端与定向相符的局部坐标卡 (U,φ) 的选取无关. 事实上，如果有另一个坐标卡 (V,ψ), 对应的局部坐标系是 $(V;y^i)$, 并且 $\operatorname{Supp}\omega\subset V$. 那么 $\omega|_{M\setminus V}=0$, 并且

$$\omega|_V=b\,dy^1\wedge\cdots\wedge dy^m,$$

其中 $b\in C^\infty(V)$. 因此，在 $U\cap V$ 上有

$$\begin{aligned}a\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m&=b\,dy^1\wedge\cdots\wedge dy^m\\&=b\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m,\end{aligned}$$

即

$$a\circ\varphi^{-1}=\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}\cdot(b\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ\varphi^{-1}). \tag{8.4}$$

由于 (U,φ), (V,ψ) 是与 M 的定向相符的坐标卡，故坐标变换 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 的 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}>0. \tag{8.5}$$

根据重积分的变量替换公式有

$$\begin{aligned}\int_{\psi(V)}(b\circ\psi^{-1})dy^1\cdots dy^m&=\int_{\psi(V\cap U)}(b\circ\psi^{-1})dy^1\cdots dy^m\\&=\int_{\varphi(U\cap V)}(b\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ\varphi^{-1})\cdot\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}dx^1\cdots dx^m\\&=\int_{\varphi(U\cap V)}(a\circ\varphi^{-1})dx^1\cdots dx^m\\&=\int_{\varphi(U)}(a\circ\varphi^{-1})dx^1\cdots dx^m.\end{aligned} \tag{8.6}$$

现在考虑一般情形. 设 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha);\alpha\in I\}$ 是 M 的一个定向相符的坐标卡集，使得 $\{U_\alpha;\alpha\in I\}$ 是 M 的局部有限开覆盖，并且 $\{h_\alpha\}$ 是从属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解. 对于任意的 $\omega\in A_0^m(M)$ 有

$$\omega=\omega\cdot\sum_\alpha h_\alpha=\sum_\alpha(h_\alpha\cdot\omega), \tag{8.7}$$

其中 $h_\alpha\cdot\omega\in A_0^m(M)$, 并且

$$\mathrm{Supp}\,(h_\alpha\cdot\omega)\subset\mathrm{Supp}\,h_\alpha\cap\mathrm{Supp}\omega\subset U_\alpha.$$

由于 Suppω 是紧致的，故 (8.7) 式的右端只是有限多项之和. 每一项 $h_\alpha\cdot\omega$ 在 M 上的积分已经有定义，所以

$$\int_M\omega=\sum_\alpha\int_M h_\alpha\cdot\omega=\sum_\alpha\int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)}((h_\alpha\cdot a_\alpha)\circ\varphi_\alpha^{-1})\mathrm{d}x_\alpha^1\cdots\mathrm{d}x_\alpha^m,\quad(8.8)$$

其中 $\omega|_{U_\alpha}=a_\alpha\mathrm{d}x_\alpha^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\alpha^m$, $a_\alpha\in C^\infty(U_\alpha)$.

不难证明，上面所定义的数值 $\int_M\omega$ 与光滑流形 M 的定向相符的局部有限坐标覆盖 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha);\alpha\in I\}$ 的选取无关，也与从属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解 $\{h_\alpha\}$ 的选取无关.

定义 8.1 数值 $\int_M\omega$ 称为 m 次外微分式 $\omega\in A_0^m(M)$ 在 M 上的**积分**.

若 $\omega\in A_0^r(M)(r<m)$, 则能定义 ω 在 M 的 r 维有向子流形上的积分. 确切地说，设 N 是满足第二可数公理的 r 维有向光滑流形，$f:N\to M$ 是 N 在 M 中的光滑嵌入子流形，则 $f^*\omega\in A_0^r(N)$, 于是可以令

$$\int_{f(N)}\omega=\int_N f^*\omega.\qquad(8.9)$$

当 (f,N) 是 M 的浸入子流形时，上式右端仍然是有意义的.

定义 8.2 设 M 是一个 m 维光滑流形. 所谓的**带边区域** D 是指流形 M 的一个子集，其中的点分为两类:

(1) 内点 $p\in D$, 即在 M 中有点 p 的一个邻域 U, 使得 U 整个地包含在 D 内;

(2) 边界点 $p\in D$, 即在 M 中有点 p 的一个局部坐标系 $(U;x^i)$, 使得

$$x^i(p)=0,\quad\forall i,$$

并且

$$U\cap D=\{q\in U;x^m(q)\geq0\}.\qquad(8.10)$$

这样的坐标系称为边界点 p 的适用坐标系.

带边区域 D 的边界点的集合记为 ∂D. 可以证明: ∂D 是 M 的 $m-1$ 维闭的嵌入子流形，并且当 M 是可定向流形时，∂D 也是可定向的. 特别地，设在点 $p\in\partial D$ 的适用坐标系 $(U;x^i)$ 与 M 的定向相符，那么

$$(U\cap\partial D;\ x^\alpha,1\leq\alpha\leq m-1)$$

是 ∂D 的局部坐标系，并且 M 在 ∂D 上的诱导定向是由

$$(-1)^m\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{m-1}\qquad(8.11)$$

给出的，使得 ∂D 成为有诱导定向的光滑流形. 上述规定与微积分学中 $\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$ 在带边区域的边界上的诱导定向是一致的.

定理 8.1(Stokes 定理) 设 M 是满足第二可数公理的 m 维有向光滑流形，D 是 M 的一个带边区域，则对于任意的 $\omega\in A_0^{m-1}(M)$ 有

$$\int_D\mathrm{d}\omega=\int_{\partial D}i^*\omega,\qquad(8.12)$$

其中 $i:\partial D\to M$ 是包含映射，∂D 具有从 M 诱导的定向.

定理的证明请看参考文献 [3, 第四章, §5].

例 8.1 假定 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个有界闭区域. 设 $\omega\in A_0^1(\mathbb{R}^2)$ 是

$$\omega=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y,\qquad(8.13)$$

则

$$\mathrm{d}\omega=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,\qquad(8.14)$$

因此由定理 8.1 得到

$$\int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial D}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y.\qquad(8.15)$$

这正是经典的 Green 公式，其中 ∂D 具有从 D 诱导的定向，即沿曲线 ∂D 的正向行进时区域 D 落在行进者的左侧.

例 8.2 设 D 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个有界闭区域，在 ∂D 上取从 D 诱导的定向，即以外法向量作为 ∂D 的正定向. 设 $\varphi \in A_0^2(\mathbb{R}^3)$，置

$$\varphi = P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \tag{8.16}$$

则

$$\mathrm{d}\varphi = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z. \tag{8.17}$$

定理 8.1 断言

$$\int_{\partial D} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{8.18}$$

这是经典的 Gauss 公式，左端是第二型曲面积分.

例 8.3 设 S 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一块有向曲面，∂S 是具有从 S 诱导的定向的光滑简单闭曲线. 设

$$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \in A_0^1(\mathbb{R}^3), \tag{8.19}$$

则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega = &\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\ &+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{8.20}$$

由定理 8.1 得到

$$\begin{aligned}&\int_{\partial S} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \\ &= \int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{8.21}$$

这是经典的 Stokes 公式，左端是第二型曲线积分，右端是第二型曲面积分.

§1.9 切丛和向量丛

设 M 是一个 m 维光滑流形，则在每一点 $p \in M$ 有切空间 T_pM. 令

$$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM.$$

在本节，要在集合 TM 上给出拓扑结构和光滑结构，使它成为一个 $2m$ 维的光滑流形. 这样，从光滑流形 M 出发构造出一个新的光滑流形 TM. 对这个新的光滑流形的结构进行分析，便可抽象出 M 上的向量丛的概念. 向量丛是许多数学分支的研究对象和工具，在本书中会广泛地用到切丛和向量丛的概念.

首先定义映射 $\pi: TM \to M$ 如下：$\forall p \in M, \forall v \in T_pM$，令

$$\pi(v) = p. \tag{9.1}$$

换言之，映射 π 把每一个切向量 $v \in TM$，映到它的起点 p. 于是，

$$\pi^{-1}(p) = T_pM, \quad \pi(T_pM) = \{p\}.$$

假定 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in I\}$ 是 m 维光滑流形 M 上的光滑结构. 令

$$u_\alpha^i(p) = (\varphi_\alpha(p))^i, \quad \forall p \in U_\alpha,$$

则 $(U_\alpha; u_\alpha^i)$ 是 M 的局部坐标系. 很明显，

$$\bigcup_{\alpha\in I} \pi^{-1}(U_\alpha) = TM.$$

对于每一个 $\alpha \in I$，定义映射 $\psi_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{R}^m \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ 如下：设

$$p \in U_\alpha, \quad y = (y^1, \cdots, y^m) \in \mathbb{R}^m,$$

令

$$\psi_\alpha(p, y) = \sum_{i=1}^m y^i \left.\frac{\partial}{\partial u_\alpha^i}\right|_p. \tag{9.2}$$

由于 $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial u_\alpha^i}\right|_p\right\}$ 是 U_α 上的自然标架场，每一个切向量 $v\in T_pM(p\in U_\alpha)$ 有唯一的线性表示

$$v = y^j \left.\frac{\partial}{\partial u_\alpha^j}\right|_p,$$

所以映射 ψ_α 是一一对应. 这样，借助于映射 ψ_α 可以把 $U_\alpha\times\mathbb{R}^m$ 的拓扑移植到 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上来. 如果在 $\pi^{-1}(U_\alpha)(\alpha\in I)$ 上如此获得的拓扑是彼此相容的，则在 TM 上定义了一个拓扑结构.

为了使叙述简单起见，先来考察 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上的局部坐标系和坐标变换公式，借此在 TM 上便同时建立起拓扑结构和光滑结构. 对于每一个 $\alpha\in I$, 定义映射 $\Phi_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\to\mathbb{R}^{2m}$ 如下：

$$\Phi_\alpha\left(\sum_{i=1}^m y^i \left.\frac{\partial}{\partial u_\alpha^i}\right|_p\right) = (u_\alpha^1(p),\cdots,u_\alpha^m(p),y^1,\cdots,y^m). \tag{9.3}$$

很明显，Φ_α 把 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 一对一地映为 $\mathbb{R}^{2m}$ 中的开集 $\varphi_\alpha(U_\alpha)\times\mathbb{R}^m$. 因此，$\Phi_\alpha$ 可以看作集合 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上的坐标映射，因而 $(\pi^{-1}(U_\alpha),\Phi_\alpha)$ 是 TM 的一个坐标卡.

当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$, 且 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$ 时，设切向量 $v\in T_pM$ 有两个表达式：

$$v=\sum_{i=1}^m \tilde y^i \left.\frac{\partial}{\partial u_\beta^i}\right|_p = \sum_{j=1}^m y^j \left.\frac{\partial}{\partial u_\alpha^j}\right|_p, \tag{9.4}$$

因此，v 的分量 $\tilde y^i$ 和 y^j 满足关系式

$$\tilde y^i = y^j\frac{\partial u_\beta^i}{\partial u_\alpha^j}. \tag{9.5}$$

由于 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 和 (U_β,φ_β) 是 C^∞ 相关的，

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

是 C^∞ 映射，即

$$u_\beta^i = (\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})^i(u_\alpha^1,\cdots,u_\alpha^m) \tag{9.6}$$

是 $u_\alpha^1,\cdots,u_\alpha^m$ 的 C^∞ 函数. (9.5) 式说明 $\tilde y^i$ 是 $u_\alpha^1,\cdots,u_\alpha^m,y^1,\cdots,y^m$ 的 C^∞ 函数，即坐标变换

$$\Phi_\beta\circ\Phi_\alpha^{-1}(u_\alpha^1,\cdots,u_\alpha^m,y^1,\cdots,y^m) = (u_\beta^1,\cdots,u_\beta^m,\tilde y^1,\cdots,\tilde y^m)$$

是从 $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^m$ 到 $\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^m$ 的光滑映射.

特别地，映射

$$\Phi_\beta\circ\Phi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^m\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^m$$

是连续的. 这意味着映射

$$\psi_\beta^{-1}\circ\psi_\alpha(p,y^1,\cdots,y^m) = (p,\tilde y^1,\cdots,\tilde y^m)$$

是从 $(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^m$ 到它自身的连续映射，因而是同胚 (因为它的逆映射 $(\psi_\beta^{-1}\circ\psi_\alpha)^{-1}=\psi_\alpha^{-1}\circ\psi_\beta$ 也是连续的). 所以，对于每一个 $\alpha\in I$, 当 $U_\alpha\times\mathbb{R}^m$ 的拓扑通过映射 ψ_α 移植到 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上时，所得到的拓扑是彼此相容的. 事实上，当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ 时，

$$\psi_\alpha=\psi_\beta\circ(\psi_\beta^{-1}\circ\psi_\alpha):(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^m\to\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta).$$

由于 $\psi_\beta^{-1}\circ\psi_\alpha$ 是同胚，在 $\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)=\pi^{-1}(U_\alpha)\cap\pi^{-1}(U_\beta)$ 上通过映射 ψ_α 移植的拓扑与通过 ψ_β 移植的拓扑是一致的，因而在 TM 上确定了一个拓扑结构. 显然，在 TM 的这个拓扑下，映射

$$\Phi_\alpha=(\varphi_\alpha\times\mathrm{id})\circ\psi_\alpha^{-1}:\pi^{-1}(U_\alpha)\to\varphi_\alpha(U_\alpha)\times\mathbb{R}^m\subset\mathbb{R}^{2m}$$

是同胚. 所以 $\{(\pi^{-1}(U_\alpha),\Phi_\alpha);\ \alpha\in I\}$ 给出了 TM 的一个 C^∞-相关的坐标覆盖，它在 TM 上确定了一个光滑结构，使得 TM 成为 $2m$ 维光滑流形.

另一方面，在 TM 的上述光滑结构下，映射 $\pi:TM\to M$ 在局部坐标邻域 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上的表达式是

$$\pi=\varphi_\alpha\circ\Phi_\alpha^{-1}:(u_\alpha^1,\cdots,u_\alpha^m,y^1,\cdots,y^m)\mapsto(u_\alpha^1,\cdots,u_\alpha^m).$$

由此得知，π 是光滑的开映射．此外，

$$\Phi_\alpha\circ\psi_\alpha(p,y)=\Phi_\alpha\left(\sum_{i=1}^m y^i\left.\frac{\partial}{\partial u_\alpha^i}\right|_p\right)=(u_\alpha^1,\cdots,u_\alpha^m,y^1,\cdots,y^m),$$

故映射 $\psi_\alpha:U_\alpha\times\mathbb{R}^m\to\pi^{-1}(U_\alpha)$ 是光滑同胚．

通过上面的讨论，不难看出光滑流形 TM 具有如下的特点：

(1) 存在光滑映射 $\pi:TM\to M$，使得在每一点 $p\in M$，

$$\pi^{-1}(p)=T_pM$$

是一个与 $\mathbb{R}^m$ 同构的 m 维向量空间；

(2) 在流形 M 上有一个开覆盖 $\{U_\alpha;\ \alpha\in I\}$，使得对于每一个 $\alpha\in I$，存在光滑同胚

$$\psi_\alpha:U_\alpha\times\mathbb{R}^m\to\pi^{-1}(U_\alpha),$$

满足

$$\pi\circ\psi_\alpha(p,y)=p,\quad\forall(p,y)\in U_\alpha\times\mathbb{R}^m;$$

换言之，光滑流形 TM 在局部上与乘积流形 $U_\alpha\times\mathbb{R}^m$ 光滑同胚，并且保持"纤维"$\pi^{-1}(p)$ 与 $\{p\}\times\mathbb{R}^m$ 相对应；

(3) 对于任意固定的 $p\in U_\alpha$，如果定义映射

$$\psi_{\alpha,p}:\mathbb{R}^m\to\pi^{-1}(p)=T_pM$$

如下：

$$\psi_{\alpha,p}(y)=\psi_\alpha(p,y),\quad\forall y\in\mathbb{R}^m,$$

则 $\psi_{\alpha,p}$ 是线性同构；

(4) 当 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$ 时，$\psi_{\alpha,p},\psi_{\beta,p}:\mathbb{R}^m\to T_pM$ 都是线性同构，因而映射

$$g_{\beta\alpha}(p)=\psi_{\beta,p}^{-1}\circ\psi_{\alpha,p}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$$

是线性同构，即 $g_{\beta\alpha}(p)\in\mathrm{GL}(m)$．

从 (9.4) 式可知，映射 $g_{\beta\alpha}(p)$ 恰好是由 M 的局部坐标变换 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 在点 $\varphi_\alpha(p)$ 处的 Jacobi 矩阵

$$g_{\beta\alpha}(p)=\left.\left(\frac{\partial u_\beta^i}{\partial u_\alpha^j}\right)\right|_{\varphi_\alpha(p)}$$

给出的线性变换．显然，由 $p\mapsto g_{\beta\alpha}(p)$ 给出的映射 $g_{\beta\alpha}:U_\alpha\cap U_\beta\to\mathrm{GL}(m)$ 是光滑的．

从光滑流形 TM 所具有的特殊构造可以抽象出下面的定义：

定义 9.1 设 E,M 是两个光滑流形，$\pi:E\to M$ 是一个光滑的满映射，$V=\mathbb{R}^q$ 是 q 维向量空间．如果在 M 上存在一个开覆盖 $\{U_\alpha;\ \alpha\in I\}$ 以及一组映射 $\{\psi_\alpha;\ \alpha\in I\}$，它们满足下列条件：

(1) $\forall\alpha\in I$，映射 ψ_α 是从 $U_\alpha\times\mathbb{R}^q$ 到 $\pi^{-1}(U)$ 的光滑同胚，并且对于任意的 $p\in U_\alpha$，$y\in\mathbb{R}^q$ 有

$$\pi\circ\psi_\alpha(p,y)=p;$$

(2) 对于任意固定的 $p\in U_\alpha$，令

$$\psi_{\alpha,p}(y)=\psi_\alpha(p,y),\quad\forall y\in\mathbb{R}^q,$$

则映射 $\psi_{\alpha,p}:\mathbb{R}^q\to\pi^{-1}(p)$ 是同胚，而当 $p\in U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ 时，映射

$$g_{\beta\alpha}(p)=\psi_{\beta,p}^{-1}\circ\psi_{\alpha,p}:\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}^q$$

是线性同构，即 $g_{\beta\alpha}(p)\in\mathrm{GL}(q)$；

(3) 当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ 时，映射 $g_{\beta\alpha}:U_\alpha\cap U_\beta\to\mathrm{GL}(q)$ 是光滑的，

则称 (E,M,π) 为光滑流形 M 上秩为 q 的**向量丛**，其中 E 称为**丛空间**，M 称为**底流形**，映射 $\pi:E\to M$ 称为**丛投影**．为了方便，以后也把向量丛 (E,M,π) 记为 $\pi:E\to M$ 或 E．

易证，对于任意的 $p \in M$，在 $\pi^{-1}(p)$ 上具有自然的线性结构，使得映射 $\psi_{\alpha,p}: \mathbb{R}^q \to \pi^{-1}(p)$ 为线性同构. 以后把 $\pi^{-1}(p)$ 称为向量丛 E 在点 $p \in M$ 的 **纤维**, 也记为 E_p. 由此可见，向量丛

$$\pi: E \to M$$

是一簇 "栽种在" 光滑流形 M 上的 q 维向量空间. 定义 9.1 中的映射

$$\psi_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{R}^q \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

称为向量丛 E 的 **局部平凡化**.

根据定义 9.1, $\pi: TM \to M$ 是 M 上秩为 m 的向量丛，称为光滑流形 M 上的 **切向量丛**, 简称为 M 的 **切丛**.

例 9.1 设 $\pi: E \to M$ 是一个秩为 q 的向量丛， $U \subset M$ 为非空开集. 显然

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{p \in U} \pi^{-1}(p), \tag{9.7}$$

如果用 $\tilde{\pi}$ 表示 π 在 $\pi^{-1}(U)$ 上的限制，则

$$\pi^{-1}(U) = (\pi^{-1}(U), U, \tilde{\pi})$$

是开子流形 U 上的一个秩为 q 的向量丛 (证明留作练习). 称为向量丛 E 在开集 U 上的限制，并记作 $E|_U$.

定义 9.2 设 $\pi: E \to M$ 是光滑流形 M 上的向量丛， $U \subset M$ 为开集. 若有光滑映射 $s: U \to E$, 使得

$$\pi \circ s = \mathrm{id}: U \to U, \tag{9.8}$$

则称 s 为向量丛 (E, M, π) 的定义在 U 上的一个 **光滑截面**; 特别地，当 $U = M$ 时，则称 s 为向量丛 E 的一个光滑截面.

向量丛 $\pi: E \to M$ 的光滑截面的集合记为 $\Gamma(E)$. 不难验证，集合 $\Gamma(E)$ 是一个 $C^\infty(M)$-模，因而也是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间 (证明留给读者作为练习). 一般而言， $\Gamma(E)$ 作为实向量空间是无限维的.

根据定义，流形 M 上的光滑切向量场是切丛 TM 的光滑截面，反之亦然. 因此， $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$.

设 $\pi: E \to M$ 是光滑流形 M 上秩为 q 的向量丛， $U \subset M$. 如果存在 q 个局部光滑截面

$$s_\alpha \in \Gamma(U), \quad 1 \le \alpha \le q,$$

使得 $\{s_\alpha\}$ 是处处线性无关的，即对于任意的 $p \in U$, $\{s_\alpha(p)\}$ 构成向量空间 $\pi^{-1}(p)$ 的一个基底，则称 $\{s_\alpha\}$ 是向量丛 E 的 (定义在 U 上的) 一个 **局部标架场**; 特别地，当 $U = M$ 时，称 $\{s_\alpha\}$ 是大范围地定义在 M 上的标架场. 一般来说，向量丛的定义在整个底流形上的标架场未必是存在的；而局部标架场总是存在的. 事实上，先取 E 的一个局部平凡化

$$\psi: U \times \mathbb{R}^q \to \pi^{-1}(U),$$

用 $\{\delta_\alpha\}$ 表示 $\mathbb{R}^q$ 的一个基底，再令

$$s_\alpha(p) = \psi(p, \delta_\alpha), \quad 1 \le \alpha \le q, \quad \forall p \in U, \tag{9.9}$$

便可得到 q 个映射 $s_\alpha: U \to E$. 显然有,

$$\pi \circ s_\alpha = \mathrm{id}: U \to U, \quad 1 \le \alpha \le q,$$

即每一个 s_α 都是向量丛 E 的局部截面；并且 $\{s_\alpha\}$ 是定义在 U 上的一个局部标架场.

例 9.2 设 M, N 是光滑流形， $f: M \to N$ 是光滑映射. 令

$$f^*TN = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_{f(p)}N.$$

则 f^*TN 是 M 上秩为 $n = \dim N$ 的向量丛 (证明留作练习), 称为切丛 TN 通过映射 f 拉回到 M 上的向量丛. 拉回丛 f^*TN 的光滑截面称为在 N 中 **沿映射 f 定义的切向量场**.

例 9.3 向量丛的对偶丛.

设 $\pi: E \to M$ 是光滑流形 M 上秩为 q 的向量丛. 对于任意的 $p \in M$, 用 $E_p^* = (E_p)^*$ 表示 q 维实向量空间 E_p 的对偶空间, 并记

$$E^* = \bigcup_{p \in M} E_p^*.$$

再定义映射 $\tilde{\pi}: E^* \to M$, 使得 $\tilde{\pi}(\omega) = p\,(\forall \omega \in E_p^*)$, 于是

$$\tilde{\pi}^{-1}(p) = E_p^*.$$

假定 $\psi_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{R}^q \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ $(\alpha \in I)$ 是向量丛 (E, M, π) 的局部平凡化, 且 $\{U_\alpha;\ \alpha \in I\}$ 是 M 的一个开覆盖. 取定 $\mathbb{R}^q$ 的一个标准基底 $\delta = \{\delta_a;\ a = 1, \cdots, q\}$, 它的对偶基底记作 $\delta^* = \{\delta^a\}$. 对于任意的 $\alpha \in I$, 设 E 在 U_α 上的局部截面 $e_{\alpha,a}$ 由 $e_{\alpha,a} = \psi_\alpha(p, \delta_a)$ 确定. $\forall p \in U_\alpha$, 用 $\{e_\alpha^a(p)\}$ 表示 $\{e_{\alpha,a}(p)\}$ 在纤维 $\tilde{\pi}^{-1}(p)$ 中的对偶基底. 于是, 可以定义映射

$$\tilde{\psi}_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{R}^q \to \tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha),$$

使得

$$\tilde{\psi}_\alpha(p, y) = \sum_a y_a e_\alpha^a(p), \quad \forall p \in U_\alpha, \quad y = y_a \delta^a \in (\mathbb{R}^q)^* = \mathbb{R}^q.$$

类似于切丛的构造方法, 在 E^* 中可以引入微分结构, 使得 $E^* = (E^*, M, \tilde{\pi})$ 成为秩是 q 的向量丛, 而 $\{\tilde{\psi}_\alpha\}$ 就是它的局部平凡化. 具体的作法及相应的验证过程, 请读者自己来完成. 新构造出的向量丛 E^* 称为已知向量丛 E 的 **对偶丛**.

特别地, 光滑流形 M 的切丛 TM 的对偶丛 $(TM)^*$ 就是 M 上的所有余切向量构成的向量丛 (见本章习题第 72 题), 称为 M 的 **余切向量丛** 或 **余切丛**, 并记为 T^*M. T^*M 的 (局部) 标架场称为 **(局部) 余切标架场**.

显然, 对于任意的 $\sigma \in \Gamma(E)$ 和 $\omega \in \Gamma(E^*)$, 有光滑函数 $\langle \sigma, \omega \rangle \in C^\infty(M)$, 使得

$$\langle \sigma, \omega \rangle(p) = \langle \sigma(p), \omega(p) \rangle = \omega(p)(\sigma(p)), \quad \forall p \in M.$$

如此得到的映射 $\langle \cdot, \cdot \rangle: \Gamma(E) \times \Gamma(E^*) \to C^\infty(M)$ 称为向量丛 E 与其对偶丛 E^* 之间的配合.

设 U 是 M 的开子集, $\{e_a\}$ 和 $\{\omega^a\}$ 分别是秩为 q 的向量丛 E 及其对偶丛 E^* 的定义在 U 上的局部标架场, 如果

$$\langle e_a, \omega^b \rangle \equiv \delta_a^b = \begin{cases} 1, & a = b, \\ 0, & a \neq b; \end{cases} \qquad 1 \le a, b \le q,$$

则称 $\{\omega^a\}$ 是局部标架场 $\{e_a\}$ 在 E^* 上的 **对偶标架场**, 通常记为 $\{e^a\}$.

易知, 在例 9.3 中, 对于任意的 $\alpha \in I$, $\{e_\alpha^a\}$ 就是 E 上的局部标架场 $\{e_{\alpha,a}\}$ 的对偶标架场.

例 9.4 设 $\pi: E \to M$ 和 $\tilde{\pi}: \tilde{E} \to M$ 是光滑流形 M 上的两个向量丛, 它们的秩分别是 q 和 $\tilde{q}$. 则由 E 和 $\tilde{E}$ 可以构造 **向量丛的直和** $E \oplus \tilde{E}$ 和 **张量积** $E \otimes \tilde{E}$. 具体作法如下:

$\forall p \in M$, 向量丛 E 和 $\tilde{E}$ 在 p 点的纤维分别记为 E_p 和 $\tilde{E}_p$, 它们是两个实向量空间并且 $\dim E_p = q$, $\dim \tilde{E}_p = \tilde{q}$. 令

$$E \oplus \tilde{E} = \bigcup_{p \in M} E_p \oplus \tilde{E}_p; \quad E \otimes \tilde{E} = \bigcup_{p \in M} E_p \otimes \tilde{E}_p.$$

可以自然地引入投影映射

$$\pi_1: E \oplus \tilde{E} \to M \qquad \text{和} \qquad \pi_2: E \otimes \tilde{E} \to M,$$

以及相应的微分构造, 使得

$$(E \oplus \tilde{E}, M, \pi_1) \qquad \text{和} \qquad (E \otimes \tilde{E}, M, \pi_2)$$

分别成为秩是 $q+\tilde{q}$ 和 $q\tilde{q}$ 的向量丛，称为向量丛 E 和 $\tilde{E}$ 的直和及张量积. 细节留给读者作为练习.

特别地，光滑流形 M 的 r 个切丛 TM 和 s 个余切丛 T^*M 的张量积

$$T_s^r(M)=\underbrace{TM\otimes\cdots\otimes TM}_{r\text{ 个}}\otimes\underbrace{T^*M\otimes\cdots\otimes T^*M}_{s\text{ 个}}$$

是由 M 上在各点处的 (r,s) 型张量构成的集合，它是秩为 m^{r+s} 的向量丛，即有

$$T_s^r(M)=\bigcup_{p\in M}T_s^r(p),$$

其中

$$T_s^r(p)=\underbrace{T_pM\otimes\cdots\otimes T_pM}_{r\text{ 个}}\otimes\underbrace{T_p^*M\otimes\cdots\otimes T_p^*M}_{s\text{ 个}}$$

是流形 M 在一点 p 处的 (r,s) 型张量空间. 向量丛 $T_s^r(M)$ 称为光滑流形 M 上的 (r,s) 型**张量丛**，它的光滑截面就是 M 上的光滑张量场.

类似地，对于任意的 $p\in M$，若以 $\bigwedge^r T_p^*M$ 表示 M 在点 p 的 r 次外形式空间，并设

$$\bigwedge^r T^*M=\bigcup_{p\in M}\bigwedge^r T_p^*M,$$

则 $\bigwedge^r T^*M$ 也是一个向量丛，称为 M 上的 r 次**外形式丛**. 外形式丛的光滑截面是 M 上的外微分式，于是有 $\Gamma(\bigwedge^r T^*M)=A^r(M)$.

例 9.5　设 $\pi:E\to M$, $\tilde{\pi}:\tilde{E}\to M$ 是光滑流形 M 上的两个向量丛，秩分别是 $q,\tilde{q}$. 对于每一点 $p\in M$，用 $\mathscr{L}(E_p;\tilde{E}_p)$ 表示从向量空间 $E_p=\pi^{-1}(p)$ 到 $\tilde{E}_p=\tilde{\pi}^{-1}(p)$ 的线性映射的集合，它是 $q\tilde{q}$ 维向量空间. 则

$$\mathrm{Hom}(E,\tilde{E})=\bigcup_{p\in M}\mathscr{L}(E_p;\tilde{E}_p)$$

是光滑流形 M 上秩 $q\tilde{q}$ 为的向量丛.

设 U 是 M 的开子集，

$$\psi:U\times\mathbb{R}^q\to\pi^{-1}(U)\qquad\text{和}\qquad\tilde{\psi}:U\times\mathbb{R}^{\tilde{q}}\to\tilde{\pi}^{-1}(U)$$

分别是向量丛 $E,\tilde{E}$ 的局部平凡化. 用 $\{\delta_i\}$ 和 $\{\tilde{\delta}_\alpha\}$ 分别记 $\mathbb{R}^q$ 和 $\mathbb{R}^{\tilde{q}}$ 的标准基底. 命

$$s_i(p)=\psi(p,\delta_i),\quad\tilde{s}_\alpha(p)=\tilde{\psi}(p,\tilde{\delta}_\alpha),\quad\forall p\in U,$$

则 $\{s_i\},\{\tilde{s}_\alpha\}$ 分别是向量丛 $E,\tilde{E}$ 的定义在 U 上的标架场. 如果用 $M(q,\tilde{q})=\mathbb{R}^{q\tilde{q}}$ 表示 $q\times\tilde{q}$ 矩阵的集合，并且设 $\pi^*:\mathrm{Hom}(E,\tilde{E})\to M$ 是向量丛 $\mathrm{Hom}(E,\tilde{E})$ 的丛投影，则向量丛 $\mathrm{Hom}(E,\tilde{E})$ 的局部平凡化

$$\Psi:U\times M(q,\tilde{q})\to\pi^{*-1}(U)$$

由下式给出：

$$\Psi(p,A)(s_i(p))=\sum_{\alpha=1}^{\tilde{q}}A_i^\alpha\tilde{s}_\alpha(p),\quad\forall(p,A)\in U\times M(q,\tilde{q}).$$

请读者自己把向量丛 $\mathrm{Hom}(E,\tilde{E})$ 的转移函数族用向量丛 $E,\tilde{E}$ 的转移函数族表示出来.

作为本节的结尾，下面来定义向量丛上的度量结构.

定义 9.3　设 $\pi:E\to M$ 是光滑流形 M 上的一个向量丛. 如果对于每一点 $p\in M$，在纤维 $\pi^{-1}(p)$ 上指定了一个欧氏内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$，并且 $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ 光滑地依赖于点 p，则称 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是向量丛 (E,M,π) 上的一个**黎曼结构**. 指定了一个黎曼结构的向量丛称为**黎曼向量丛**.

在上述定义中，所谓内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$"光滑地依赖于点 p"是指：对于任意的局部光滑截面 $X,Y\in\Gamma(E|_U)$, $U\subset M$，由

$$\langle X,Y\rangle(p)=\langle X(p),Y(p)\rangle_p$$

确定的函数 (X,Y) 是 U 上的光滑函数. 特别地, 如果 $\{s_a\}$ 是向量丛 E 定义在开子集 $U\subset M$ 上的一个局部标架场, 并设

$$h_{ab}(p)=(s_a,s_b),\quad \forall p\in U,\quad 1\le a,b\le q,$$

则 $h_{ab}\in C^\infty(U)$, 而且 $q\times q$ 矩阵 (h_{ab}) 在 U 上是处处正定的对称矩阵.

习 题 一

1. 假定 $\mathscr{A}_0=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha);\ \alpha\in I\}$ 是 m 维流形 M 上的一个 C^r 相关的坐标覆盖, 即

(1) $\{U_\alpha;\ \alpha\in I\}$ 构成 M 的一个开覆盖;

(2) 属于 $\mathscr{A}_0$ 的任意两个坐标卡都是 C^r 相关的. 令

$$\mathscr{A}=\{(U,\varphi): M\text{的坐标卡, 且 }\forall(V,\psi)\in\mathscr{A}_0,\ (U,\varphi)\text{ 与 }(V,\psi)\text{ 是 }C^r\text{ 相关的}\}.$$

证明: $\mathscr{A}$ 是 M 上包含 $\mathscr{A}_0$ 的唯一的一个 C^r 微分结构.

2. 设 $(U,\varphi;x^i)$、$(V,\psi;y^i)$ 和 $(W,\chi;z^i)$ 是 m 维光滑流形 M 上的三个局部坐标系, 并且 $U\cap V\cap W\neq\emptyset$. 证明: 在 $\varphi(U\cap V\cap W)$ 上成立如下的链式法则:

$$\left(\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\right)=\left(\frac{\partial z^i}{\partial y^k}\right)\left(\frac{\partial y^k}{\partial x^j}\right);$$

$$\frac{\partial(z^1,\cdots,z^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}=\frac{\partial(z^1,\cdots,z^m)}{\partial(y^1,\cdots,y^m)}\cdot\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}.$$

由此说明, 局部坐标变换的 Jacobi 行列式恒不为零.

3. 设 M 是一个可定向的微分流形. 证明: 如果 M 是连通的, 则 M 恰有两个不同的定向.

4. 设 $a>0$, $S^n(a)=\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1};\ \sum\limits_{i=1}^{n+1}(x^i)^2=a^2\}$, $N=(0,\cdots,0,a)$, $S=(0,\cdots,0,-a)$ 分别为 $S^n(a)$ 的北极和南极. 令

$$U_+=S^n(a)\backslash\{S\},\quad U_-=S^n(a)\backslash\{N\}.$$

再分别定义映射 $\varphi_\pm:U_\pm\to\mathbb{R}^n$ 如下:

$$(\xi^1,\cdots,\xi^n)=\varphi_+(x^1,\cdots,x^{n+1})=\left(\frac{ax^1}{a+x^{n+1}},\cdots,\frac{ax^n}{a+x^{n+1}}\right),$$

$$(\eta^1,\cdots,\eta^n)=\varphi_-(x^1,\cdots,x^{n+1})=\left(\frac{ax^1}{a-x^{n+1}},\cdots,\frac{ax^n}{a-x^{n+1}}\right).$$

证明: φ_+ 和 φ_- 的逆映射分别由下式给出:

$$\begin{aligned}(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1})&=\varphi_+^{-1}(\xi^1,\cdots,\xi^n)\\&=\left(\frac{2a^2\xi^1}{a^2+\sum_j(\xi^j)^2},\cdots,\frac{2a^2\xi^n}{a^2+\sum_j(\xi^j)^2},\frac{a(a^2-\sum_j(\xi^j)^2)}{a^2+\sum_j(\xi^j)^2}\right),\\(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1})&=\varphi_-^{-1}(\eta^1,\cdots,\eta^n)\\&=\left(\frac{2a^2\eta^1}{a^2+\sum_j(\eta^j)^2},\cdots,\frac{2a^2\eta^n}{a^2+\sum_j(\eta^j)^2},\frac{a(\sum_j(\eta^j)^2-a^2)}{a^2+\sum_j(\eta^j)^2}\right).\end{aligned}$$

并由此说明, $\{(U_+,\varphi_+),(U_-,\varphi_-)\}$ 给出了 $S^n(a)$ 的一个光滑结构.

5. 设 S 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个非空子集. 如果对于任意的点 $p\in S$, 都有 p 在 $\mathbb{R}^3$ 中的一个邻域 U, 使得 $U\cap S$ 是某个光滑的正则参数曲面 $\boldsymbol{r}:D\to\mathbb{R}^3$ 的像集, 其中 D 是平面 $\mathbb{R}^2$ 的一个连通开集, 则称 S 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个**光滑曲面**.

(1) 证明: $\mathbb{R}^3$ 中每一个光滑曲面都是二维光滑流形;

(2) 利用 (1) 的结论证明: $\mathbb{R}^3$ 中的圆环面

$$(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2+z^2=r^2,\quad 0<r<R$$

是一个二维光滑流形.

6. 设 $\mathbb{C}^{n+1}=\{(z^1,\cdots,z^{n+1});\ z^i\in\mathbb{C},1\le i\le n+1\}$, $\mathbb{C}_*^{n+1}=\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$. 在 $\mathbb{C}_*^{n+1}$ 上引入等价关系 $\sim$ 如下：$\forall z=(z^1,\cdots,z^{n+1})$, $w=(w^1,\cdots w^{n+1})\in\mathbb{C}_*^{n+1}$, $z\sim w$ 当且仅当存在一个非零复数 λ, 使得 $w=\lambda z$, 即 $w^i=\lambda z^i(1\le i\le n+1)$; 用 $[z]$ 表示 $z\in\mathbb{C}_*^{n+1}$ 所在的等价类. 类似于实射影空间，令

$$\mathbb{C}P^n=\mathbb{C}_*^{n+1}/\sim=\{[z];\ z\in\mathbb{C}_*^{n+1}\}.$$

显然，$\mathbb{C}P^n$ 可以视为复向量空间 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的一维复子空间构成的集合，称为 n 维 **复射影空间**; 由 $z\mapsto\pi(z)=[z]$ 定义的映射 $\pi:\mathbb{C}_*^{n+1}\to\mathbb{C}P^n$ 称为自然投影.

(1) 试在 $\mathbb{C}P^n$ 上定义拓扑和微分结构, 使之成为 $2n$ 维光滑流形, 并且使得自然投影 $\pi:\mathbb{C}_*^{n+1}\to\mathbb{C}P^n$ 是光滑映射.

(2) 设 $S^{2n+1}=\{z\in\mathbb{C}_*^{n+1};\ |z|^2=\sum\limits_i|z^i|^2=1\}$, 则 S^{2n+1} 是 $\mathbb{C}^{n+1}=\mathbb{R}^{2n+2}$ 中的单位球面. 定义映射 $\tilde\pi=\pi|_{S^{2n+1}}:S^{2n+1}\to\mathbb{C}P^n$. 证明：映射 $\tilde\pi$ 是一个淹没，并且

$$\tilde\pi^{-1}([z])=S^{2n+1}\cap[z]=\{e^{\sqrt{-1}\theta}z;\ \theta\in[0,2\pi]\}$$

是 S^{2n+1} 中的大圆. 映射 $\tilde\pi:S^{2n+1}\to\mathbb{C}P^n$ 也称为自然投影.

7. 假设映射 $\sigma:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 的定义为：

$$\sigma(x^1,x^2,x^3)=(x^1\sin x^3+x^2\cos x^3,x^1\cos x^3-x^2\sin x^3,x^3).$$

证明：σ 在单位球面 S^2 上的限制给出了 S^2 到其自身的一个光滑同胚.

8. 试证明如下的 **反函数定理**: 设 $U\subset\mathbb{R}^m$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 的开子集，$f:U\to\mathbb{R}^m$ 是光滑映射，$a\in U$. 如果 $\operatorname{rank}_a(f)=m$, 则有 $\mathbb{R}^m$ 在 a 点的开邻域 $V\subset U$, 使得 f 在 V 上的限制 $f|_V$ 是从 V 到 $f(V)\subset\mathbb{R}^m$ 的光滑同胚，并且其逆映射 $g=(f|_V)^{-1}:f(V)\to V$ 的 Jacobi 矩阵 $J(g)$ 由下式确定：

$$J(g)(y)=(J(f|_V)(x))^{-1},\quad\forall x\in V,$$

其中 $y=f(x)\in f(V)$, $J(f|_V)$ 是映射 $f|_V$ 的 Jacobi 矩阵.

9. 试把上述反函数定理推广到光滑流形上去，即证明：

(流形上的反函数定理) 设 M,N 是 m 维光滑流形，$f:M\to N$ 是光滑映射，$p\in M$. 如果 f 在 p 点的秩 $\operatorname{rank}_p(f)=m$, 则存在点 p 在 M 中的开邻域 U, 使得

$$f|_U:U\to f(U)\subset N$$

是光滑同胚.

10. 利用反函数定理证明映射的秩定理 (即定理 2.1).

11. 证明：对于两个给定点 $x,y\in\mathbb{R}$, 必有开区间 (a,b) 及光滑同胚 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得 $x,y\in(a,b)$, $f(x)=y$, 并且 f 在 $\mathbb{R}\backslash(a,b)$ 上的限制为恒同映射. 试把上述结论推广到一般的欧氏空间 $\mathbb{R}^m\ (m\ge1)$.

12. 设 M 是一个连通的 m 维光滑流形. 证明：对于两个任意给定的两个点 $p,q\in M$, 存在光滑同胚 $f:M\to M$, 使得 $f(p)=q$.

13. 证明：一维复射影空间 $\mathbb{C}P^1$ 微分同胚于二维球面，即 $\mathbb{C}P^1=S^2$.

14. 设 U 是光滑流形 M 的非空开子集，$\delta>0$, $f:(-\delta,\delta)\times U\to\mathbb{R}$ 是光滑映射，满足条件

$$f(0,p)=0,\quad\forall p\in U.$$

证明：存在光滑映射 $g:(-\delta,\delta)\times U\to\mathbb{R}$, 使得

$$f(t,p)=tg(t,p),\quad g(0,p)=\left.\frac{\partial f(t,p)}{\partial t}\right|_{t=0},\quad\forall(t,p)\in(-\delta,\delta)\times U.$$

15. 设 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A}'$ 是 Hausdorff 空间 M 上的两个 C^∞ 结构，$C^\infty(M)$ 和 $C'^\infty(M)$ 分别是 $(M,\mathscr{A})$ 和 $(M,\mathscr{A}')$ 上光滑函数的集合. 证明：$\mathscr{A}=\mathscr{A}'$ 当且仅当 $C^\infty(M)=C'^\infty(M)$.

16. 证明引理 3.1 和引理 3.2.

17. 设 M 是满足第二可数公理的微分流形，A,B 是 M 的两个不相交的闭子集. 证明：存在 $F\in C^\infty(M)$, 使得 $F|_A\equiv1$, $F|_B\equiv0$.

18. 设 M_1, M_2 是光滑流形, $M = M_1 \times M_2$, $(p,q) \in M$. 设 $\pi_i : M \to M_i (i = 1,2)$ 是自然投影, 定义映射 $\alpha_i : M_i \to M(i = 1,2)$, 使得

$$\alpha_1(x) = (x,q), \ \forall x \in M_1; \quad \alpha_2(y) = (p,y), \ \forall y \in M_2.$$

显然有 $\pi_i \circ \alpha_i = \mathrm{id}_{M_i} : M_i \to M_i$, $i = 1,2$. 证明: α_1 和 α_2 都是嵌入, 并且 $T_{(p,q)}M = (\alpha_1)_{*p}(T_pM_1) \oplus (\alpha_2)_{*q}(T_qM_2)$. 后者同构于直和 $T_pM_1 \oplus T_qM_2$.

19. 设 M, N 是光滑流形, 并且 M 是连通的; $f : M \to N$ 是光滑映射. 证明: 如果对于任意的点 $p \in M$, 都有 $f_{*p} = 0$, 则 f 是常值映射.

20. 设映射 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的定义是

$$y_1 = x_1 e^{x_2} + x_2, \quad y_2 = x_1 e^{x_2} - x_2, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

证明 f 是光滑同胚, 并求切映射 f_* 和余切映射 f^* 在自然标架场下的矩阵.

21. 设 $f : S \to M$, $g : M \to N$ 是光滑流形 S, M, N 之间的光滑映射, 证明:

(1) $(g \circ f)_{*p} = g_{*f(p)} \circ f_{*p} : T_pS \to T_{g\circ f(p)}N$, $\forall p \in S$;

(2) $(g \circ f)^*_p = f^*_p \circ g^*_{f(p)} : T^*_{g\circ f(p)}N \to T^*_pS$, $\forall p \in S$.

22. 设映射 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 和 $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ 的定义分别为

$$f(x_1, x_2) = (e^{2x_1+x_2}, 3x_2 - \cos x_1, x_1^2 + x_2 + 2), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$g(y_1, y_2, y_3) = (3y_1 + 2y_2 + y_3^2, y_1^2 - y_3 + 1), \quad \forall (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

令 $F = g \circ f$, $G = f \circ g$, 求 F_{*0} 和 G_{*0}.

23. 设 $f : M \to N$ 是淹没, 证明 f 是开映射.

24. 设 M 是 m 维紧致光滑流形, $f : M \to \mathbb{R}^m$ 是光滑映射. 证明: 在 M 上至少存在一点 p, 使得 f 在 p 点的秩小于 m.

25. 证明: 一个浸入子流形 $M \subset N$ 是嵌入子流形的充分必要条件是对于任意一点 $p \in M$, 存在 p 在 N 中的局部坐标系 $(\tilde{U}; \tilde{x}^A)$, 满足 $\tilde{x}^A(p) = 0 (1 \leq A \leq n)$, 并且

$$\tilde{U} \cap M = \{q \in \tilde{U};\ \tilde{x}^\alpha(q) = 0,\ m+1 \leq \alpha \leq n\},$$

其中 $m = \dim M$, $n = \dim N$. 显然, 如果令 $U = \tilde{U} \cap M$, $x^i = \tilde{x}^i|_U (1 \leq i \leq m)$, 则 $(U; x^i)$ 是 p 在 M 中的局部坐标系. 我们把局部坐标系 $(\tilde{U}; \tilde{x}^A)$ 或 $(U; x^i)$ 称为嵌入子流形 M 在点 p 的**典型 (局部) 坐标系**.

26. 设 M_1 和 M_2 分别是 m_1, m_2 维光滑流形, 对应的微分结构分别为 $\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{A}_2$. 令 $M = M_1 \times M_2$, $m = m_1 + m_2$.

(1) 假设 $\mathscr{A}_0 = \{(U \times V, \varphi \times \psi);\ (U, \varphi) \in \mathscr{A}_1, (V, \psi) \in \mathscr{A}_2\}$, 其中 $\varphi \times \psi : U \times V \to \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$ 的定义为

$$(\varphi \times \psi)(p_1, p_2) = (\varphi(p_1), \psi(p_2)), \quad \forall (p_1, p_2) \in U \times V.$$

证明: $\mathscr{A}_0$ 在 M 上确定了一个光滑结构, 使得 M 成为 m 维光滑流形. 此时称 M 为光滑流形 M_1 和 M_2 的**乘积流形**, 简称为 M_1, M_2 的**直积**.

(2) 设 $\pi_\alpha : M_1 \times M_2 \to M_\alpha$, $\alpha = 1,2$, 为自然投影, 证明 π_1 和 π_2 都是光滑映射.

(3) 仿照 (1) 的做法引入 n 个光滑流形的乘积流形. 设

$$T^n = \{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n;\ |z_i| = 1,\ 1 \leq i \leq n\}.$$

试在 T^n 上引入一个微分结构, 使得 T^n 成为 $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ 的 n 维嵌入子流形并且微分同胚于 n 个圆周的直积, 即

$$T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\ 个}.$$

此时, 称光滑流形 T^n 为 n 维**环面**.

27. 设 $f: M \to N$ 是光滑流形之间的光滑映射，A, B 分别是 M 和 N 的嵌入子流形. 证明：如果 $f(A) \subset B$, 则 $f|_A: A \to B$ 也是光滑映射.

28. 设 $F: M \to N$ 是光滑流形之间的光滑映射. 证明：如果 F 的秩 $\operatorname{rank}(F)$ 为常值，则对于任意的点 $q \in N$, $F^{-1}(q)$ 是 M 的嵌入子流形，并且

$$\dim F^{-1}(q) = \dim M - \operatorname{rank}(F).$$

29. 试利用映射秩定理证明定理 4.4.

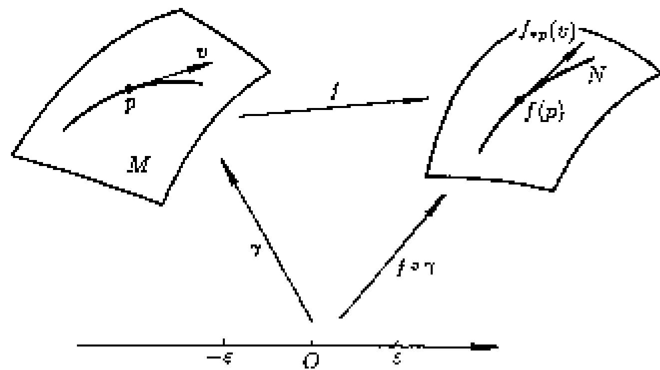
30. 设 $\varphi: M \to N$ 是嵌入子流形，并且 $\varphi(M)$ 是 N 中的闭集. 证明：对于任意的 $g \in C^\infty(M)$, 必存在 $f \in C^\infty(N)$, 使得 $f \circ \varphi = g$.

31. 设 $\varphi: M \to N$ 是单浸入，并且 $\dim M = \dim N$. 证明：将 M 的微分结构通过 φ 移植到 $\varphi(M)$ 之后，$\varphi(M)$ 是 N 的开子流形.

32. 设 $f: M \to N$ 是光滑映射，$p \in M$, $v \in T_pM$. 假定

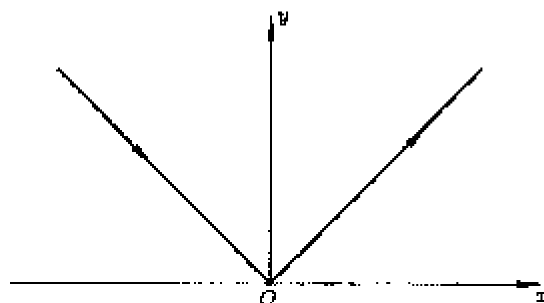
$$\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

是 M 中的光滑曲线，满足条件 $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. 证明：切向量 $(f \circ \gamma)'(0) \in T_{f(p)}N$ 与曲线 γ 的选取无关，且有 $f_{*p}(v) = (f \circ \gamma)'(0)$ (见图). 这个习题给出了光滑映射的切映射的一种直观解释.

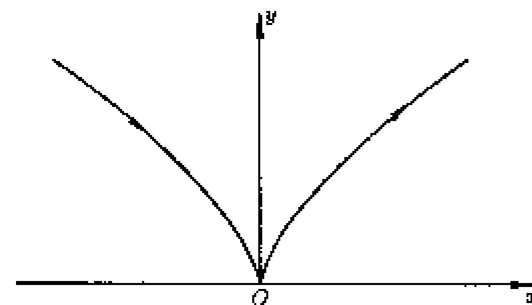


第 32 题图

33. 设映射 $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 由 $\alpha(t) = (t, |t|)$ 定义. 试说明 α 在 $t = 0$ 点处不可微 (见图).



第 33 题图



第 34 题图

34. 试说明：由 $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ 给出的映射 $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 是光滑映射，但不是浸入 (见图).

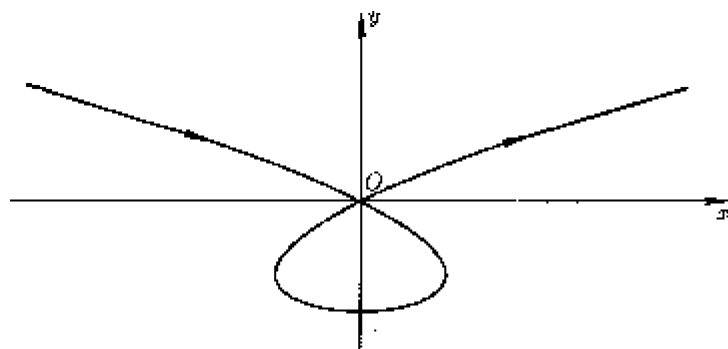
35. 证明：曲线 $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ (见图) 是浸入但不是嵌入.

36. 设 ε 充分小，定义映射 $\alpha: (0, 3) \to \mathbb{R}^2$ 如下 (见图):

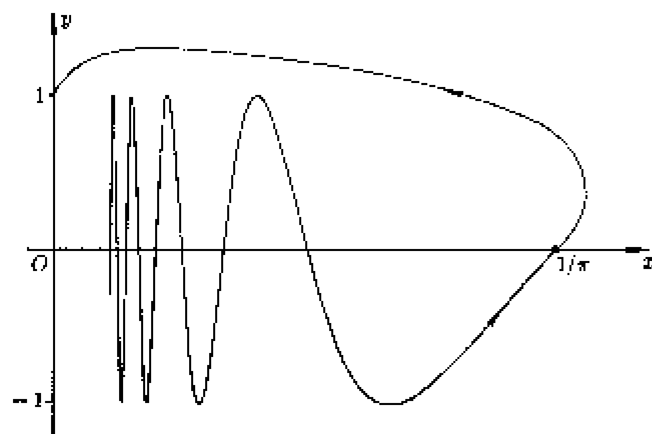
$$\alpha(t) = \begin{cases} \left(t, \sin \dfrac{1}{t}\right), & 0 < t \le \dfrac{1}{\pi}, \\ \beta(t), & \dfrac{1}{\pi} - \varepsilon < t < 1 + \varepsilon, \\ (0, t - 2), & 1 \le t < 3, \end{cases}$$

其中 $\beta(t)$ 是一条没有自交点、同时也不与 α 的其余部分相交的正则

曲线 (即 $\beta'(t)$ 处处不为零), 并且当 $t \in (\frac{1}{\pi} - \epsilon, \frac{1}{\pi})$ 时, $\beta(t) = (t, \sin\frac{1}{t})$, 当 $t \in (1, 1+\varepsilon)$ 时, $\beta(t) = (0, t-2)$. 证明: α 是单浸入, 但不是嵌入.



第 35 题图



第 36 题图

37. 设 V 是 m 维实向量空间, $L(V)$ 表示 V 的基底构成的集合. 对于任意的 $\delta = \{\delta_i\}, \tilde{\delta} = \{\tilde{\delta}_i\} \in L(V)$, 存在唯一的一个 m 阶方阵 $a = (a_j^i) \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$, 使得 $\tilde{\delta}_i = \sum_j a_i^j \delta_j$, 即 $\tilde{\delta} = \delta \cdot a$. 矩阵 a 称为从基底 δ 到基底 $\tilde{\delta}$ 的 **过渡矩阵**. 在 $L(V)$ 中可以引入等价关系 $\sim$, 使得

$$\tilde{\delta} \sim \delta \Longleftrightarrow \text{从 } \delta \text{ 到 } \tilde{\delta} \text{ 的过渡矩阵 } a \text{ 满足 } \det(a) > 0.$$

把基底 δ 所在的等价类记为 $[\delta]$. 把商集 $QL(V) = L(V)/\sim$ 中的元素称为向量空间 V 的 **定向**. 证明: V 有且只有两个定向.

38. m 维光滑流形 M 上的一个 **定向分布** 指的是一个映射

$$\mu : M \to QL(M) = \bigcup_{p \in M} QL(T_pM),$$

使得对于任意的 $p \in M$, $\mu(p) \in QL(T_pM)$. M 上的一个定向分布 μ 称为 **连续的**, 如果对于任意的点 $p \in M$, 存在 p 点的局部坐标系 $(U; x^i)$, 使得

$$\mu(q) = \left[\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_q, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^m}\right|_q \right], \quad \forall q \in U.$$

证明: 光滑流形 M 是可定向的当且仅当在 M 上存在一个连续的定向分布.

39. 设 U 是 m 维光滑流形 M 的一个开子集, $X \in \mathfrak{X}(U)$. 证明: 在任意一点 $p \in U$, 必有 p 的一个开邻域 $V \subset U$, 以及光滑向量场 $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$, 使得 $\tilde{X}|_V = X|_V$.

40. 设 X 是光滑流形 M 上的一个切向量场. 证明: $X \in \mathfrak{X}(M)$ 是光滑切向量场的充分必要条件是对于任意的 $f \in C^\infty(M)$, 由

$$(X(f))(p) = X(p)f, \quad \forall p \in M$$

定义的函数 $X(f)$ 是 M 上的光滑函数.

41. 设 $f : M \to N$ 是光滑同胚. 对于任意的 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 定义映射 $f_*X : C^\infty(N) \to C^\infty(N)$ 如下:

$$(f_*X)(g) = X(g \circ f) \circ f^{-1}, \quad \forall g \in C^\infty(N).$$

证明:

(1) f_*X 是 N 上的光滑切向量场，并且 f_*X 与 X 是 f-相关的，即对于任意的 $p \in M$，

$$f_{*p}(X(p)) = (f_*X)(f(p));$$

(2) 对于任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$，$f_*([X,Y]) = [f_*X, f_*Y]$.

42. 证明定理 5.2.

43. 设 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 是一般线性群 (参见例 1.2). 定义

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R});\ \det A = 1\};$$
$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R});\ A \cdot A^t = I_n\};$$
$$\mathrm{SO}(n) = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(n),$$

其中 A^t 表示矩阵的转置，I_n 是 n 阶单位矩阵. 利用本章习题第 27 和第 28 题的结论证明：$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$ 和 $\mathrm{SO}(n)$ 都是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的嵌入子流形；它们分别称为 **特殊线性群**、**正交群** 和 **特殊正交群**.

44. 设 G 是一个抽象群，并且是 m 维光滑流形. 如果 G 的乘法运算和求逆运算分别作为 $G \times G$ 和 G 到 G 的映射是光滑的，则称 G 是一个 m 维 **李群 (Lie 群)**.

(1) 对于任意的 $a \in G$，定义 G 到自身的映射 L_a、R_a 如下：

$$L_a(g) = a \cdot g, \quad R_a(g) = g \cdot a, \quad \forall g \in G.$$

证明：L_a 和 R_a 都是光滑同胚，并且对于任意的 $a, b \in G$，

$$L_a \circ R_b = R_b \circ L_a.$$

映射 L_a，R_a 以及 $\mathrm{ad}(a) = L_a \circ R_{a^{-1}} (\forall a \in G)$ 分别称为李群 G 上的 **左移动**、**右移动** 和 **内自同构**.

(2) 设 $X \in \mathfrak{X}(G)$. 如果对于任意的 $a \in G$，都有 $(L_a)_*X = X$，则称 X 是 G 上的 **左不变向量场**. 证明：G 上的左不变向量场的集合 $\mathfrak{g}$ 关于通常的线性运算以及 Poisson 括号积 $[\cdot,\cdot]$ 构成一个李代数 (参看定理 5.2 后面的注记). 它称为李群 G 的 **李代数(Lie 代数)**.

(3) 假定 e 是 G 的单位元素，试在 T_eG 上引入一种乘法 (也记为 $[\cdot,\cdot]$)，使得 $(T_eG, [\cdot,\cdot])$ 成为一个李代数，即满足定理 5.2 中的条件 (1)~(4)，并且同构于 $\mathfrak{g}$. 由此可见，

$$\dim \mathfrak{g} = \dim T_eG = \dim G.$$

(4) 证明：例 1.2 和本章习题第 43 题中定义的 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$，$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$、$\mathrm{O}(n)$ 和 $\mathrm{SO}(n)$ 都是李群；分别求出它们的李代数和维数.

45. 设 H, G 都是李群，$f: H \to G$ 是光滑映射. 如果 f 同时还是抽象群 H 到 G 的同态，则称 $f: H \to G$ 是一个 **李群同态**；特别地，如果进一步要求映射 $f: H \to G$ 是光滑同胚，则称 f 是从 H 到 G 的 **李群同构**. 设 $H = \mathbb{R}$ 是实数加法群，则称李群同态 $f: \mathbb{R} \to G$ 是 G 上的一个 **单参数子群**. 设 $\mathfrak{g}$ 是李群 G 的李代数 (参看本章习题第 44 题)，它也可以等同于 G 在单位元 e 处的切空间 T_eG.

(1) 设 $X \in \mathfrak{g}$，证明：存在唯一的一个单参数子群 $\sigma_X: \mathbb{R} \to G$，使得对于任意的 $t \in \mathbb{R}$，

$$(\sigma_X)_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = X_{\sigma_X(t)}.$$

显然，此时 σ_X 是切向量场 X 在 G 上通过单位元 e 的积分曲线.

(2) 对于任意的 $g \in G$，用 $\varphi_g(t)$ 表示 X 的通过 g 点的积分曲线，即 $\varphi(0) = g$, $\varphi_g'(0) = X_g$，证明：

$$\varphi_g(t) = R_{\sigma_X(t)}(g) = g \cdot \sigma_X(t).$$

(3) 设 $X \in \mathfrak{g}$，a_t 是 $\sigma_X(t)$ 确定的内自同构，即

$$a_t = L_{\sigma_X(t)} \circ R_{\sigma_X(-t)}.$$

由 X 可以定义一个映射 $\mathrm{ad}(X): \mathfrak{g} \to T_eG = \mathfrak{g}$，使得

$$\mathrm{ad}(X)(Y) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} ((a_t)_*(Y)) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} ((L_{\sigma(t)})_*(R_{\sigma(-t)})_*(Y)).$$

证明：上面定义的映射 $\mathrm{ad}(X)$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 到其自身的同态，称为李代数 $\mathfrak{g}$ 的**伴随表示**.

(4) 证明：对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}(X)(Y)=[X,Y]$.

46. 设 H,G 都是李群，$H\subset G$. 如果 H 是 G 的子群，并且包含映射 $i:H\to G$ 是光滑浸入，则称 H 是李群 G 的**李子群** (**Lie 子群**). 证明：本章习题第 43 题中定义的 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$ 和 $\mathrm{SL}(n)$ 都是一般线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的李子群.

47. 在 $\mathbb{R}^3$ 中定义三个光滑向量场如下：

$$X=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y};\quad Y=z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z};\quad Z=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}.$$

求 $[X,Y]$, $[Y,Z]$ 和 $[Z,X]$.

48. 设 M 是光滑流形，$p\in M$, $X\in\mathfrak{X}(M)$ 并且满足 $X_p\neq 0$. 证明：存在点 p 的局部坐标系 $(U;x^i)$, 使得 $X|_U=\dfrac{\partial}{\partial x^1}$. 由此说明，对于任意的 $f\in C^\infty(M)$, 微分方程 $Xu=f$ 在 p 点附近有解 u. 写出 u 的表达式.

49. 设 X,Y 是光滑流形 M 上的两个光滑切向量场，$p_0\in M$, $X_{p_0}\neq 0$, $Y_{p_0}\neq 0$. 假设 p 是 M 上靠近 p_0 的点，$s,t\in\mathbb{R}$ 充分小，$\varphi(s,p)$ 和 $\psi(t,p)$ 分别表示 X,Y 的通过点 p 的积分曲线，即有

$$\begin{aligned}&\varphi(0,p)=p,\qquad \varphi'(s,p)=X(\varphi(s,p));\\&\psi(0,p)=p,\qquad \psi'(t,p)=Y(\psi(t,p)).\end{aligned}$$

令

$$\gamma(t)=\psi(-\sqrt{t},\varphi(-\sqrt{t},\psi(\sqrt{t},\varphi(\sqrt{t},p_0)))).$$

证明：$[X,Y]_{p_0}=\lim\limits_{t\to+0}\gamma'(t)$.

50. 设 τ 是 m 维光滑流形 M 上的一个 (r,s) 型光滑张量场. 试详细证明：

(1) 对于任意的 $\alpha^\lambda\in A^1(M)$, $1\le\lambda\le r$, 与 $X_\mu\in\mathfrak{X}(M)$, $1\le\mu\le s$, 由 (6.3) 式定义的函数 $\tau(\alpha^1,\cdots,\alpha^r,X_1,\cdots,X_s):M\to\mathbb{R}$ 是光滑的；

(2) 由 (6.3) 式定义的映射 (6.2) 是多重 $C^\infty(M)$-线性的，即 (6.4) 与 (6.5) 成立.

51. 设 M 是光滑流形，$\varphi:\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ 是 $C^\infty(M)$-线性映射. 证明：在 M 上存在唯一的一个 (1,1) 型光滑张量场 $\tilde\varphi$, 使得

$$\tilde\varphi(\alpha,X)=\alpha(\varphi(X)),\quad \forall\alpha\in A^1(M),\quad X\in\mathfrak{X}(M).$$

(本题可以作为定理 6.1 的推论. 不要套用定理 6.1, 请按照定理 5.1 的证法直接证明.)

52. 设 M 与映射 φ 同本章习题第 51 题. 对于任意的 $X\in\mathfrak{X}(M)$, 定义

$$(\mathscr{L}_X\varphi)(Y)=[X,\varphi(Y)]-\varphi([X,Y]),\quad \forall Y\in\mathfrak{X}(M).$$

证明：映射 $\mathscr{L}_X\varphi:\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ 是 $C^\infty(M)$-线性的，即 $\mathscr{L}_X\varphi$ 是一个 (1,1) 型的光滑张量场.

53. 证明定理 7.3.

54. 设 M 是光滑流形，$X\in\mathfrak{X}(M)$. 对于任意的 $\varphi\in A^r(M)$, 定义映射

$$i(X)\varphi:\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)}_{r-1\text{个}}\to C^\infty(M)$$

如下：

$$\begin{gathered}(i(X)\varphi)(X_1,\cdots,X_{r-1})=\varphi(X,X_1,\cdots,X_{r-1}),\\ \forall X_1,\cdots,X_{r-1}\in\mathfrak{X}(M).\end{gathered}$$

证明：

(1) 对于每一个 $\varphi\in A^r(M)$, $i(X)\varphi\in A^{r-1}(M)$;

(2) 映射 $i(X):A^r(M)\to A^{r-1}(M)$ 是 $C^\infty(M)$-线性的；

(3) $i(X)(\varphi\wedge\psi)=(i(X)\varphi)\wedge\psi+(-1)^r\varphi\wedge(i(X)\psi)$, 其中 $\varphi\in A^r(M)$, $\psi\in A^s(M)$. $i(X)\varphi$ 称为 X 与 φ 的**内乘**.

55. 设 $f: M \to N$ 是光滑映射，d_M 和 d_N 分别是 M 和 N 上的外微分算子，$r \geq 0$, $\varphi \in A^r(N)$. 当 $r = 0$ 时，即当 $\varphi \in C^\infty(N)$ 时，令 $f^*\varphi = \varphi \circ f$; 当 $r > 0$ 时，定义映射

$$f^*\varphi : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{r\text{个}} \to C^\infty(M),$$

使得

$$(f^*\varphi)(X_1, \cdots, X_r) = \varphi(f_*(X_1), \cdots, f_*(X_r)),$$
$$\forall X_1, \cdots, X_r \in \mathfrak{X}(M).$$

证明：

(1) 对于任意的 $\varphi \in A^r(N)$, $f^*\varphi \in A^r(M)$, 由此确定的映射 $f^*: A^r(N) \to A^r(M)$ 是线性的，称为光滑映射 f 的**诱导映射**或**拉回映射**;

(2) 对于任意的 $\varphi, \psi \in A^r(N)$, $f^*(\varphi \wedge \psi) = f^*\varphi \wedge f^*\psi$;

(3) $f^* \circ \mathrm{d}_N = \mathrm{d}_M \circ f^*$.

56. 设 $\omega = xy\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y - yz\mathrm{d}z$, $\eta = x\mathrm{d}x - yz^2\mathrm{d}y - 2x\mathrm{d}z$, 并且设映射 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 的定义如下：

$$f(u, v) = (uv, u^2, 3u + v), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

试求：(1) $\mathrm{d}\omega$; (2) $\mathrm{d}\eta$; (3) $\mathrm{d}\omega \wedge \eta - \omega \wedge \mathrm{d}\eta$; (4) $f^*\omega$ 和 $f^*(\mathrm{d}\omega)$.

57. 设 M 是满足第二可数公理的 m 维光滑流形.

(1) 证明：M 是可定向的当且仅当在 M 上存在一个处处不为零的 m 次外微分形式.

(2) 利用 (1) 的结论说明，每一个连通的李群都是可定向的.

58. 设 U 是 m 维光滑流形 M 的非空开子集，$\omega \in A^r(U)$. 证明：对于任意的 $p \in U$, 存在 p 点的开邻域 $V \subset U$, 以及 r 次外微分式 $\tilde{\omega} \in A^r(M)$, 使得 $\tilde{\omega}|_V = \omega|_V$.

59. 设 p 是光滑流形 M 上的一点，试举例说明：在 M 上存在 r 次外微分式 ω 满足 $\omega(p) = 0$, 但是 $\mathrm{d}\omega(p) \neq 0$, 其中 $0 \leq r < \dim M$.

60. 设 $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\omega = (x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)/(x^2 + y^2)$. 证明：$\omega$ 是定义在 U 上的恰当微分式，因而也是 U 上的闭微分式.

61. 设 $\omega = A\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + C\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的外微分式，且 $\mathrm{d}\omega = 0$. 令

$$\alpha = (y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}y)\int_0^1 tA(tx, ty, tz)\mathrm{d}t + (z\mathrm{d}x - x\mathrm{d}z)\int_0^1 tB(tx, ty, tz)\mathrm{d}t$$
$$+ (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)\int_0^1 tC(tx, ty, tz)\mathrm{d}t.$$

直接验证：$\mathrm{d}\alpha = \omega$, 因而 ω 是恰当微分式.

62. 在 $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 上设

$$\omega = \frac{x}{r^3}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 设 $r_0 > 0$, 证明：

$$\int_{S^2(r_0)} \omega = 4\pi.$$

63. 设 $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, m 是正整数. 考虑 U 上的 $n-1$ 次外微分式

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n,$$

其中 $f_i = x^i/\|x\|^m$, $\|x\|^m = \left(\sum_{i=1}^n (x^i)^2\right)^{m/2}$.

(1) 求 $\mathrm{d}\omega$;

(2) 确定 m 的值，使得 ω 成为闭微分式;

(3) 在 ω 是闭微分式的情况下，证明它不是恰当微分式.

64. 证明：

(1) 若 α, β 是闭微分式，则 $\alpha \wedge \beta$ 也是闭微分式;

(2) 若 α 是闭微分式，β 是恰当微分式，则 $\alpha \wedge \beta$ 是恰当微分式.

65. 设 ω 是光滑流形 M 上的一个 2 次外微分式. 如果对于任意的 $p\in M$, 以及任意的 $v\in T_pM$, $\omega(v,w)$ 关于所有的 $w\in T_pM$ 恒等于零当且仅当 $v=0$, 则称 ω 是 **非退化的**. 证明: 如果 ω 是非退化的, 则在每一点 $p\in M$, 都存在自然同构 $I:T_pM\to T_p^*M$, 使得对于任意的 $v\in T_pM$, 成立

$$(I(v))(w)=\omega(v,w),\quad \forall w\in T_pM.$$

66. 如果在一个 $2n$ 维光滑流形 M 上指定一个非退化的 2 次闭微分式 ω, 则称 (M,ω) 为 **辛流形**; 此时, ω 称为 M 上的 **辛结构**. 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中取直角坐标系为 $(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n)$, 并设

$$\omega=\sum_{i=1}^n \mathrm{d}x^i\wedge \mathrm{d}y^i.$$

验证 $(\mathbb{R}^{2n},\omega)$ 是一个辛流形.

67. 设 M 是 m 维光滑流形, TM 是 M 上的切丛. 证明: TM 是可定向的光滑流形.

68. 设 $\pi:E\to M$ 是光滑流形 M 上的一个向量丛, 证明: 光滑截面的集合 $\Gamma(E)$ 是一个 $C^\infty(M)$-模 (即环 $C^\infty(M)$ 上的向量空间), 因而也是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间.

69. 设 TM 为光滑流形 M 的切丛. 证明: TM 的光滑截面是 M 上的光滑切向量场, 反之亦然.

70. 证明例 9.2 的结论, 即对于光滑映射 $f:M\to N$, 拉回丛 f^*TN 是 M 上秩为 $\dim N$ 的向量丛.

71. 证明: 在例 9.3 中构造的集合 E^* 上具有自然的微分结构, 使得 $\tilde\pi:E^*\to M$ 是光滑映射, 并且 $\{\tilde\psi_\alpha;\ \alpha\in I\}$ 满足向量丛的局部平凡化条件, 因而 E^* 是一个秩为 q 的向量丛.

72. 设 M 是 m 维光滑流形, 令 $T^*M=\bigcup\limits_{p\in M}T_p^*M$. 定义映射 $\tilde\pi:T^*M\to M$, 使得对于任意的 $\alpha\in T_p^*M$, $\tilde\pi(\alpha)=p$. 试给出 T^*M 的光滑结构, 使得 $\tilde\pi:T^*M\to M$ 成为 M 上的向量丛 (即 M 上的余切丛). 证明: 余切丛 $\tilde\pi:T^*M\to M$ 与切丛 $\pi:TM\to M$ 是互为对偶的向量丛.

73. 验证例 9.4 中所引入的直和 $E\oplus\tilde E$ 和张量积 $E\otimes\tilde E$ 分别是秩为 $q+\tilde q$ 和 $q\tilde q$ 的向量丛.

74. 具体地构造流形 M 上的 r 次外形式丛 $\bigwedge^r T^*M$.

75. 设 M_1 和 M_2 是光滑流形, $M=M_1\times M_2$, $\pi_i:M\to M_i$ 是从 M 到 M_i 的投影. 证明: 向量丛 TM 和 $\pi_1^*(TM_1)\oplus\pi_2^*(TM_2)$ 同构, 即存在光滑同胚 $\Phi:TM\to\pi_1^*(TM_1)\oplus\pi_2^*(TM_2)$, 使得 $\tilde\pi\circ\Phi=\pi$, 同时对于任意的 $(p,q)\in M$, $\Phi|_{\pi^{-1}(p)}:\pi^{-1}(p)\to\tilde\pi^{-1}(f(p))$ 是线性同构, 其中 $\pi:TM\to M$ 和 $\tilde\pi:\pi_1^*(TM_1)\oplus\pi_2^*(TM_2)\to M$ 是丛投影.

76. 证明: 在光滑流形 M 的余切丛 T^*M 上存在一个处处非退化的 2 次闭微分式 ω, 因而 (T^*M,ω) 是一个辛流形.

77. 设 M 是 m 维光滑流形, $\forall p\in M$, 用 $L(p)$ 表示切空间 T_pM 上全体线性变换的集合. 令

$$L(M)=\bigcup_{p\in M}L(p),$$

并且定义映射 $\pi:L(M)\to M$, 使得 $\forall\sigma\in L(p)$, 有 $\pi(\sigma)=p$. 试在 $L(M)$ 上给出一个光滑结构, 使得 $\pi:L(M)\to M$ 成为 M 上的 (1,1) 型张量丛, 因而由例 9.4,

$$L(M)=TM\otimes T^*M.$$

78. n 维实射影空间 $\mathbb{R}P^n$ 是在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中所有一维线性子空间所构成的 n 维光滑流形 (参看例 1.6). 因此, 对于任意一点 $p\in\mathbb{R}P^n$, 用 E_p 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中由 p 所代表的一维子空间. 令

$$E=\bigcup_{p\in\mathbb{R}P^n}E_p,$$

并且定义映射 $\pi:E\to\mathbb{R}P^n$, 使得对于任意的 $v\in E_p$, 有 $\pi(v)=p$. 试给出 E 的光滑结构, 使得 $\pi:E\to\mathbb{R}P^n$ 成为 $\mathbb{R}P^n$ 上秩为 1 的向量

丛；如此确定的向量丛 $\pi: E \to \mathbb{R}P^n$ 称为实射影空间 $\mathbb{R}P^n$ 上的**典型线丛**. 类似地，可以引入复射影空间 $\mathbb{C}P^n$ 上典型线丛的概念 (将在下册的第八章介绍).

第二章 黎曼流形

在 Gauss 关于曲面的内蕴微分几何研究的启示下， Riemann 认识到，作为几何学的基本假设，应该把空间的度量性质和拓扑性质区分开来，在构成空间的三重可延展量 (即现在的三维流形) 上可以给予不同的度量结构；因此，欧几里得的平行公设不可能仅从拓扑上的考虑推导出来． Riemann 提出一种为流形上每一条曲线指定长度的统一方法：首先为流形上的切向量指定长度，然后把曲线的长度定义为其切向量之长度沿曲线的积分．同时， Riemann 认为，定义在切空间上的 "长度" 函数 f 应该是连续的，并具有正齐性，即切向量 λv 的长度 $f(\lambda v)$ 应是 v 的长度 $f(v)$ 的 $|\lambda|$ 倍．特别地，他提议长度函数 f 可以取 $\sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(p)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}$ 的形式，这就是现在所称的 "黎曼度量".

在黎曼几何的发展过程中，最重要的一个进展是 Levi-Civita 平行移动概念的发现，它后来发展成为光滑流形上的联络以及向量丛上的联络等概念.

在本章，我们要介绍黎曼流形的基本概念和常见的例子，特别是黎曼联络的概念及其性质；后者是本章的重点.

§2.1 黎曼度量

在 n 维向量空间 V 上，所谓的**内积**是指满足下列条件的双线性形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle: V \times V \to \mathbb{R}$:

(1) 对称性: $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$, $\forall u, v \in V$;

(2) 正定性: $\forall u \in V$, $\langle u, u\rangle \geq 0$, 其中等号成立当且仅当 $u = 0$.

换句话说， V 上的一个内积就是 V 上的一个对称、正定的二阶协变张量．指定了一个内积的向量空间 V 称为**欧氏向量空间**．在这样

的空间中，能够定义向量的长度以及向量之间的夹角.

定义 1.1 设 M 是一个 m 维光滑流形，g 是 M 上的一个光滑的二阶协变张量场. 如果 g 是对称、正定的，即对于每一点 $p \in M$, $g(p)$ 是切空间 T_pM 上的一个对称、正定的二阶协变张量，则称 g 是 M 上的一个 **黎曼度量**. 指定了一个黎曼度量 g 的光滑流形 M 称为 **黎曼流形**, 记为 (M, g), 或简记为 M.

根据定义，$g(p)$ 是 T_pM 上的内积 $(\forall p \in M)$. 所以光滑流形 M 上的黎曼度量就是以光滑地依赖于点 p 的方式在每一点 $p \in M$ 的切空间 T_pM 上指定一个内积使之成为欧氏向量空间. 特别地，每一个欧氏 (向量) 空间都是黎曼流形.

此外，对照定义 1.1 和第一章的定义 9.3 可知，黎曼流形的切丛是黎曼向量丛.

有时，也用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 来表示在光滑流形上指定的黎曼度量 g.

设 $(U; x^i)$ 是 M 的一个容许的局部坐标系，则黎曼度量 g 有局部坐标表达式：

$$g|_U = g_{ij} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j, \tag{1.1}$$

其中 $g_{ij} = g\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial x^j}\right) \in C^\infty(U)$, $g_{ij} = g_{ji}$. 由定义，在每一点 $p \in U$, $(g_{ij}(p))$ 是 m 阶正定矩阵. 如果引入对称化的乘积 (对称张量积)

$$\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j = \frac{1}{2}(\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j + \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^i),$$

则 (1.1) 式可以写成二次微分形式 $g|_U = g_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j$.

设 $\gamma : [a, b] \to M$ 是 M 中一条光滑曲线，令

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} \mathrm{d}t, \tag{1.2}$$

并称之为曲线 γ 的 **弧长 (长度)**. 如果 $\gamma([a, b])$ 落在坐标域 U 内，则它可用局部坐标表示为

$$x^i(t) = x^i(\gamma(t)), \quad 1 \leq i \leq m. \tag{1.3}$$

因而,

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(\gamma(t)) \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}} \mathrm{d}t. \tag{1.4}$$

曲线的弧长与曲线的正则参数变换无关，也与光滑流形的局部坐标系的取法无关.

假定 M 是一个 m 维的有向黎曼流形，$\{(U_\alpha; x^i_\alpha) : \alpha \in I\}$ 是 M 的一个与其定向相符的坐标覆盖. 设

$$g|_{U_\alpha} = \sum_{i,j=1}^m g^\alpha_{ij} \mathrm{d}x^i_\alpha \mathrm{d}x^j_\alpha.$$

令

$$(\mathrm{d}V_M)|_{U_\alpha} = \sqrt{\det(g^\alpha_{ij})} \mathrm{d}x^1_\alpha \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m_\alpha,$$

则 $\mathrm{d}V_M$ 是大范围地定义在流形 M 上的一个 m 次外微分式 (参看本章习题第 2 题), 称为黎曼流形 M 的 **体积元素** 或 **体积元**. 必要时，也用 $\mathrm{d}V_g$ 来表示体积元 $\mathrm{d}V_M$, 以强调它对于度量 g 的依赖性.

在一个局部坐标系 $(U; x^i)$ 下，黎曼度量的指定有相当大的随意性，只要任意指定一组 m^2 个光滑函数 $g_{ij} \in C^\infty(U)$, 使得 $g_{ij} = g_{ji}$, 并且要求矩阵 (g_{ij}) 在 U 上处处正定就够了. 但是，在光滑流形 M 上黎曼度量的存在性却不是显而易见的. 下面的定理说明黎曼度量的存在性成立.

定理 1.1 设 M 是一个满足第二可数公理的光滑流形，则在 M 上必存在黎曼度量.

证明 由于在每一个局部坐标邻域上都可以指定一个黎曼度量，自然的想法就是利用单位分解定理，把这些局部定义的黎曼度量拼装成为在流形 M 上大范围定义的黎曼度量.

假设 M 的维数 $\dim M = m$. 由于 M 满足第二可数公理，可以取 M 的一个局部有限的坐标覆盖 $\{(U_\alpha; x^i_\alpha); \alpha \in I\}$, 其中 I 是自然数集；又由单位分解定理，存在一族光滑函数 $f_\alpha \in C^\infty(M)$, 使得对于任

意的 $\alpha \in I$,

$$\operatorname{Supp} f_\alpha \subset U_\alpha, \quad 0 \le f_\alpha \le 1,$$

并满足 $\sum_{\alpha\in I} f_\alpha = 1$. 对于每一个 $\alpha \in I$, 在 U_α 上取黎曼度量

$$g^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^m \mathrm{d}x_\alpha^i \otimes \mathrm{d}x_\alpha^i. \tag{1.5}$$

再利用 $g^{(\alpha)}$, 可以在 M 上引入对称的二阶协变张量场 g_α, 定义为: $\forall p \in M$,

$$g_\alpha(p) = \begin{cases} f_\alpha(p)\cdot g^{(\alpha)}(p), & \text{如果 } p \in U_\alpha; \\ 0, & \text{如果 } p \notin U_\alpha. \end{cases}$$

由 $f_\alpha g^{(\alpha)}$ 在 U_α 上的光滑性以及

$$\operatorname{Supp} g_\alpha \subset \operatorname{Supp} f_\alpha \subset U_\alpha,$$

不难看出, g_α 是大范围地定义在 M 上的光滑张量场. 再令

$$g = \sum_\alpha g_\alpha. \tag{1.6}$$

根据覆盖 $\{U_\alpha;\ \alpha \in I\}$ 的局部有限性, (1.6) 式右端在每一点 $p \in M$ 的某个邻域上只是有限多项之和. 所以, g 是大范围地定义在 M 上的一个光滑、对称的二阶协变张量场.

下面说明 g 的正定性. 任意固定一点 $p \in M$, 由于

$$\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1 \text{ 以及 } 0 \le f_\alpha \le 1,$$

必有 $\beta \in I$, 使得 $f_\beta(p) > 0$. 于是, 对于任意的 $v \in T_pM$,

$$(g(p))(v,v) = \sum_\alpha f_\alpha(p)\cdot g^{(\alpha)}(v,v) \ge f_\beta(p)\cdot \sum_{i=1}^m (\mathrm{d}x_\beta^i(v))^2 \ge 0;$$

当 $(g(p))(v,v) = 0$ 时, 因为 $f_\beta(p) > 0$, 所以

$$\mathrm{d}x_\beta^i(v) = 0, \quad 1 \le i \le m,$$

即 $v = 0$. 因此, g 是正定的. 依照定义, g 是 M 上的一个黎曼度量. 证毕.

从定理 1.1 的证明过程来看, 由于在局部上指定黎曼度量的随意性, 似乎在 M 上指定黎曼度量也有相当大的随意性. 其实不然. 实际上, 大范围定义的黎曼度量要受到流形 M 本身的拓扑的强烈限制. 比如在二维球面 S^2 上就没有 "平坦" 的 (即 Gauss 曲率恒为零的) 黎曼度量. 事实上, 如果 S^2 具有某个度量 g, 使其 Gauss 曲率恒为零, 则由 Gauss-Bonnet 定理可知,

$$4\pi = \int_{S^2} K dV_g = 0,$$

这当然是不可能的. 黎曼度量与流形的拓扑性质之间的相互制约关系是大范围黎曼几何的中心研究课题, 将在第五章作进一步的讨论.

在曲面论中已经知道, 对于曲面 (即二维黎曼流形) 而言, 在局部上总是能够取到正交的曲纹坐标网 (相当于局部坐标系)(u,v), 使得它的第一基本形式 (即黎曼度量 g) 可以表示为 $I = E\mathrm{d}u^2 + G\mathrm{d}v^2$(等价于在 $i \ne j$ 时, $g_{ij} = 0$). 然而当流形的维数 $m \ge 3$ 时, 情况就大不相同了. 在 $m(\ge 3)$ 维黎曼流形 M 上, 是否存在局部坐标系 $(U;x^i)$, 使得坐标曲线处处彼此正交, 或等价地说, 使得度量 g 的分量 g_{ij} 满足 $g_{ij} = 0 (i \ne j)$, 这是一个十分深刻的问题. 研究该问题的一种方法是 Cartan-Kähler 关于外微分方程的理论 (参看参考文献 [35]); 受课程的限制, 不再就此展开进一步的讨论. 另一方面, 因为标架场和局部坐标系的关系较为松弛, 并且在每一个黎曼流形上, 局部定义的单位正交标架场总是存在的, 所以 Cartan 的活动标架法被有效地用于黎曼几何的研究, 并且已经成为一种重要而基本的研究方法. 在本书, 在用局部坐标系研究黎曼几何的同时, 也常常采用活动标架和外微分法进行讨论. 下面先作一些简要的说明.

设 $(U;x^i)$ 是 M 的一个局部坐标系, 黎曼度量 g 在该坐标系下的

分量是

$$g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle.$$

要得到定义在 U 上的单位正交标架场，只要将自然标架场 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 作 Schmidt 正交化就行了. 首先令

$$e_1=\frac{\partial}{\partial x^1}\Big/\left|\frac{\partial}{\partial x^1}\right|=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\cdot\frac{\partial}{\partial x^1}.$$

假设切向量

$$a_2=\frac{\partial}{\partial x^2}-\lambda e_1$$

垂直于 e_1，则有 $\langle a_2,e_1\rangle=0$. 由此可知，

$$\lambda=-\left\langle\frac{\partial}{\partial x^2},e_1\right\rangle=-\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}}.$$

所以，

$$a_2=\frac{\partial}{\partial x^2}-\frac{g_{12}}{g_{11}}\cdot\frac{\partial}{\partial x^1}.$$

令

$$e_2=\frac{a_2}{|a_2|}=\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}}\left(\frac{\partial}{\partial x^2}-\frac{g_{12}}{g_{11}}\frac{\partial}{\partial x^1}\right),$$

则 e_1,e_2 是两个彼此正交的单位切向量，并且

$$\mathrm{Span}\{e_1,e_2\}=\mathrm{Span}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2}\right\}.$$

继续上面的过程，最终得到一个定义在 U 上的单位正交标架场 $\{e_i\}$.

假设 $\{\omega^i(p)\}$ 是 $\{e_i(p)\}$ 在 T_p^*M 中的对偶基底，则 $\{\omega^i\}$ 是定义在 U 上的余切标架场，称为与 $\{e_i\}$ 对偶的**单位正交余标架场**. 此时，由恒同映射

$$\mathrm{id}:T_pM\to T_pM,\quad \forall p\in M$$

给出的 (1, 1) 型张量场 id 可以表示为

$$\mathrm{id}=\mathrm{d}x^i\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}=\omega^i\otimes e_i.$$

若用 dp 表示光滑流形 M 在点 p 的任意一个切向量场，则上式可以改写为下述更具有直观意义的表达式：

$$dp=\omega^i(dp)\cdot e_i,\ \text{或简记为}\ \ dp=\omega^i e_i.$$

这样，M 的黎曼度量 g 就可以写为

$$g=\langle dp,dp\rangle=\sum_{i=1}^m(\omega^i)^2. \tag{1.7}$$

由此可见，前面所说的 Schmidt 正交化过程等价于对二次微分形式

$$\sum_{i,j=1}^m g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$$

逐步进行配方的过程. 事实上，

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^m g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j=&g_{11}(\mathrm{d}x^1)^2+2\sum_{i=2}^m g_{1i}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^i+\sum_{i,j\ge 2}g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\\ =&g_{11}\left(\mathrm{d}x^1+\sum_{i=2}^m\frac{g_{1i}}{g_{11}}\mathrm{d}x^i\right)^2\\ &+\sum_{i,j\ge2}\left(g_{ij}-\frac{g_{1i}g_{1j}}{g_{11}}\right)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\\ =&\left(\sqrt{g_{11}}\mathrm{d}x^1+\sum_{i=2}^m\frac{g_{1i}}{\sqrt{g_{11}}}\mathrm{d}x^i\right)^2\\ &+\sum_{i,j\ge2}\left(g_{ij}-\frac{g_{1i}g_{1j}}{g_{11}}\right)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j.\end{aligned}$$

令

$$\omega^1=\sqrt{g_{11}}\mathrm{d}x^1+\sum_{i=2}^m\frac{g_{1i}}{\sqrt{g_{11}}}\mathrm{d}x^i,$$

则有

$$\sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = (\omega^1)^2 + \sum_{i,j\geq 2} g'_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j, \tag{1.8}$$

其中

$$g'_{ij} = g_{ij} - \frac{g_{1i}g_{1j}}{g_{11}}.$$

(1.8) 式右端的和式不再含有微分 $\mathrm{d}x^1$, 并且 $m-1$ 阶矩阵 (g'_{ij}) 仍是正定矩阵. 继续上述过程, 最终便可得到 (1.7) 式. 如此得到的 1 次微分式组 $\{\omega^i\}$ 恰好与前面经过 Schmidt 正交化得到的单位正交标架场 $\{e_i\}$ 是彼此对偶的.

§2.2　黎曼流形的例子

在本节, 要介绍若干常见的黎曼流形的例子. 定理 1.1 的证明过程实际上给出了在光滑流形上构造黎曼度量的方法, 这在理论上是重要的, 但在实际上是不可操作的, 或者说是不实用的. 在实际应用中, 往往是通过已知黎曼流形 (比如欧氏空间) 的黎曼度量诱导出所讨论的流形上的黎曼度量. 本节的例子主要是用这种方法得到的.

命题 2.1　设 M, N 是两个光滑流形, $f: M \to N$ 是光滑映射.

(1) 如果 φ 是 N 上的一个光滑的 $r(\geq 1)$ 阶协变张量场, 则在 M 上有 r 阶光滑协变张量场 $f^*\varphi$, 其定义如下: 对于任意的 $p \in M$, 以及 $\forall v_1, \cdots, v_r \in T_pM$,

$$((f^*\varphi)(p))(v_1, \cdots, v_r) = (\varphi(p))(f_{*p}(v_1), \cdots, f_{*p}(v_r)). \tag{2.1}$$

特别地, 如果 φ 是对称的, 则 $f^*\varphi$ 也是对称的; 如果 φ 是反对称的, 则 $f^*\varphi$ 也是反对称的.

(2) 如果 f 是浸入, 并且 h 是 N 上的一个黎曼度量, 则 $g = f^*h$ 是 M 上的黎曼度量.

此时, 把 g 称为黎曼度量 h 通过 f 在 M 上的 **诱导度量**.

证明　(1) 显而易见, $f^*\varphi$ 是 N 上的张量场, 只需证明它的光滑性. 不失一般性, 设 $r = 2$. $\forall p \in M$, 取 p 在 M 中的容许坐标系 $(U; x^i)$ 以及 $f(p)$ 在 N 中的容许局部坐标系 $(V; y^\alpha)$, 使得 $f(U) \subset V$. 令

$$\varphi|_V = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \varphi_{\alpha\beta}\mathrm{d}y^\alpha \otimes \mathrm{d}y^\beta, \quad f^\alpha = y^\alpha \circ f, \quad 1 \leq \alpha \leq n,$$

其中

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta}\right), \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq n.$$

则 $f^*\varphi$ 有如下的局部表示:

$$\begin{aligned}
(f^*\varphi)|_U &= \sum_{i,j=1}^{m} (f^*\varphi)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \\
&= \sum_{i,j} \varphi\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \\
&= \sum_{i,j} \varphi\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right) \circ f\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \\
&= \sum_{i,j}\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta}\right) \circ f\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \\
&= \sum_{i,j}\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}(\varphi_{\alpha\beta} \circ f)\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j.
\end{aligned}$$

由 f 和 φ 的光滑性, 容易看出 $f^*\varphi$ 也是光滑的.

(2) 由 (1), 只需要说明二阶协变张量场 $g = f^*h$ 是正定的即可. $\forall p \in M$, 以及 $\forall u \in T_pM$, 根据 h 的正定性,

$$(g(p))(u, u) = h(f_*(u), f_*(u)) \geq 0,$$

其中等号成立当且仅当 $f_*(u) = 0$. 由于 f 是浸入, 后者等价于 $u = 0$. 证毕.

利用命题 2.1, 可以得到许多黎曼流形的例子.

例 2.1 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的超曲面.

设 $f: N \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是 n 维光滑流形 N 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的浸入, 通常把 (f, N) 称为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的浸入超曲面. 假定 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的标准内积 (黎曼度量) 记为 $h = \langle\cdot,\cdot\rangle$, 则由命题 2.1, $g = f^*h$ 是 N 上的一个黎曼度量. 所以, (N, g) 是黎曼流形. 若设 $(x^1, \cdots, x^{n+1})$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的笛卡尔直角坐标系, 则

$$h = \sum_{\alpha=1}^{n+1} (\mathrm{d}x^\alpha)^2.$$

如果映射 $f: N \to \mathbb{R}^{n+1}$ 在 N 的局部坐标系 $(U; u^i)$ 下有局部表达式

$$x^\alpha = f^\alpha(u^1, \cdots, u^n), \quad 1 \le \alpha \le n+1,$$

则有

$$g|_U = \sum_{\alpha,i,j} \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^i}\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^j}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j.$$

例 2.2 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的标准球面 $S^n(a)$, $a > 0$.

设 $a > 0$,

$$S^n(a) = \left\{(x^1, \cdots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1};\ \sum_{\alpha=1}^{n+1}(x^\alpha)^2 = a^2\right\}.$$

则包含映射 $i: S^n(a) \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个嵌入映射, 自然是浸入. 因而 $S^n(a)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的浸入超曲面. 根据例 2.1, $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的标准度量 h 在 $S^n(a)$ 上的限制 $g = i^*h$ 是 $S^n(a)$ 的黎曼度量. 所以 $(S^n(a), g)$ 是一个黎曼流形.

在另一方面, 通过球极投影可以得到 $S^n(a)$ 的一个局部坐标覆盖. 下面给出度量 g 的局部坐标表达式. 这也可以视为在 $S^n(a)$ 上引入度量 g 的一种途径.

设 $N = (0, \cdots, 0, a)$, $S = (0, \cdots, 0, -a)$ 分别为 $S^n(a)$ 的北极和南极, 令

$$U_+ = S^n(a)\backslash\{S\}, \quad U_- = S^n(a)\backslash\{N\}.$$

分别定义映射 $\varphi_\pm: U_\pm \to \mathbb{R}^n$ 如下:

$$(\xi^1, \cdots, \xi^n) = \varphi_+(x^1, \cdots, x^{n+1}) = \left(\frac{ax^1}{a + x^{n+1}}, \cdots, \frac{ax^n}{a + x^{n+1}}\right),$$

$$(\eta^1, \cdots, \eta^n) = \varphi_-(x^1, \cdots, x^{n+1}) = \left(\frac{ax^1}{a - x^{n+1}}, \cdots, \frac{ax^n}{a - x^{n+1}}\right).$$

不难看出 (参看第一章习题第 4 题), $\varphi_\pm$ 的逆映射由下面的式子确定:

$$\begin{aligned}(x^1, \cdots, x^n, x^{n+1}) &= \varphi_+^{-1}(\xi^1, \cdots, \xi^n)\\ &= \left(\frac{2a^2\xi^1}{a^2 + \sum_j(\xi^j)^2}, \cdots, \frac{2a^2\xi^n}{a^2 + \sum_j(\xi^j)^2}, \frac{a\left(a^2 - \sum_j(\xi^j)^2\right)}{a^2 + \sum_j(\xi^j)^2}\right),\\ (x^1, \cdots, x^n, x^{n+1}) &= \varphi_-^{-1}(\eta^1, \cdots, \eta^n)\\ &= \left(\frac{2a^2\eta^1}{a^2 + \sum_j(\eta^j)^2}, \cdots, \frac{2a^2\eta^n}{a^2 + \sum_j(\eta^j)^2}, \frac{a\left(\sum_j(\eta^j)^2 - a^2\right)}{a^2 + \sum_j(\eta^j)^2}\right).\end{aligned}$$

于是在 $U_+ \cap U_-$ 上有局部坐标变换

$$(\eta^1, \cdots, \eta^n) = \varphi_- \circ \varphi_+^{-1}(\xi^1, \cdots, \xi^n) = \left(\frac{a^2\xi^1}{\sum_j(\xi^j)^2}, \cdots, \frac{a^2\xi^n}{\sum_j(\xi^j)^2}\right),$$

$$(\xi^1, \cdots, \xi^n) = \varphi_+ \circ \varphi_-^{-1}(\eta^1, \cdots, \eta^n) = \left(\frac{a^2\eta^1}{\sum_j(\eta^j)^2}, \cdots, \frac{a^2\eta^n}{\sum_j(\eta^j)^2}\right).$$

显然, $(U_+, \varphi_+; \xi^i)$ 与 $(U_-, \varphi_-; \eta^i)$ 构成了 $S^n(a)$ 的容许的局部坐标覆盖. 由于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的标准度量是

$$h = \sum_{\alpha=1}^{n+1}(\mathrm{d}x^\alpha)^2,$$

它在 U_+ 和 U_- 上的诱导度量分别是

$$g^+=\sum_{ij}g^+_{ij}\mathrm{d}\xi^i\mathrm{d}\xi^j,\quad g^-=\sum_{ij}g^-_{ij}\mathrm{d}\eta^i\mathrm{d}\eta^j,$$

其中

$$g^+_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^i}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^j}=\frac{4a^4\delta_{ij}}{\left(a^2+\sum_k(\xi^k)^2\right)^2}=\frac{4\delta_{ij}}{\left(1+c\sum_k(\xi^k)^2\right)^2},$$

$$g^-_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\eta^i}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\eta^j}=\frac{4a^2\delta_{ij}}{\left(a^2+\sum_k(\eta^k)^2\right)^2}=\frac{4\delta_{ij}}{\left(1+c\sum_k(\eta^k)^2\right)^2},$$

这里 $c=1/a^2$. 直接验证可知，在 $U_+\cap U_-$ 上， $g^+=g^-$. 所以 g^+ 和 g^- 给出了球面 $S^n(a)$ 的一个黎曼度量，它正好是上面给出的诱导度量 $g=i^*h$.

例 2.3 双曲空间 $H^n(c)$, $c<0$.

首先在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上定义 Lorentz 内积 $h=\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ 如下：

$$h(x,y)=\langle x,y\rangle_1=\sum_{i=1}^n x^iy^i-x^{n+1}y^{n+1},\quad \forall x,y\in\mathbb{R}^{n+1}.$$

h 显然可以看作是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的一个非退化的、对称的二阶协变张量场. 令 $a=1/\sqrt{-c}$, 并考虑 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中双叶双曲面的上半叶

$$H^n=\{x=(x^1,\cdots,x^{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1};\ \langle x,x\rangle_1=-a^2\text{ 且 }x^{n+1}>0\},$$

则 H^n 与 $\mathbb{R}^n$ 中的开球

$$B^n(a)=\{(\xi^1,\cdots,\xi^n)\in\mathbb{R}^n;\ \sum_{i=1}^n(\xi^i)^2<a^2\}$$

光滑同胚.

为了阐明这个事实，首先定义映射 $\varphi:H^n\to B^n(a)$, 使得对于任意的 $(x^1,\cdots,x^{n+1})\in H^n$,

$$(\xi^1,\cdots,\xi^n)=\varphi(x^1,\cdots,x^{n+1})=\left(\frac{ax^1}{a+x^{n+1}},\cdots,\frac{ax^n}{a+x^{n+1}}\right).$$

则映射 φ 的各个分量是光滑函数，因而是光滑映射. 可以直接验证，φ 还具有光滑的逆映射 φ^{-1}, 使得对于任意的 $(\xi^1,\cdots,\xi^n)\in B^n(a)$ 有

$$\begin{aligned}(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1})&=\varphi^{-1}(\xi^1,\cdots,\xi^n)\\&=\left(\frac{2a^2\xi^1}{a^2-\sum_j(\xi^j)^2},\cdots,\frac{2a^2\xi^n}{a^2-\sum_j(\xi^j)^2},\frac{a(a^2+\sum_j(\xi^j)^2)}{a^2-\sum_j(\xi^j)^2}\right).\end{aligned}$$

因此 φ 是从 H^n 到 $B^n(a)$ 的光滑同胚. 有时，映射 φ 也称为从 H^n 到 $B^n(a)$ 上的"**球极投影**"(参看本章习题第 11 题).

在另一方面，假设 $i:H^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ 是包含映射，令 $\psi=i\circ\varphi^{-1}$, 则上面的推导也说明 $\psi:B^n(a)\to\mathbb{R}^{n+1}$ 是一个光滑嵌入. 根据命题 2.1, $g=\psi^*h$ 是 $B^n(a)$ 上的一个光滑对称的二阶协变张量场；它的局部坐标表示为 $g=\sum_{i,j}g_{ij}\mathrm{d}\xi^i\mathrm{d}\xi^j$, 其中的分量

$$\begin{aligned}g_{ij}&=\sum_{k=1}^n\frac{\partial x^k}{\partial\xi^i}\frac{\partial x^k}{\partial\xi^j}-\frac{\partial x^{n+1}}{\partial\xi^i}\frac{\partial x^{n+1}}{\partial\xi^j}\\&=\frac{4a^4\delta_{ij}}{\left(a^2-\sum_k(\xi^k)^2\right)^2}=\frac{4\delta_{ij}}{\left(1+c\sum_k(\xi^k)^2\right)^2}.\end{aligned}$$

由此可知， $g=\psi^*h$ 是处处正定的，因而是 $B^n(a)$ 上的一个黎曼度量. 另外，由于 φ 是光滑同胚， $(H^n;\varphi;\xi^i)$ 可以视为 H^n 的一个整体坐标系. 易知， $i^*h=\varphi^*g$ 是 H^n 上的黎曼度量，并且 g_{ij} 是黎曼度量 i^*h 关于坐标系 $(H^n;\xi^i)$ 的分量. 因此，作为黎曼流形， (H^n,i^*h) 与 $(B^n(a),g)$ 具有完全相同的结构，它们是同一个空间的两个具体模型. 通常把黎曼流形 $(B^n(a),g)$ 和 (H^n,i^*h) 都称为 n 维双曲空间，并用 $H^n(c)$ 来表示.

例 2.4 n 维实射影空间 $\mathbb{R}P^n$.

$\mathbb{R}P^n$ 是指 $n+1$ 维向量空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中一维子空间所组成的集合(参看第一章的例 1.6). 如果在 $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ 中引进如下的等价关系 $\sim$: $\forall x,y\in\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$, $x\sim y$ 当且仅当存在非零实数 λ, 使得 $x=\lambda\cdot y$, 那么

$$\mathbb{R}P^n=(\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\})/\sim.$$

对于任意的 $x\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$, 用 $[x]$ 表示 x 所在的等价类; 同时把 $x\in\mathbb{R}^{n+1}$ 的坐标 $(x^1,\cdots,x^{n+1})$ 称为点 $[x]\in\mathbb{R}P^n$ 的齐次坐标.

$\mathbb{R}P^n$ 的一个 C^∞ 相关的坐标覆盖是 $\{(U_\alpha;\varphi_\alpha);\ 1\le\alpha\le n+1\}$, 其中

$$U_\alpha=\{[(x^1,\cdots,x^{n+1})];\ (x^1,\cdots,x^{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1},x^\alpha\neq 0\},$$
$$1\le\alpha\le n+1;$$

映射 $\varphi_\alpha:U_\alpha\to\mathbb{R}^n$ 的定义为

$$\varphi_\alpha([(x^1,\cdots,x^{n+1})])=\left(\frac{x^1}{x^\alpha},\cdots,\frac{x^{\alpha-1}}{x^\alpha},\frac{x^{\alpha+1}}{x^\alpha},\cdots,\frac{x^{n+1}}{x^\alpha}\right).$$

另一方面, 可以考虑单位球面 $S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 的开半球面

$$V_\alpha=\left\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1};\ \sum_{\beta=1}^{n+1}(x^\beta)^2=1,\ \text{并且}\ \ x^\alpha>0\right\},$$
$$1\le\alpha\le n+1.$$

很明显, 在 U_α 和 V_α 之间存在一一对应 $\psi_\alpha:U_\alpha\to V_\alpha$, 其定义是

$$\psi_\alpha([(x^1,\cdots,x^{n+1})])=\frac{\mathrm{Sgn}\,(x^\alpha)}{\sqrt{\sum_\beta(x^\beta)^2}}\cdot(x^1,\cdots,x^{n+1}),$$

其中 $\mathrm{Sgn}\,(x^\alpha)$ 表示 x^α 的符号.

在例 2.2 中已经给出了 $\mathbb{R}^{n+1}$ 在 S^n 上的诱导度量

$$i^*h=\sum_{\beta=1}^{n+1}(i^*\mathrm{d}x^\beta)^2,\tag{2.2}$$

其中 $i:S^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ 是包含映射, h 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的标准度量. 通过 ψ_α 便在 U_α 上诱导出一个黎曼度量 $g_\alpha=\psi_\alpha^*(i^*h)$.

固定一个指标 α, $1\le\alpha\le n+1$; 则

$$(x^1,\cdots,x^{n+1})=\psi_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1}(\xi^1,\cdots,\xi^n)$$

$$=\psi_\alpha([(\xi^1,\cdots,\xi^{\alpha-1},1,\xi^\alpha,\cdots,\xi^n)])$$
$$=\left(1+\sum_{i=1}^n(\xi^i)^2\right)^{-\frac12}\cdot(\xi^1,\cdots,\xi^{\alpha-1},1,\xi^\alpha,\cdots,\xi^n),$$

即有

$$x^\beta=\begin{cases}\dfrac{\xi^\beta}{\sqrt{1+\sum_j(\xi^j)^2}}, & 1\le\beta\le\alpha-1;\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{1+\sum_j(\xi^j)^2}}, & \beta=\alpha;\\[2ex] \dfrac{\xi^{\beta-1}}{\sqrt{1+\sum_j(\xi^j)^2}}, & \alpha+1\le\beta\le n+1.\end{cases}$$

代入 (2.2) 式就得到度量 g_α 的局部坐标表达式:

$$g_\alpha=\frac{\sum_i(\mathrm{d}\xi^i)^2+\sum_{i<j}(\xi^i\mathrm{d}\xi^j-\xi^j\mathrm{d}\xi^i)^2}{(1+\sum_i(\xi^i)^2)^2}.$$

若用齐次坐标 $x^1,\cdots,x^{n+1}$ 表示, 则上式可以改写为

$$g_\alpha=\frac{\sum_{\beta<\gamma}(x^\beta\mathrm{d}x^\gamma-x^\gamma\mathrm{d}x^\beta)^2}{\left(\sum_\beta(x^\beta)^2\right)^2}.$$

它与指标 α 的取法无关, 因而是定义在整个光滑流形 $\mathbb{R}P^n$ 上的黎曼度量.

例 2.5 黎曼流形的乘积.

设 (M_1,g_1) 和 (M_2,g_2) 是两个黎曼流形. 令 $M=M_1\times M_2$. 则对于任意的 $(p,q)\in M$,

$$T_{(p,q)}M=(\alpha_1)_{*p}(T_pM_1)\oplus(\alpha_2)_{*q}(T_qM_2)$$

(见第一章习题第 18 题), 于是可以在 M 上引入黎曼度量 g, 使得对于任意的 $(p,q)\in M$,

$$g(X,Y)=g_1(X_1,Y_1)+g_2(X_2,Y_2),$$

$$\forall X_1, Y_1 \in T_pM_1, \quad X_2, Y_2 \in T_qM_2,$$

其中

$$X = (\alpha_1)_{*p}(X_1) \oplus (\alpha_2)_{*q}(X_2), \quad Y = (\alpha_1)_{*p}(Y_1) \oplus (\alpha_2)_{*q}(Y_2).$$

不难证明：g 是 M 上的一个黎曼度量，称为度量 g_1 和 g_2 的 **乘积度量**；相应的黎曼流形 (M,g) 称为黎曼流形 (M_1,g_1) 和 (M_2,g_2) 的积，或称为 M_1 和 M_2 的 **黎曼直积**.

特别地，单位圆周 S^1 是嵌入在 $\mathbb{R}^2$ 中的一维黎曼流形，于是 n 个单位圆周的积

$$T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\text{ 个}}$$

关于乘积度量是一个 n 维黎曼流形，称为 n 维 **平坦环面**.

作为本节的结束，引入黎曼流形之间的等距映射与等距的概念.

根据命题 2.1(1)，对于黎曼流形之间任意的光滑映射 $f:(M,g)\to(N,h)$，f^*h 是 M 上的一个对称的二阶协变张量场．据此，有下述定义：

定义 2.1 设 $f:(M,g)\to(N,h)$ 是黎曼流形之间的光滑映射，如果 $g=f^*h$，即对于任意的 $x\in M$，以及任意的 $v,w\in T_xM$，都有

$$h(f_*(v), f_*(w)) = g(v,w),$$

则称 f 是从黎曼流形 (M,g) 到 (N,h) 内的一个 **等距映射**.

简言之，等距映射就是处处保持黎曼度量 (内积) 不变的映射．不难看出，等距映射必为浸入．因此，常常把等距映射称为 **等距浸入**；此时，称映射 $f:(M,g)\to(N,h)$ 为 (N,h) 的 **黎曼 (浸入) 子流形**.

定义 2.2 如果 $f:(M,g)\to(N,h)$ 是从光滑流形 M 到 N 的局部光滑同胚，并且 $g=f^*h$，则称 f 是 **局部等距**．如果 $f:(M,g)\to(N,h)$ 是从光滑流形 M 到 N 的光滑同胚，并且 $g=f^*h$，则称 f 是 **等距**．此时，称黎曼流形 (M,g) 与 (N,h) 是互相等距的.

黎曼流形 (M,g) 到它自身的一个等距称为 (M,g) 的一个 **等距变换**.

命题 2.2 设 $f:(M,g)\to(N,h)$ 是从黎曼流形 (M,g) 到 (N,h) 的等距映射．如果在每一点 $p\in M$，切映射 $f_{*p}:T_pM\to T_{f(p)}N$ 是线性同构，则 $f:(M,g)\to(N,h)$ 必是局部等距.

证明留作练习.

等距变换概念的推广是如下定义的共形变换.

定义 2.3 设 Φ 是从黎曼流形 (M,g) 到它自身的光滑同胚．如果存在正值光滑函数 $\lambda\in C^\infty(M)$，使得 $\Phi^*g=\lambda^2g$，则称映射 Φ 是从黎曼流形 M 到它自身的一个 **共形变换**．黎曼流形 (M,g) 在到它自身的所有共形变换下保持不变的性质 (量) 称为该黎曼流形的 **共形不变性质 (共形不变量)**.

§2.3 切向量场的协变微分

光滑结构使我们能够在微分流形上定义光滑函数，进而建立相应的微积分理论，并使之成为有效的研究工具．特别地，对于光滑流形 M 上的任意一个光滑函数 f，其微分 $\mathrm{d}f$ 是有意义的．按定义，在 M 的任意一点 p，$\mathrm{d}f(p)$ 是切空间 T_pM 上的一个线性函数，使得

$$(\mathrm{d}f(p))(v) = v(f), \quad \forall v\in T_pM.$$

在直观上，微分 $\mathrm{d}f$ 仍然是函数 f 在"无限接近的"两点的函数值之差．若设光滑曲线 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 满足条件

$$\gamma(0)=p, \quad \gamma'(0)=v,$$

则有

$$(\mathrm{d}f(p))(v) = v(f) = \left.\frac{\mathrm{d}(f\circ\gamma)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\gamma(t))-f(p)}{t}.$$

由此可见，当 $|t|$ 充分小时，

$$f(\gamma(t)) - f(p) = t\cdot(\mathrm{d}f(p))(v) + o(t^2),$$

其中 $o(t^2)$ 是指 t 的二阶无穷小量.

假定 X 是光滑流形 M 上的一个光滑切向量场，一个自然的问题是：对切向量场 X 能否进行微分？如何求它们的微分？我们知道，如果 M 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$，那么，沿光滑曲线 $\gamma(t)$ 定义的切向量场 $X(t)$ 可以表示为 n 个分量函数

$$X(t) = (X^1(t),\cdots,X^n(t)),$$

它的导数 $\dfrac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}$ 是

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t} = \left(\frac{\mathrm{d}X^1(t)}{\mathrm{d}t},\cdots,\frac{\mathrm{d}X^n(t)}{\mathrm{d}t}\right).$$

然而，对于一般的光滑流形 M 来说，由于 $X(t+\Delta t)$ 与 $X(t)$ 分别属于两个不同点处的切空间 $T_{\gamma(t+\Delta t)}M$ 和 $T_{\gamma(t)}M$，它们不能相减，故上式是没有意义的. 有鉴于此，若要引入切向量场 X 的某种"微分"，必须有一种确定的方式在 $T_{\gamma(t+\Delta t)}M$ 和 $T_{\gamma(t)}M$ 之间建立同构. 一般而言，这相当于除了光滑结构以外在 M 上再附加一种结构 (即所谓的"联络"，参看 §2.4 和 §2.6). 不过，对于黎曼流形来说，这种称为联络的附加结构是由其黎曼度量诱导并唯一地确定的. 下面，从 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的浸入超曲面着手来讨论这个问题.

设 M 是一个 m 维光滑流形，$X\in\mathfrak{X}(M)$，$f: M\to\mathbb{R}^{m+1}$ 是光滑浸入，即 M 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的浸入超曲面. 根据例 2.1，$\mathbb{R}^{m+1}$ 上的内积在 M 上诱导出一个黎曼度量，仍记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$. 对于任意的 $p\in M$，存在点 p 的局部坐标系 $(U;x^i)$，使得 $f|_U: U\to\mathbb{R}^{m+1}$ 是一个嵌入，其局部坐标表示设为

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1,\cdots,x^m),\quad 1\le\alpha\le m+1.$$

于是，可以把 U 和 $f(U)$ 等同起来，同时把切向量场 $X|_U$ 和 $f_*(X|_U)$ 等同起来. 如果

$$X|_U = X^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

则有

$$f_*(X|_U) = X^i f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = X^i\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}.$$

注意到 $f_*(X|_U)$ 是在 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中定义在 $f(U)$ 上的切向量场，故微分 $\mathrm{d}(f_*(X|_U))$ 是有意义的. 但是，如果用 N 表示 $f(U)$ 在 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的单位法向量场，则在一般情况下，$\mathrm{d}(f_*(X|_U))$ 不一定与 N 处处正交，换言之，它未必与 $f(U)$ 相切. 为了从 $\mathrm{d}(f_*(X|_U))$ 得到与 $f(U)$ 相切的分量，令

$$\mathrm{D}(f_*(X|_U)) = (\mathrm{d}(f_*(X|_U)))^{\mathrm{T}} = \mathrm{d}(f_*(X|_U)) - \langle\mathrm{d}(f_*(X|_U)),N\rangle N, \quad (3.1)$$

其中的上指标 "T" 表示从 $\mathbb{R}^{m+1}$ 到 $f(U)$ 在各个点处的切空间上的正交投影. 直接计算可以得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(f_*(X|_U)) &= \mathrm{d}X^i f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) + X^i\mathrm{d}\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right)\\ &= \mathrm{d}X^i f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) + X^i\mathrm{d}x^j\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}.\end{aligned} \quad (3.2)$$

由于 $\dfrac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i\partial x^j}\cdot\dfrac{\partial}{\partial y^\alpha}$ 是在 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中沿 $f(U)$ 定义的向量场，故可设

$$\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\alpha} = \Gamma_{ij}^k f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) + b_{ij}N, \quad (3.3)$$

其中右端的第一项是该向量场的切分量. 将上式两端与 $f_*\left(\dfrac{\partial}{\partial x^l}\right)$ 作内积，得到

$$\sum_{\alpha=1}^{m+1}\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^l} = \left\langle\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\alpha},\frac{\partial f^\beta}{\partial x^l}\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right\rangle$$

$$=\Gamma_{ij}^k \left\langle f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right), f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\right\rangle = \Gamma_{ij}^k g_{kl}, \tag{3.4}$$

其中

$$g_{ij} = \left\langle f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right\rangle = \sum_{\alpha=1}^{m+1}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} \tag{3.5}$$

是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 的内积通过浸入 f 在 U 上诱导的黎曼度量的分量.

对 (3.5) 式求偏导数，同时利用 (3.4) 式可以得到

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \sum_{\alpha=1}^{m+1}\left(\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i\partial x^k}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} + \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^j\partial x^k}\right) = \Gamma_{ik}^l g_{lj} + \Gamma_{jk}^l g_{il}.$$

由于 $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, 从上式可求出

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right), \tag{3.6}$$

这里 g^{kl} 是度量矩阵 (g_{ij}) 的逆矩阵的元素. 由此可见，函数 Γ_{ij}^k 由诱导度量的分量 g_{ij} 完全确定，叫作黎曼度量 g 在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下 (或关于自然标架场 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$) 的 **Christoffel 记号**; 为了方便起见，通常也称 Γ_{ij}^k 为度量矩阵 (g_{ij}) 的 Christoffel 记号.

将 (3.6) 式通过 (3.3) 及 (3.2) 代回 (3.1) 式便得到

$$\mathrm{D}(f_*(X|_U)) = (\mathrm{d}X^i + X^j\Gamma_{jk}^i\mathrm{d}x^k)f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right). \tag{3.7}$$

因此，可以定义

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(X|_U) &= (\mathrm{d}X^i + X^j\Gamma_{jk}^i\mathrm{d}x^k)\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}\\ &= \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^k} + X^j\Gamma_{jk}^i\right)\mathrm{d}x^k\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

不难验证，由向量场 X 通过 (3.7) 式定义的切向量场 $\mathrm{D}(f_*(X|_U))$ 与局部坐标系的选取无关，因而 (3.8) 的右端不依赖于局部坐标系的选取. 所以，如果令 $(\mathrm{D}X)|_U = \mathrm{D}(X|_U)$, 则 $\mathrm{D}X$ 在 M 上处处有定义，

因而是大范围地定义在 M 上的量. 对于 $X\in\mathfrak{X}(M)$, $\mathrm{D}X$ 是光滑流形 M 上以 1 次微分式为系数的切向量场，也是以切向量为值的 1 次微分式，即它是光滑的 (1,1) 型张量场.

对于欧氏空间 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的超曲面 M 而言，上面所描述的从 $X\in\mathfrak{X}(M)$ 得到定义在 M 上的 (1,1) 型光滑张量场 $\mathrm{D}X$ 的过程是 Levi-Civita 首先发现的; 历史上称 $\mathrm{D}X$ 为切向量场 X 的绝对微分. 而从另一方面来说，从 Christoffel 记号 Γ_{ij}^k 的表达式 (3.6) 可以看出，(3.8) 式所引入的绝对微分对于任意的黎曼流形仍然是有意义的，而不必假定 M 是欧氏空间的超曲面.

事实上，假定 (M,g) 是一个黎曼流形，其度量 g 在容许局部坐标系 $(U;x^i)$ 下可以表示为

$$g = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j,\quad g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

令 $(g^{kl}) = (g_{ij})^{-1}$, 则由 (3.6) 式可以得到度量矩阵 (g_{ij}) 的 Christoffel 记号 Γ_{ij}^k. 先证明下面的引理:

引理 3.1 若 $(\tilde U;\tilde x^i)$ 是黎曼流形 M 的另一个容许的局部坐标系，相应的 Christoffel 记号为 $\tilde\Gamma_{ij}^k$, 则当 $U\cap\tilde U\neq\emptyset$ 时，在 $U\cap\tilde U$ 上 $\tilde\Gamma_{ij}^k$ 和 Γ_{ij}^k 满足下列关系式:

$$\Gamma_{ij}^k = \tilde\Gamma_{pq}^r\frac{\partial\tilde x^p}{\partial x^i}\frac{\partial\tilde x^q}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial\tilde x^r} + \frac{\partial^2\tilde x^r}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial\tilde x^r}. \tag{3.9}$$

证明 用 $\tilde g_{ij}$ 表示度量张量 g 在局部坐标系 $(\tilde U;\tilde x^i)$ 下的分量，则在 $U\cap\tilde U$ 上有

$$g_{ij} = \tilde g_{pq}\frac{\partial\tilde x^p}{\partial x^i}\frac{\partial\tilde x^q}{\partial x^j}.$$

将上式两边对 x^k 求偏微商得到

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial\tilde g_{pq}}{\partial\tilde x^r}\frac{\partial\tilde x^r}{\partial x^k}\frac{\partial\tilde x^p}{\partial x^i}\frac{\partial\tilde x^q}{\partial x^j} + \tilde g_{pq}\left(\frac{\partial^2\tilde x^p}{\partial x^i\partial x^k}\frac{\partial\tilde x^q}{\partial x^j} + \frac{\partial\tilde x^p}{\partial x^i}\frac{\partial^2\tilde x^q}{\partial x^j\partial x^k}\right).$$

对上式中的指标进行轮换并作适当的加减运算，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\\&\quad=\left(\frac{\partial\tilde{g}_{pr}}{\partial\tilde{x}^q}+\frac{\partial\tilde{g}_{rq}}{\partial\tilde{x}^p}-\frac{\partial\tilde{g}_{pq}}{\partial\tilde{x}^r}\right)\frac{\partial\tilde{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial\tilde{x}^q}{\partial x^j}\frac{\partial\tilde{x}^r}{\partial x^k}+2\tilde{g}_{pq}\frac{\partial^2\tilde{x}^p}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial\tilde{x}^q}{\partial x^k}.\end{aligned}$$

把上式代入 (3.6) 式便得关系式 (3.9).

定理 3.2 设 (M,g) 是一个 m 维黎曼流形，$X\in\mathfrak{X}(M)$. 如果 $(U;x^i)$ 是 M 的一个容许坐标系，并且 $X|_U=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(X|_U)&=(\mathrm{d}X^i+X^j\Gamma^i_{jk}\mathrm{d}x^k)\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}\\&=\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^k}+X^j\Gamma^i_{jk}\right)\mathrm{d}x^k\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}\end{aligned}$$

是与局部坐标系的选取无关的 (1,1) 型光滑张量场. 于是，如果令

$$(\mathrm{D}X)|_U=\mathrm{D}(X|_U),$$

则 $\mathrm{D}X$ 是大范围地定义在 M 上的 (1,1) 型光滑张量场.

证明 假定 $(\tilde{U};\tilde{x}^i)$ 是 M 的另一个容许局部坐标系，并且

$$X=\tilde{X}^p\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^p}.$$

则当 $U\cap\tilde{U}\neq\emptyset$ 时在 $U\cap\tilde{U}$ 上有

$$\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial\tilde{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^p},\quad\tilde{X}^p=X^i\frac{\partial\tilde{x}^p}{\partial x^i}.\tag{3.10}$$

求微分 $\mathrm{d}\tilde{X}^p$，并将 (3.9) 式代入得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde{X}^p&=\mathrm{d}X^i\frac{\partial\tilde{x}^p}{\partial x^i}+X^j\frac{\partial^2\tilde{x}^p}{\partial x^j\partial x^k}\mathrm{d}x^k\\&=\mathrm{d}X^i\frac{\partial\tilde{x}^p}{\partial x^i}+X^j\left(\Gamma^i_{jk}\frac{\partial\tilde{x}^p}{\partial x^i}-\tilde{\Gamma}^p_{qr}\frac{\partial\tilde{x}^q}{\partial x^j}\frac{\partial\tilde{x}^r}{\partial x^k}\right)\mathrm{d}x^k\\&=(\mathrm{d}X^i+X^j\Gamma^i_{jk}\mathrm{d}x^k)\frac{\partial\tilde{x}^p}{\partial x^i}-\tilde{X}^q\tilde{\Gamma}^p_{qr}\mathrm{d}\tilde{x}^r,\end{aligned}$$

故有

$$(\mathrm{d}\tilde{X}^p+\tilde{X}^q\tilde{\Gamma}^p_{qr}\mathrm{d}\tilde{x}^r)\otimes\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^p}=(\mathrm{d}X^i+X^j\Gamma^i_{jk}\mathrm{d}x^k)\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

证毕.

定义 3.1 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形，$X\in\mathfrak{X}(M)$. 由定理 3.2 在 M 上确定的 (1,1) 型光滑张量场 $\mathrm{D}X$ 称为光滑向量场 X 的 **协变微分** 或 **绝对微分**；相应的映射 $\mathrm{D}:\mathfrak{X}(M)\to\mathscr{T}^1_1(M)$ 称为黎曼流形 (M,g) 上的 **协变微分(或 绝对微分) 算子**.

定义 3.2 设 (M,g) 同上，$X,Y\in\mathfrak{X}(M)$. $\mathrm{D}_YX=C^1_1(Y\otimes\mathrm{D}X)$ 称为光滑切向量场 X 沿 Y 的 **协变导数** 或 **协变微商**. 其中 C^1_1 是指张量场关于第一个反变指标和第一个协变指标的缩并运算.

在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下，$(\mathrm{D}_YX)|_U$ 有如下的局部坐标表达式：

$$(\mathrm{D}_YX)|_U=Y^k\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^k}+X^j\Gamma^i_{jk}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}.\tag{3.11}$$

由此可见，协变微分算子 D 又可以视为映射 $\mathrm{D}:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$，其定义是：对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$，$\mathrm{D}(X,Y)=\mathrm{D}_YX\in\mathfrak{X}(M)$.

定理 3.3 映射 $\mathrm{D}:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ 具有如下的性质：对于任意的 $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$，$\lambda\in\mathbb{R}$，$f\in C^\infty(M)$，

(1) $\mathrm{D}_{Y+fZ}X=\mathrm{D}_YX+f\mathrm{D}_ZX$;

(2) $\mathrm{D}_Y(X+\lambda Z)=\mathrm{D}_YX+\lambda\mathrm{D}_YZ$;

(3) $\mathrm{D}_Y(fX)=Y(f)X+f\mathrm{D}_YX$;

(4) $\mathrm{D}_XY-\mathrm{D}_YX=[X,Y]$;

(5) $Z(\langle X,Y\rangle)=\langle\mathrm{D}_ZX,Y\rangle+\langle X,\mathrm{D}_ZY\rangle$.

证明 性质 (1),(2) 和 (3) 是局部坐标表达式 (3.11) 的直接推论.

对于 (4)，注意到 Christoffel 记号 Γ^k_{ij} 关于下指标是对称的，所以从 (3.11) 式可得

$$(\mathrm{D}_XY-\mathrm{D}_YX)|_U$$

$$= \left(X^k\left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^k}+Y^j\Gamma^i_{jk}\right)-Y^k\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^k}+X^j\Gamma^i_{jk}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$$
$$= \left(X^k\frac{\partial Y^i}{\partial x^k}-Y^k\frac{\partial X^i}{\partial x^k}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$$
$$= [X,Y]|_U.$$

这就证明了性质 (4).

为了证明性质 (5), 首先, 利用 Γ^k_{ij} 关于下指标的对称性得知 (3.6) 式等价于

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=g_{lj}\Gamma^l_{ik}+g_{il}\Gamma^l_{jk}. \tag{3.12}$$

从而有

$$\begin{aligned} Z(\langle X,Y\rangle|_U) &= Z^k\frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij}X^iY^j)\\ &= Z^k\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}X^iY^j+g_{ij}\frac{\partial X^i}{\partial x^k}Y^j+g_{ij}X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^k}\right)\\ &\quad g_{ij}Z^k\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^k}+X^l\Gamma^i_{lk}\right)Y^j+g_{ij}X^iZ^k\left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^k}+Y^l\Gamma^j_{lk}\right)\\ &= \langle D_ZX,Y\rangle|_U+\langle X,D_ZY\rangle|_U. \end{aligned}$$

定理证毕.

注记 3.1 上述定理中的 (1) 说明 D_YX 关于自变量 Y 具有 $C^\infty(M)$ 线性性质, 即 $DX:\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ 是 (1,1) 型的张量场; 而 (3) 和 (4) 则意味着, 对于任意的 $Y\in\mathfrak{X}(M)$, 映射 $D_Y:\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ 具有导算子性质.

推论 3.4 映射 $D:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ 具有如下的局部性质:

(1) 设 $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$, $p\in M$. 如果 $Y(p)=Z(p)$, 则

$$(D_YX)(p)=(D_ZX)(p).$$

(2) 设 $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$, $p\in M$, $\gamma(t)$ $(t\in(-\varepsilon,\varepsilon))$ 是 M 上的一条光滑曲线, 使得 $\gamma(0)=p$, $\gamma'(0)=Z(p)$. 如果 $X|_{\gamma(t)}=Y|_{\gamma(t)}$, 则

$$(D_ZX)(p)=(D_ZY)(p).$$

证明 推论中的两个性质都是局部坐标表达式 (3.11) 的直接推论, 也是定理 3.3 中性质 (1)~(3) 的推论.

注记 3.2 根据推论 3.4, 可以定义 M 上的光滑切向量场 X 在一点 $p\in M$ 沿某个切向量 $v\in T_pM$ 的协变导数; 同时, 对于 M 上沿一条光滑曲线 $\gamma=\gamma(t)$ 定义的切向量场 $X=X(t)$, 可以求它沿着曲线 γ 的协变导数 $D_{\gamma'}X$, 而不必在意它在 γ 以外是否有定义. 如果在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下, 曲线 $\gamma(t)$ 的参数方程是 $x^i(\gamma(t))=x^i(t)$, 切向量场 $X(t)$ 的表达式是

$$X(t)=X^i(t)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(t)},$$

则

$$\begin{aligned}\frac{DX(t)}{dt}&=D_{\gamma'(t)}X\\ &=\left(\frac{dX^i(t)}{dt}+X^j(t)\frac{dx^k(t)}{dt}\Gamma^i_{jk}(\gamma(t))\right)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(t)}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

§2.4 联络和黎曼联络

在 §2.3, 已经引入了黎曼流形 (M,g) 上光滑切向量场的协变微分和协变导数的定义; 同时还讨论了协变微分和协变导数所具有的性质. 定理 3.3 所表述的映射

$$D:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$$

的性质启示我们给出联络的概念. 下面的定义是 J. L. Koszul 引入的:

定义 4.1 设 M 是 m 维光滑流形, 所谓 M 上的一个**联络** D 是指满足下列条件的映射 $D:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$:

(1) $\mathrm{D}_{Y+fZ}X=\mathrm{D}_YX+f\mathrm{D}_ZX$;

(2) $\mathrm{D}_Y(X+\lambda Z)=\mathrm{D}_YX+\lambda\mathrm{D}_YZ$;

(3) $\mathrm{D}_Y(fX)=Y(f)X+f\mathrm{D}_YX$,

其中 $\mathrm{D}_YX=\mathrm{D}(X,Y)$, $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $f\in C^\infty(M)$.

根据定理 3.3, 黎曼流形 (M,g) 上的协变微分算子 D 是光滑流形 M 上的一个联络. 由于在满足第二可数公理的光滑流形 M 上黎曼度量总是存在的, 因而 M 上的联络也是存在的. 不过, 一般说来, 光滑流形上的联络不是唯一的.

指定了一个联络 D 的光滑流形 (M,D) 称为一个 **仿射联络空间**; 在这样的空间里, 可以对光滑切向量场求协变微分和协变导数. 比如, 对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, 光滑切向量场 D_YX 称为切向量场 X 沿 Y 的 **协变导数**(或 **协变微商**).

下面来求协变导数的局部坐标表达式.

引理 4.1 设 (M,D) 是一个仿射联络空间, $X,Y,\tilde{X},\tilde{Y}\in\mathfrak{X}(M)$. 如果 U 是 M 的一个非空开子集, 并且 $X|_U=\tilde{X}|_U$, $Y|_U=\tilde{Y}|_U$, 则

$$(\mathrm{D}_YX)|_U=(\mathrm{D}_{\tilde{Y}}\tilde{X})|_U.$$

证明 引理的结论等价于$(\mathrm{D}_Y\tilde{X})|_U=(\mathrm{D}_YX)|_U$ 和 $(\mathrm{D}_YX)|_U=(\mathrm{D}_{\tilde{Y}}X)|_U$ 两式. 由于这两个式子的证明在本质上是一样的, 只需证明其中的一个即可, 比如证明: $(\mathrm{D}_YX)|_U=(\mathrm{D}_Y\tilde{X})|_U$.

首先, 当 $X=0$ 时有 $X=X-X$; 再根据联络的定义,

$$\mathrm{D}_YX=\mathrm{D}_Y(X-X)=\mathrm{D}_YX-\mathrm{D}_YX=0.$$

即 $\mathrm{D}_YX=0$.

其次, 任意取定一点 $p\in U$, 都有点 p 的开邻域 V, 使得 $\overline{V}$ 是紧的, 并且 $\overline{V}\subset U$. 根据 §1.3 的引理 3.2, 存在 $f\in C^\infty(M)$, 使得

$$f|_V\equiv1,\quad f|_{M\setminus U}\equiv0.$$

显然, $f\cdot(\tilde{X}-X)=0$. 因此,

$$0=\mathrm{D}_Y(f\cdot(\tilde{X}-X))=Y(f)(\tilde{X}-X)+f(\mathrm{D}_Y\tilde{X}-\mathrm{D}_YX).$$

将上式限制在 V 上, 则得 $(\mathrm{D}_Y\tilde{X})|_V=(\mathrm{D}_YX)|_V$. 特别地,

$$(\mathrm{D}_Y\tilde{X})(p)=(\mathrm{D}_YX)(p).$$

由 p 点的任意性, 引理得证.

引理 4.1 刻画了联络 D 的局部性.

推论 4.2 设 (M,D) 是一个仿射联络空间, $U\subset M$ 为非空开集, 则 D 在 U 上有诱导联络 $\mathrm{D}^U:\mathfrak{X}(U)\times\mathfrak{X}(U)\to\mathfrak{X}(U)$, 使得对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ 有

$$\mathrm{D}^U_{(X|_U)}(Y|_U)=(\mathrm{D}_XY)|_U.$$

证明 设 $X,Y\in\mathfrak{X}(U)$. 对于任意的 $p\in U$, 则由 §1.3 的定理 3.3, 存在点 p 的开邻域 V, 以及 $\tilde{X},\tilde{Y}\in\mathfrak{X}(M)$, 使得 $\tilde{X}|_V=X|_V$, $\tilde{Y}|_V=Y|_V$. 令

$$(\mathrm{D}^U_YX)|_V=(\mathrm{D}_{\tilde{Y}}\tilde{X})|_V.$$

由引理 4.1 可知, 上式右端与 X,Y 在 M 上的扩张 $\tilde{X},\tilde{Y}$ 的取法无关, 因而 D^U_YX 在 V 上是完全确定的, 且处处是光滑的. 再由 p 的任意性, D^U_YX 是在 U 上完全确定的光滑切向量场.

根据 D 作为 M 上的联络所满足的条件, 不难验证映射

$$\mathrm{D}^U:\mathfrak{X}(U)\times\mathfrak{X}(U)\to\mathfrak{X}(U)$$

是 U 上的一个联络, 并且满足推论的要求. 证毕.

为方便起见, 以后仍然把 D^U 记为 D.

设 $(U;x^i)$ 是 M 的一个容许局部坐标系, 则由推论 4.2, 可以令

$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma^k_{ji}\frac{\partial}{\partial x^k},\tag{4.1}$$

其中定义在 U 上的函数 Γ_{ji}^k 称为联络 D 在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下 (或关于自然标架场 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$) 的 **(联络) 系数**. 需要指出的是, 在一般情况下 Γ_{ji}^k 关于下指标未必是对称的. 因此, 必须时时注意下指标的书写次序. 对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, 如果

$$X|_U=X^i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad Y|_U=Y^j\frac{\partial}{\partial x^j},$$

则由联络所满足的条件得到

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}_YX)|_U=&\mathrm{D}_{Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=Y^j\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}+X^i\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\\=&Y^j\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j}+X^k\Gamma_{kj}^i\right)\frac{\partial}{\partial x^i},\end{aligned}\tag{4.2}$$

这就是联络 D 在 $(U;x^i)$ 下的局部坐标表达式.

联络系数 Γ_{ij}^k 的坐标变换公式如下: 设 $(\tilde U;\tilde x^i)$ 是 M 的另一个局部坐标系, 相应的联络系数记为 $\tilde\Gamma_{qp}^r$, 即

$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial\tilde x^p}}\frac{\partial}{\partial\tilde x^q}=\tilde\Gamma_{qp}^r\frac{\partial}{\partial\tilde x^r}.$$

由于在 $U\cap\tilde U$ 上

$$\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial\tilde x^p}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\tilde x^p},$$

因此由 (4.2) 式得到

$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\left(\frac{\partial^2\tilde x^r}{\partial x^j\partial x^i}+\frac{\partial\tilde x^q}{\partial x^j}\frac{\partial\tilde x^p}{\partial x^i}\tilde\Gamma_{qp}^r\right)\frac{\partial}{\partial\tilde x^r}.$$

另一方面

$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma_{ji}^k\frac{\partial}{\partial x^k}=\Gamma_{ji}^k\frac{\partial\tilde x^r}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial\tilde x^r}.$$

所以

$$\Gamma_{ji}^k\frac{\partial\tilde x^r}{\partial x^k}=\tilde\Gamma_{qp}^r\frac{\partial\tilde x^q}{\partial x^j}\frac{\partial\tilde x^p}{\partial x^i}+\frac{\partial^2\tilde x^r}{\partial x^j\partial x^i}.\tag{4.3}$$

这与 §2.3 中的 (3.9) 式是一致的.

由联络 D 的局部坐标表达式 (4.2) 可知, D 具有推论 3.4 所述的局部性. 特别地, 对于 M 中任意一条光滑曲线 $\gamma=\gamma(t)$, $t\in(a,b)$, 光滑切向量场 $X\in\mathfrak{X}(M)$ 沿 γ 的协变导数 $\mathrm{D}_{\gamma'}X$ 是有意义的, 并且它仅与 X 沿 γ 的值有关. 因此, 定义在 γ 上的光滑切向量场 $X=X(t)$ 也有沿 γ 的协变导数. 具体地说, 如果 $(U;x^i)$ 是一个局部坐标系,

$$x^i(t)=x^i\circ\gamma(t),\quad X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

且 $X(t)=X(\gamma(t))$, $X^i(t)=X^i(\gamma(t))$, 则

$$\frac{\mathrm{D}X(t)}{\mathrm{d}t}=\mathrm{D}_{\gamma'(t)}X=\left(\frac{\mathrm{d}X^k(t)}{\mathrm{d}t}+X^i\frac{\mathrm{d}x^j(t)}{\mathrm{d}t}\Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_{\gamma(t)}.$$

需要指出的是, 当 (M,g) 是黎曼流形时, 所讨论的联络或协变微分算子 D 是从它的黎曼度量 g 诱导出来的, 此时 D 的联络系数 Γ_{ji}^k 恰好是度量矩阵 (g_{ij}) 的 Christoffel 记号; 但是在一般情形下, D 的联络系数 Γ_{ji}^k 是由 (4.1) 式定义的, 它关于下指标 j,i 未必有对称性. 对于仿射联络空间 (M,D) 而言, 其联络 D 的指定实际上就是在每一个容许的局部坐标系 $(U;x^i)$ 下指定一组光滑函数

$$\Gamma_{ji}^k\in C^\infty(U),\quad 1\le i,j,k\le m,$$

并且要求它们在坐标变换时满足变换规律 (4.3). 注意到 (4.3) 式不是 (1,2) 型张量分量的坐标变换公式, 所以函数组 Γ_{ji}^k 不是张量在局部坐标系下的分量, 这意味着联络 D 不是 M 上的张量场. 另外, 联络 D 所满足的条件 (3) 也说明 D 不具有张量应该具有的 $C^\infty(M)$-线性性质.

定理 4.3 设 (M,D) 是一个仿射联络空间, 对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, 令

$$T(X,Y)=\mathrm{D}_XY-\mathrm{D}_YX-[X,Y],$$

则 T 是 M 上的一个光滑的 (1,2) 型张量场. 这样得到的张量场 T 称为联络 D 或仿射联络空间 (M,D) 的**挠率张量**.

证明 显然, 映射 $T:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ 是反对称的双线性映射. 要证明 T 是张量场, 只要证明 T 关于每一个自变量具有 $C^\infty(M)$-线性性质. 对于任意的 $f\in C^\infty(M)$, 显然有

$$\begin{aligned}T(fX,Y)&=\mathrm{D}_{fX}Y-\mathrm{D}_Y(fX)-[fX,Y]\\&=f\mathrm{D}_XY-Y(f)X-f\mathrm{D}_YX-f[X,Y]+Y(f)X\\&=fT(X,Y).\end{aligned}$$

由于 T 的反对称性, 又有 $T(X,fY)=fT(X,Y)$. 证毕.

定义 4.2 在光滑流形 M 上, 其挠率张量为零的联络 D 称为**无挠联络**.

在 M 的局部坐标系 $(U;x^i)$ 下, 有

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}-\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}=(\Gamma^k_{ji}-\Gamma^k_{ij})\frac{\partial}{\partial x^k},$$

因而, $T=(\Gamma^k_{ji}-\Gamma^k_{ij})\frac{\partial}{\partial x^k}\otimes dx^i\otimes dx^j$. 于是得到下面的命题:

命题 4.4 联络 D 是无挠联络, 当且仅当它在任意一个局部坐标系 $(U;x^i)$ 下的联络系数 Γ^k_{ji} 关于下指标 j,i 是对称的.

在仿射联络空间 (M,D) 中, 联络 D 不仅可以用于求光滑切向量场的协变导数, 而且能够用来定义 M 上任意一个光滑张量场的协变导数. 事实上, 对于 $X\in\mathfrak{X}(M)$, 已有映射

$$X:C^\infty(M)\to C^\infty(M)\ \text{和}\ \mathrm{D}_X:\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M).$$

为了叙述的方便起见, 把前一个映射 X 也记为

$$\mathrm{D}_X:C^\infty(M)\to C^\infty(M).$$

要把 D_X 的作用扩充到 M 上的任意一个光滑张量场, 只要规定:

(1) D_X 在任意一个 (r,s) 型张量场上的作用得到的仍然是一个 (r,s) 型张量场, 即 D_X 在张量场上的作用保持张量的类型不变;

(2) D_X 对于张量积的作用遵循 Leibniz 法则, 即对于 M 上任意两个光滑张量场 K,L 有

$$\mathrm{D}_X(K\otimes L)=\mathrm{D}_XK\otimes L+K\otimes\mathrm{D}_XL;$$

(3) D_X 与张量的缩并运算 C 可交换. 即对于 M 上的张量场 K, 有

$$\mathrm{D}_X(C(K))=C(\mathrm{D}_XK).$$

首先, 把上述原则用于 1 次微分式. 设 $\alpha\in A^1(M)=\mathscr{T}^0_1(M)$, 则 $\mathrm{D}_X\alpha$ 仍然是一个 1 次微分式, 因而是从 $\mathfrak{X}(M)$ 到 $C^\infty(M)$ 的线性映射: 事实上, 对于任意的 $Y\in\mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}_X\alpha)(Y)&=C^1_1(Y\otimes\mathrm{D}_X\alpha)=C^1_1(\mathrm{D}_X(Y\otimes\alpha)-(\mathrm{D}_XY)\otimes\alpha)\\&=\mathrm{D}_X(C^1_1(Y\otimes\alpha))-\alpha(\mathrm{D}_XY)=X(\alpha(Y))-\alpha(\mathrm{D}_XY).\end{aligned}$$

容易验证, 上式右端的表达式关于自变量 Y 确实是 $C^\infty(M)$-线性的, 所以 $\mathrm{D}_X\alpha\in A^1(M)$.

一般地, 设 τ 是 M 上的 (r,s) 型光滑张量场, 则 τ 是一个 $(r+s)$ 重线性映射

$$\tau:\underbrace{A^1(M)\times\cdots\times A^1(M)}_{r\text{个}}\times\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)}_{s\text{个}}\to C^\infty(M),$$

并且对每一个自变量都是 $C^\infty(M)$ 线性的. 按规定 $\mathrm{D}_X\tau$ 仍然是从

$$\underbrace{A^1(M)\times\cdots\times A^1(M)}_{r\text{个}}\times\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)}_{s\text{个}}$$

到 $C^\infty(M)$ 的线性映射, 它的定义是: 对于任意的 $\alpha^1,\cdots,\alpha^r\in A^1(M)$ 和任意的 $X_1,\cdots,X_s\in\mathfrak{X}(M)$,

$$(\mathrm{D}_X\tau)(\alpha^1,\cdots,\alpha^r;X_1,\cdots,X_s)$$

$$
\begin{aligned}
=&X(\tau(\alpha^1,\cdots,\alpha^r,X_1,\cdots,X_s))\\
&-\sum_{a=1}^{r}\tau(\cdots,\mathrm{D}_X\alpha^a,\cdots,X_1,\cdots,X_s)\\
&-\sum_{b=1}^{s}\tau(\alpha^1,\cdots,\alpha^r,\cdots,\mathrm{D}_X X_b,\cdots).
\end{aligned}\tag{4.4}
$$

容易验证，如此定义的 $\mathrm{D}_X\tau$ 对每一个自变量都是 $C^\infty(M)$ 线性的，因而是 M 上的 (r,s) 型光滑张量场.

把对应 $(\tau,X)\in\mathscr{T}_s^r(M)\times\mathfrak{X}(M)\mapsto\mathrm{D}_X\tau\in\mathscr{T}_s^r(M)$ 所确定的映射记为

$$
\mathrm{D}:\mathscr{T}_s^r(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathscr{T}_s^r(M),
$$

它具有下列性质：

(1) $\mathrm{D}_{X+fY}\tau=\mathrm{D}_X\tau+f\mathrm{D}_Y\tau$;

(2) $\mathrm{D}_X(\tau+\lambda\sigma)=\mathrm{D}_X\tau+\lambda\mathrm{D}_X\sigma$;

(3) $\mathrm{D}_X(f\tau)=X(f)\tau+f\mathrm{D}_X\tau$,

其中 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, $\tau,\sigma\in\mathscr{T}_s^r(M)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $f\in C^\infty(M)$. 换言之，D 仍然满足联络的条件. $\mathrm{D}_X\tau$ 称为张量场 τ 沿切向量场 X 的协变导数.

命 $(\mathrm{D}\tau)(X)=\mathrm{D}_X\tau$, 则性质 (1) 说明 $(\mathrm{D}\tau)(X)$ 关于自变量 X 有张量性质，因而，$\mathrm{D}\tau$ 是光滑的 $(r,s+1)$ 型张量场，使得对于任意的 $\alpha^1,\cdots,\alpha^r\in A^1(M)$ 和任意的 $X_1,\cdots,X_s,X\in\mathfrak{X}(M)$, 有

$$
(\mathrm{D}\tau)(\alpha^1,\cdots,\alpha^r,X_1,\cdots,X_s,X)=(\mathrm{D}_X\tau)(\alpha^1,\cdots,\alpha^r,X_1,\cdots,X_s);
$$

以后把 $\mathrm{D}\tau$ 称为张量场 τ 的**协变微分**. 于是，D 是从 $\mathscr{T}_s^r(M)$ 到 $\mathscr{T}_{s+1}^r(M)$ 的映射，是作用在 (r,s) 型光滑张量场上的协变微分算子.

现在来求 $\mathrm{D}\tau$ 的分量表达式. 设 $(U;x^i)$ 是 M 的一个局部坐标系，假定

$$
\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma_{ji}^k\frac{\partial}{\partial x^k}.
$$

对于 $X\in\mathfrak{X}(M)$, 设 $X|_U=X^j\dfrac{\partial}{\partial x^j}$, 则有

$$
\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}X=\left(\frac{\partial X^j}{\partial x^i}+X^k\Gamma_{ki}^j\right)\frac{\partial}{\partial x^j}.
$$

记

$$
X_{,i}^j=\frac{\partial X^j}{\partial x^i}+X^k\Gamma_{ki}^j,
$$

则

$$
\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}X=X_{,i}^j\frac{\partial}{\partial x^j},\quad \mathrm{D}_YX=Y^iX_{,i}^j\frac{\partial}{\partial x^j},
$$

其中

$$
Y\in\mathfrak{X}(M),\quad Y|_U=Y^i\frac{\partial}{\partial x^i}.
$$

设 $\alpha\in A^1(M)$, 则有

$$
\alpha|_U=\alpha_i\mathrm{d}x^i,\ 其中\ \ \alpha_i=\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right).
$$

根据定义式 (4.4) 有

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)&=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)-\alpha\left(\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\\
&=\frac{\partial\alpha_j}{\partial x^i}-\alpha_k\Gamma_{ji}^k\equiv\alpha_{j,i},
\end{aligned}
$$

特别地，

$$
\left(\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\mathrm{d}x^k\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=-\Gamma_{ji}^k.\tag{4.5}
$$

于是

$$
\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\mathrm{d}x^k=-\Gamma_{ji}^k\mathrm{d}x^j,\quad \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\alpha=\alpha_{j,i}\mathrm{d}x^j,\quad \mathrm{D}_Y\alpha=Y^i\alpha_{j,i}\mathrm{d}x^j.
$$

一般地，对于 $\tau\in\mathscr{T}_s^r(M)$, 设它的局部坐标表达式是

$$
\tau|_U=\tau_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes\mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{j_s}.
$$

则从 (4.4) 式得到

$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\tau=\tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,i}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes \mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{j_s},$$

其中

$$\tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,i}=\frac{\partial\tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}}{\partial x^i}+\sum_{a=1}^{r}\tau^{i_1\cdots i_{a-1}ki_{a+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\Gamma^{i_a}_{ki}
-\sum_{b=1}^{s}\tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{b-1}kj_{b+1}\cdots j_s}\Gamma^k_{j_bi},\tag{4.6}$$

并且

$$\mathrm{D}_Y\tau=Y^i\tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,i}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes \mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{j_s},$$

通常称 $\tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,i}$ 为张量 τ 的分量 $\tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 关于 $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 的协变导数. 实际上, $\tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,i}$ 是张量 $\mathrm{D}\tau$ 的分量, 即

$$\mathrm{D}\tau=\tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,i}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes \mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{j_s}\otimes \mathrm{d}x^i.$$

现在假定 (M,g) 是 m 维黎曼流形, D 是 M 上的一个联络. 根据前面的讨论, 对于任意的 $Z\in\mathfrak{X}(M)$, 协变导数 $\mathrm{D}_Zg\in\mathscr{T}^0_2(M)$ 是有意义的, 并且

$$(\mathrm{D}_Zg)(X,Y)=Z(g(X,Y))-g(\mathrm{D}_ZX,Y)-g(X,\mathrm{D}_ZY).\tag{4.7}$$

若设

$$g=g_{ij}\mathrm{d}x^i\otimes \mathrm{d}x^j,\quad g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right),$$

则 $\mathrm{D}g=g_{ij,k}\mathrm{d}x^i\otimes \mathrm{d}x^j\otimes \mathrm{d}x^k$, 其中

$$g_{ij,k}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-g_{lj}\Gamma^l_{ik}-g_{il}\Gamma^l_{jk}.\tag{4.8}$$

定义 4.3 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形, D 是 M 上的一个联络. 如果 $\mathrm{D}g=0$, 即对于任意的 $Z\in\mathfrak{X}(M)$, 都有 $\mathrm{D}_Zg=0$, 则称**联络 D 与黎曼度量 g 是相容的**.

根据 (4.7) 式, (M,g) 上的联络 D 与度量 g 相容的充分必要条件是

$$Z(g(X,Y))=g(\mathrm{D}_ZX,Y)+g(X,\mathrm{D}_ZY),\quad\forall X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M).\tag{4.9}$$

若用分量来表示, 则 (4.9) 式等价于 $g_{ij,k}=0,\forall i,j,k$, 即 g_{ij} 的协变导数恒为零, 或等价地说, (3.12) 式成立.

因此, 定理 3.3 的性质 (4) 和 (5) 说明黎曼流形 (M,g) 上的协变微分算子 D 是与度量 g 相容的无挠联络. 重要的是, 这样的联络是由黎曼度量 g 唯一确定的.

定理 4.5(黎曼几何的基本定理) 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形, 则在 M 上存在唯一的一个与度量 g 相容的无挠联络 D, 称为 (M,g) 的**黎曼联络**或 **Levi-Civita 联络**.

证明 §2.3 的讨论说明在 (M,g) 上存在与 g 相容的无挠联络 D, 它是由 g 的 Christoffel 记号 Γ^k_{ji} 通过 (3.11) 式确定的, 而 Γ^k_{ij} 则由 (3.6) 式给出. 下面证明定理的唯一性部分.

假定 $\tilde{\mathrm{D}}$ 是 M 上另一个与度量 g 相容的无挠联络. 在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下, 设

$$\tilde{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\tilde{\Gamma}^k_{ji}\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

由 $\tilde{\mathrm{D}}$ 的无挠性以及命题 4.4, $\tilde{\Gamma}^k_{ji}=\tilde{\Gamma}^k_{ij}$. 再由 D 与度量 g 的相容性及 (4.8) 式得到

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=g_{lj}\tilde{\Gamma}^l_{ik}+g_{il}\tilde{\Gamma}^l_{jk}.$$

由此可以求得

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right).$$

这说明, $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ 恰好是 (g_{ij}) 的 Christoffel 记号 Γ^k_{ij}, 所以 $\tilde{D} = D$, 唯一性得证.

定理 4.6 设 $D, \tilde{D}$ 分别是黎曼流形 $M, \tilde{M}$ 上的黎曼联络, $\varphi: M \to \tilde{M}$ 是等距, $p \in M$, $\tilde{p} = \varphi(p)$. 则对于任意的 $v \in T_pM$, 以及任意的 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 都有

$$\varphi_*(D_v X) = \tilde{D}_{\varphi_*(v)}\varphi_*(X).$$

换句话说, 黎曼联络在等距下是不变的.

证明留作练习. 如果把 $\varphi_*(X)$ 看作定义在 $\varphi(p) \in \tilde{M}$ 附近的切向量场, 则上面的定理对于局部等距 φ 也是成立的.

§2.5 黎曼流形上的微分算子

在本节, 假定 (M, g) 是 m 维有向黎曼流形. 我们将借助于黎曼联络 D 在 M 上引进若干微分算子, 它们在数学的许多分支学科中扮演着重要的角色.

设 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 则 DX 是 M 上的 (1,1) 型光滑张量场. 将 DX 进行缩并, 便得到 M 上的光滑函数, 称它为光滑切向量场 X 的 **散度**, 并记作 $\operatorname{div} X$, 即有 $\operatorname{div} X = C^1_1(DX)$.

定义 5.1 由 $X \to \operatorname{div} X$ 所确定的线性映射 $\operatorname{div}: \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ 称为黎曼流形 (M, g) 上的 **散度算子**.

为求散度算子 div 的局部坐标表达式, 假定 $(U; x^i)$ 是 M 的一个局部坐标系, 并设 $X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. 则有

$$DX|_U = X^i_{,j} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j = \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + X^k \Gamma^i_{kj}\right) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j,$$

其中 Γ^i_{kj} 是 g_{ij} 的 Christoffel 记号. 于是

$$\operatorname{div} X = X^i_{,i} = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + X^k \Gamma^i_{ki}.$$

可见, 散度算子 div 是作用在切向量场 X 的分量上的一阶线性微分算子.

由 Christoffel 记号的表达式 (3.6) 易知,

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^k},$$

其中 $G = \det(g_{ij})$. 于是

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{X^k}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{G} X^i). \tag{5.1}$$

现设 $f \in C^\infty(M)$, 则 $df \in A^1(M) = \mathscr{T}^0_1(M)$. 借助于黎曼度量 g, df 对应着 M 上的一个光滑切向量场, 记为 ∇f, 使得对于任意的 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 有

$$g(\nabla f, X) = df(X) = X(f). \tag{5.2}$$

切向量场 ∇f 称为光滑函数 f 在黎曼度量 g 下的 **梯度**. 有时, 也用 $\operatorname{grad} f$ 或 $\operatorname{grad}_g f$ 表示光滑函数 f 的梯度.

显然, 由 $f \mapsto \nabla f$ 确定的映射 $\nabla: C^\infty(M) \to \mathfrak{X}(M)$ 是作用在光滑函数上的一阶线性微分算子.

定义 5.2 线性微分算子 $\nabla: C^\infty(M) \to \mathfrak{X}(M)$ 称为黎曼流形 (M, g) 上的 **梯度算子**.

在局部坐标系 $(U; x^i)$ 下, 记 $f_i = f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, 则有

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = f_i dx^i.$$

如果设 $(\nabla f)|_U = f^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 则由 (5.2) 式得到

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} = df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = g\left(\nabla f, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = f^j g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = f^j g_{ji}.$$

所以 $f^j = f_i g^{ij}$, 因而

$$(\nabla f)|_U = f_i g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{5.3}$$

把梯度算子 ∇ 与散度算子 div 复合起来，便得到一个新的线性映射：

$$\Delta = \operatorname{div} \circ \nabla : C^\infty(M) \to C^\infty(M),$$

这是在黎曼流形上的一个非常重要的微分算子.

定义 5.3 线性映射 $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 称为在黎曼流形 (M, g) 上 (或关于黎曼度量 g) 的 **Beltrami-Laplace 算子**.

从定义可知，Δ 是作用在光滑函数上的二阶线性微分算子. 在下面将会看到，它是欧氏空间中的 Laplace 算子在黎曼流形上的推广.

把 (5.1) 和 (5.3) 两式结合起来，便可得到 Δ 的局部坐标表达式如下：

$$\Delta f|_U = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{G}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right). \tag{5.4}$$

例 5.1 求在平面 $\mathbb{R}^2$ 上关于欧氏度量 g 的 Beltrami-Laplace 算子 Δ.

用 (x, y) 和 (r, θ) 分别表示 $\mathbb{R}^2$ 的笛卡尔直角坐标系和极坐标系，则有

$$\begin{aligned} &x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \\ &\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}, \\ &\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} = -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

关于 $\mathbb{R}^2$ 上的标准欧氏度量 g 有

$$\begin{aligned} &g_{11} = g\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = 1, \quad g_{12} = g_{21} = g\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = 0, \\ &g_{22} = g\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = 1; \quad G = \det(g_{ij}) = 1. \end{aligned} \tag{5.6}$$

从 (5.5) 式又可得

$$\begin{aligned} &\tilde{g}_{11} = g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 1, \quad \tilde{g}_{12} = \tilde{g}_{21} = g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) = 0, \\ &\tilde{g}_{22} = g\left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) = r^2, \quad \tilde{G} = \det(\tilde{g}_{ij}) = r^2. \end{aligned} \tag{5.7}$$

从 (5.6) 和 (5.7) 式可以求出

$$\begin{aligned} &g^{11} = g^{22} = 1, \quad g^{12} = g^{21} = 0 \\ &\tilde{g}^{11} = 1, \quad \tilde{g}^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad \tilde{g}^{12} = \tilde{g}^{21} = 0. \end{aligned}$$

于是，对于任意的 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ 有

$$\begin{aligned} \Delta f = &\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{G}g^{11}\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{G}g^{12}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{G}g^{21}\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{G}g^{22}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ = &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}; \end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned} \Delta f = &\frac{1}{\sqrt{\tilde{G}}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{\tilde{G}}\tilde{g}^{11}\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{\tilde{G}}\tilde{g}^{12}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}}}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sqrt{\tilde{G}}\tilde{g}^{21}\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}}}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sqrt{\tilde{G}}\tilde{g}^{22}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \\ = &\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(r \cdot \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \\ = &\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}. \end{aligned}$$

于是，$\mathbb{R}^2$ 上的 Beltrami-Laplace 算子 Δ 在直角坐标系 (x, y) 和极坐标 (r, θ) 下的表达式分别为

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \tag{5.8}$$

其中的第一个式子可以推广到任意维数的欧氏空间 $\mathbb{R}^n$. 事实上，在 $\mathbb{R}^n$ 上关于标准度量的 Beltrami-Laplace 算子在直角坐标系 (x^i) 下的表达式为

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^i}. \tag{5.9}$$

这正是通常的 Laplace 算子.

Beltrami-Laplace 算子还有另外一个来源. 设 $f \in C^\infty(M)$, 则

$$\mathrm{d}f \in A^1(M) = \mathscr{T}_1^0(M).$$

对 $\mathrm{d}f$ 求协变微分得到一个二阶协变张量场，记为 $\mathrm{Hess}\,(f)$, 即

$$\mathrm{Hess}\,(f) = \mathrm{D}(\mathrm{d}f) \in \mathscr{T}_2^0(M).$$

$\mathrm{Hess}\,(f)$ 称为光滑函数 f 的 Hessian.

定义 5.4　线性映射 $\mathrm{Hess} : C^\infty(M) \to \mathscr{T}_2^0(M)$ 称为黎曼流形 (M,g) 上的 **Hessian 算子**.

容易看出， $\mathrm{Hess}(f)$ 是光滑流形 M 上对称的二阶协变张量场. 事实上，对于任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}(\mathrm{Hess}\,(f))(X,Y) &= (\mathrm{D}(\mathrm{d}f))(X,Y) = (\mathrm{D}_Y(\mathrm{d}f))(X)\\ &= Y(\mathrm{d}f(X)) - (\mathrm{d}f)(\mathrm{D}_Y X)\\ &= Y(X(f)) - (\mathrm{D}_Y X)(f)\\ &= (Y\circ X - \mathrm{D}_Y X)(f) = (X \circ Y - \mathrm{D}_X Y)(f)\\ &= (\mathrm{Hess}\,(f))(Y,X),\end{aligned}$$

其中倒数第二个等号利用了黎曼联络 D 的无挠性，即

$$\mathrm{D}_X Y - \mathrm{D}_Y X - [X,Y] \equiv 0.$$

张量场 $\mathrm{Hess}\,(f)$ 在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下的分量为

$$(\mathrm{Hess}\,(f))_{ij} = (\mathrm{Hess}\,(f))\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}$$

$$= f_{i,j}. \tag{5.10}$$

命题 5.1　对于任意的 $f \in C^\infty(M)$, $\Delta f = g^{ij} f_{i,j}$.

证明　利用黎曼联络 D 与度量 g 的相容性，易知

$$g_{ij,k} = g^{ij}{}_{,k} \equiv 0.$$

所以,

$$g^{ij} f_{i,j} = (g^{ij} f_i)_{,j} = f^j_{,j} = \Delta f.$$

证毕.

上式中 $g^{ij} f_{i,j} = g^{ij}(\mathrm{Hess}\,(f))_{ij}$ 称为对称二阶协变张量场 $\mathrm{Hess}\,(f)$ 关于度量 g 的迹，记为 $\mathrm{tr}_g(\mathrm{Hess}\,(f))$, 或 $\mathrm{tr}(\mathrm{Hess}\,(f))$. 于是,

$$\Delta f = \mathrm{tr}_g(\mathrm{Hess}\,(f)) = \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}\,(f)).$$

现在来证明黎曼流形上的散度定理及其重要推论. 如所周知，有向黎曼流形 (M,g) 上的体积元素 $\mathrm{d}V_M$ 是大范围地定义在 M 上的 m 次外微分式，它的局部坐标表达式是

$$(\mathrm{d}V_M)|_U = \sqrt{G}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m,$$

其中 $(U;x^i)$ 是 M 的任意一个与其定向相符的局部坐标系， $G = \det(g_{ij})$.

下面的定理是散度定理在紧致无边情形下的一个特例.

定理 5.2　设 (M,g) 是有向紧致的 m 维无边黎曼流形，则对于任意的 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 有如下的积分公式:

$$\int_M (\mathrm{div}\, X)\mathrm{d}V_M = 0.$$

证明　对于与定向相符的局部坐标系 $(U;x^i)$, 设

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

则由 $\operatorname{div} X$ 的局部表达式 (5.1) 得到

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} X)\mathrm{d}V_M &= \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{G}X^i)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m\\ &= \sum_{i=1}^m \mathrm{d}((-1)^{i+1}\sqrt{G}X^i)\wedge\mathrm{d}x^1\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m. \quad (5.11)\end{aligned}$$

令

$$\omega = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1}\sqrt{G}X^i\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m. \quad (5.12)$$

容易验证：ω 的表达式 (5.12) 与定向相符的局部坐标系 $(U;x^i)$ 的选取无关，因而是大范围地定义在 M 上的 $m-1$ 次外微分式．再由 (5.11) 式得到

$$(\operatorname{div} X)\mathrm{d}V_M = \mathrm{d}\omega.$$

所以，根据 Stokes 定理，

$$\int_M (\operatorname{div} X)\mathrm{d}V_M = \int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M}\omega = 0.$$

定理得证．

对于紧致带边的黎曼流形有更为精细的结果：

定理 5.3 (散度定理)　设 M 是 m 维紧致有向的带边黎曼流形，$\boldsymbol{n}$ 是 ∂M 上指向 M 内部的单位法向量，则对于任意的 $X\in\mathfrak{X}(M)$，下述积分公式成立：

$$\int_M (\operatorname{div} X)\mathrm{d}V_M = -\int_{\partial M} g(\boldsymbol{n},X)\mathrm{d}V_{\partial M},$$

其中 ∂M 具有从 M 诱导的定向，$\mathrm{d}V_{\partial M}$ 为 ∂M 的体积元素．

证明　根据定理 5.2 的证明，需要把 $\omega|_{\partial M}$ 求出来．为此，取与定向相符的局部坐标系 $(U;x^i)$，使得 $U\cap\partial M\neq\emptyset$，$x^m\geq 0$，并且

$$U\cap\partial M = \{p\in U;\ x^m(p)=0\}.$$

这样，在 $U\cap\partial M$ 上，$\{(-1)^m x^1, x^2,\cdots,x^{m-1}\}$ 给出了 ∂M 的与诱导定向相符的局部坐标系．因此，∂M 的体积元 $\mathrm{d}V_{\partial M}$ 在坐标域 $U\cap\partial M$ 上可以表示为

$$\mathrm{d}V_{\partial M} = (-1)^m\sqrt{\tilde{G}}\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{m-1}, \quad (5.13)$$

其中 $\tilde{G}=\det(g_{\alpha\beta})$，$1\leq\alpha,\beta\leq m-1$．

由 ω 的局部表达式 (5.12) 可知

$$\omega|_{U\cap\partial M} = (-1)^{m+1}\sqrt{G}X^m\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{m-1}. \quad (5.14)$$

作为在 M 上沿 ∂M 定义、并且指向 M 的内部的单位切向量场，$\boldsymbol{n}$ 可表示为

$$\boldsymbol{n} = a^i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad a^m>0.$$

现在，

$$\left\{(-1)^m\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{m-1}}\right\}$$

是在 $U\cap\partial M$ 上与 ∂M 的诱导定向相符的自然标架场，由假设得到

$$\begin{aligned} &g\left(\boldsymbol{n},\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) = a^i g_{i\alpha} = 0,\quad 1\leq\alpha\leq m-1,\\ &g(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}) = a^m a^i g_{im} = 1.\end{aligned} \quad (5.15)$$

于是

$$0 = a^i g_{i\alpha}g^{\alpha j} = a^i(\delta_i^j - g_{im}g^{mj}) = a^j - \frac{1}{a^m}g^{mj},$$

即 $a^m a^j = g^{mj}$．令 $j=m$，得 $a^m=\sqrt{g^{mm}}$，因而

$$a^j = \frac{g^{mj}}{\sqrt{g^{mm}}}.$$

将上式代回 (5.15) 的第一式便可得到

$$g_{m\alpha} = -\frac{a^\beta}{a^m}g_{\beta\alpha} = -\frac{g^{\beta m}}{g^{mm}}g_{\beta\alpha}.$$

所以，

$$G = \det \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1\,m-1} & g_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{m-1\,1} & \cdots & g_{m-1\,m-1} & g_{m-1\,m} \\ g_{m1} & \cdots & g_{m\,m-1} & g_{mm} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & * \\ 0 & g_{mm} + \dfrac{g^{\gamma m}}{g^{mm}} \cdot g_{\gamma m} \end{pmatrix}$$

$$= \tilde{G} \cdot \left(g_{mm} + \frac{g^{\gamma m}}{g^{mm}} g_{\gamma m} \right)$$

$$= \tilde{G} \cdot \frac{1}{g^{mm}} = \frac{\tilde{G}}{(a^m)^2},$$

$$\sqrt{G} = \frac{\sqrt{\tilde{G}}}{a^m}. \tag{5.16}$$

另一方面，根据 (5.15) 式，

$$g(\boldsymbol{n}, X) = g\left(\boldsymbol{n}, X^m \frac{\partial}{\partial x^m}\right) = X^m a^i g_{im} = \frac{X^m}{a^m}.$$

结合 (5.13)，(5.14) 以及 (5.16) 三式可得

$$\begin{aligned} \omega|_{U \cap \partial M} &= (-1)^{m+1} \sqrt{\tilde{G}} \frac{X^m}{a^m} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{m-1} \\ &= -g(\boldsymbol{n}, X) \mathrm{d}V_{\partial M}. \end{aligned}$$

再由 Stokes 定理得到

$$\int_M (\operatorname{div} X) \mathrm{d}V_M = \int_{\partial M} \omega = -\int_{\partial M} g(\boldsymbol{n}, X) \mathrm{d}V_{\partial M}.$$

证毕.

作为散度定理的一个直接应用，有下面的重要结论：

定理 5.4 设 (M, g) 是紧致有向的 m 维带边黎曼流形，$\boldsymbol{n}$ 为 ∂M 的指向 M 内部的单位法向量. 则对于任意的 $f, h \in C^\infty(M)$ 有如下的积分公式：

$$\int_M (h\Delta f - f\Delta h) \mathrm{d}V_M = \int_{\partial M} (f\boldsymbol{n}(h) - h\boldsymbol{n}(f)) \mathrm{d}V_{\partial M}, \tag{5.17}$$

其中 ∂M 具有从 M 诱导的定向. (5.17) 式称为 **Green 公式**.

证明 对于任意的 $f, h \in C^\infty(M)$，令 $X = h\nabla f$，则有

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(X) &= g(\nabla h, \nabla f) + h\Delta f, \\ g(\boldsymbol{n}, X) &= g(\boldsymbol{n}, h\nabla f) = h\mathrm{d}f(\boldsymbol{n}) = h\boldsymbol{n}(f). \end{aligned}$$

由定理 5.3，

$$\int_M g(\nabla h, \nabla f) \mathrm{d}V_M + \int_M h\Delta f \mathrm{d}V_M = -\int_{\partial M} h\boldsymbol{n}(f) \mathrm{d}V_{\partial M}.$$

同理，又有

$$\int_M g(\nabla f, \nabla h) \mathrm{d}V_M + \int_M f\Delta h \mathrm{d}V_M = -\int_{\partial M} f\boldsymbol{n}(h) \mathrm{d}V_{\partial M}.$$

把上面两式相减，便得 (5.17) 式. 证毕.

特别地，如果在 Green 公式中令 $h \equiv 1$，则有下面的推论：

推论 5.5 假设同定理 5.4，则对于任意的 $f \in C^\infty(M)$ 有如下的积分公式：

$$\int_M \Delta f \mathrm{d}V_M = -\int_{\partial M} \boldsymbol{n}(f) \mathrm{d}V_{\partial M}. \tag{5.18}$$

特别地，当 $\partial M = \emptyset$ 时有

$$\int_M \Delta f \mathrm{d}V_M = 0. \tag{5.19}$$

除了上面讨论过的几个微分算子以外，在黎曼流形 (M, g) 上还可以定义作用在外微分式上的 Hodge 星算子，余微分算子和 Hodge-Laplace 算子，它们在黎曼流形上的大范围分析理论中扮演着十分重要的角色. 下面对这三个算子作简要的介绍.

为此，首先定义 M 上的外微分式的内积. 对于 $1 \le r \le m$, 设 $\varphi, \psi \in A^r(M)$. 在局部坐标系 $(U; x^i)$ 下，它们可以表示为

$$\varphi|_U = \frac{1}{r!}\varphi_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}, \tag{5.20}$$

$$\psi|_U = \frac{1}{r!}\psi_{j_1\cdots j_r}\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_r}. \tag{5.21}$$

记 $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$, 矩阵 $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, 并设

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{r!}\varphi^{i_1\cdots i_r}\psi_{i_1\cdots i_r} = \sum_{i_1<\cdots<i_r} \varphi^{i_1\cdots i_r}\psi_{i_1\cdots i_r}, \tag{5.22}$$

其中 $\varphi^{i_1\cdots i_r} = g^{i_1j_1}\cdots g^{i_rj_r}\varphi_{j_1\cdots j_r}$. 注意到 (5.22) 式的右端与局部坐标系 $(U; x^i)$ 的选取无关，因此 $\langle \varphi, \psi \rangle$ 是大范围地定义在 M 上的光滑函数；根据 g 的正定性，不难证明，

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = \frac{1}{r!}\varphi^{i_1\cdots i_r}\varphi_{i_1\cdots i_r} \ge 0,$$

并且等号成立当且仅当 $\varphi = 0$. 于是，在 M 是紧致有向的情况下，可以在 $A^r(M)$ 上定义内积 $(\cdot,\cdot)$, 使得对于任意的 $\varphi, \psi \in A^r(M)$,

$$(\varphi, \psi) = \int_M \langle \varphi, \psi \rangle dV_M. \tag{5.23}$$

以后，用 $\|\varphi\|^2$ 表示 $\varphi \in A^r(M)$ 关于内积 $(\cdot,\cdot)$ 的模长，即 $\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi)$.

这样，外微分算子 $\mathrm{d}: A^r(M) \to A^{r+1}(M)$ 成为内积空间之间的一个线性映射，因而存在与之共轭的线性映射 $\mathrm{d}^*: A^{r+1}(M) \to A^r(M)$, 使得对于任意的 $\psi \in A^{r+1}(M)$ 有

$$(\mathrm{d}^*\psi, \varphi) = (\psi, \mathrm{d}\varphi), \quad \forall \varphi \in A^r(M).$$

为了求出线性算子 d^* 的表达式，需要定义 Hodge 星算子 $*: A^r(M) \to A^{m-r}(M)$.

设 $\omega \in A^r(M)$, 则对于 M 上与其定向相符的局部坐标系 $(U; x^i)$, ω 有局部坐标表达式

$$\omega|_U = \frac{1}{r!}\omega_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}.$$

命

$$(*\omega)|_U = \frac{\sqrt{G}}{r!(m-r)!}\delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_m}\omega^{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_m}. \tag{5.24}$$

容易验证，上式右端在保持定向的坐标变换下是不变的. 因此 $*\omega$ 是大范围地定义在 M 上的 $m-r$ 次微分式，即 $*\omega \in A^{m-r}(M)$.

定义 5.5 线性映射 $*: A^r(M) \to A^{m-r}(M)$ 称为黎曼流形 (M, g) 上的 **Hodge 星算子**.

命题 5.6 在 m 维紧致有向黎曼流形 (M, g) 上，Hodge 星算子 $*$ 具有如下的性质：$\forall \varphi, \psi \in A^r(M)$,

(1) $\varphi \wedge *\psi = \langle \varphi, \psi \rangle \mathrm{d}V_M$;

(2) $*\mathrm{d}V_M = 1$, $*1 = \mathrm{d}V_M$;

(3) $*(*\varphi) = (-1)^{r(m+1)}\varphi$;

(4) $(*\varphi, *\psi) = (\varphi, \psi)$.

证明 设在局部坐标系 $(U; x^i)$ 下，φ 与 ψ 的局部坐标表达式为 (5.20) 和 (5.21).

先证 (1). 根据定义直接计算如下：

$$\begin{aligned}
\varphi \wedge *\psi =& \frac{1}{r!} \cdot \frac{\sqrt{G}}{r!(m-r)!}\varphi_{i_1\cdots i_r}\psi^{j_1\cdots j_r}\delta^{1\cdots m}_{j_1\cdots j_m}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r} \wedge \\
&\wedge \mathrm{d}x^{j_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_m} \\
=& \frac{\sqrt{G}}{r!r!(m-r)!}\varphi_{i_1\cdots i_r}\psi^{j_1\cdots j_r}\delta^{1\cdots m}_{j_1\cdots j_m}\delta^{i_1\cdots i_r j_{r+1}\cdots j_m}_{1\cdots r\, r+1\cdots m} \\
&\cdot \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m \\
=& \frac{\sqrt{G}}{r!r!}\varphi_{i_1\cdots i_r}\psi^{j_1\cdots j_r}\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{r!}\varphi_{i_1\cdots i_r}\psi^{i_1\cdots i_r}\cdot\sqrt{G}\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m\\
&=\langle\varphi,\psi\rangle\mathrm{d}V_M.
\end{aligned}
$$

这就证明了 (1).

结论 (2) 是显然的.

再证明 (3). 注意到

$$
*\varphi=\frac{\sqrt{G}}{r!(m-r)!}\delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_m}\varphi^{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_m},
$$

即

$$
(*\varphi)_{i_{r+1}\cdots i_m}=\frac{\sqrt{G}}{r!}\delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_m}\varphi^{i_1\cdots i_r}.
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
(\varphi)=&\frac{\sqrt{G}}{r!(m-r)!}\delta^{1\cdots m}_{j_1\cdots j_m}(*\varphi)^{j_1\cdots j_{m-r}}\mathrm{d}x^{j_{m-r+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_m}\\
=&\frac{(-1)^{r(m-r)}}{r!}\cdot\frac{\sqrt{G}}{(m-r)!}\delta^{1\cdots m}_{j_1\cdots j_m}(*\varphi)^{j_{r+1}\cdots j_m}\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_r}\\
=&\frac{(-1)^{r(m-r)}}{r!}\cdot\frac{G}{r!(m-r)!}\delta^{1\cdots m}_{j_1\cdots j_m}g^{j_{r+1}i_{r+1}}\cdots g^{j_m i_m}\\
&\cdot\delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_m}\varphi^{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_r}\\
=&\frac{(-1)^{r(m-r)}}{r!}\cdot\frac{G}{r!(m-r)!}\delta^{1\cdots m}_{j_1\cdots j_m}\delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_m}g^{i_1k_1}\cdots g^{i_rk_r}\\
&\cdot g^{i_{r+1}j_{r+1}}\cdots g^{i_mj_m}\varphi_{k_1\cdots k_r}\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_r}\\
=&\frac{(-1)^{r(m-r)}}{r!}\cdot\frac{1}{r!(m-r)!}\cdot\delta^{1\cdots m}_{j_1\cdots j_m}\delta^{k_1\cdots k_rj_{r+1}\cdots j_m}_{1\cdots r\,r+1\cdots m}\\
&\cdot\varphi_{k_1\cdots k_r}\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_r}\\
=&\frac{(-1)^{r(m-r)}}{r!}\cdot\frac{1}{r!}\delta^{k_1\cdots k_r}_{j_1\cdots j_r}\varphi_{k_1\cdots k_r}\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_r}\\
=&(-1)^{r(m-r)}\cdot\frac{1}{r!}\varphi_{j_1\cdots j_r}\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_r}=(-1)^{mr+r}\varphi,
\end{aligned}
$$

上面的第五个等号利用了行列式的计算公式 (其中 $k_1\cdots k_rj_{r+1}\cdots j_m$

是 $1\cdots m$ 的一个固定的排列):

$$
\delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_m}g^{i_1k_1}\cdots g^{i_rk_r}g^{i_{r+1}j_{r+1}}\cdots g^{i_mj_m}=G^{-1}\cdot\delta^{k_1\cdots k_rj_{r+1}\cdots j_m}_{1\cdots r\,r+1\cdots m}.
$$

现在证明 (4). 由性质 (1) 和 (3) 可得,

$$
\begin{aligned}
(*\varphi,*\psi)&=\int_M\langle*\varphi,*\psi\rangle\mathrm{d}V_M=\int_M*\varphi\wedge*(*\psi)\\
&=(-1)^{(m-r)r}\int_M*\varphi\wedge\psi=\int_M\psi\wedge*\varphi\\
&=\int_M\langle\psi,\varphi\rangle\mathrm{d}V_M=(\psi,\varphi)=(\varphi,\psi).
\end{aligned}
$$

命题得证.

例 5.2 求 Hodge 星算子 $*$ 在 $\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}$ 上的作用.

解 由于

$$
\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}=\frac{1}{r!}\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_r},
$$

按照 (5.24) 式则有

$$
\begin{aligned}
*(\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r})=&\frac{\sqrt{G}}{r!(m-r)!}\delta^{1\cdots m}_{k_1\cdots k_m}g^{k_1j_1}\cdots g^{k_rj_r}\\
&\cdot\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}\mathrm{d}x^{k_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{k_m}\\
=&\frac{\sqrt{G}}{r!(m-r)!}\sum_{k_1,\cdots,k_m}\delta^{1\cdots m}_{k_1\cdots k_m}\begin{vmatrix}g^{i_1k_1}&\cdots&g^{i_1k_r}\\ \vdots&&\vdots\\ g^{i_rk_1}&\cdots&g^{i_rk_r}\end{vmatrix}\\
&\cdot\mathrm{d}x^{k_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{k_m}\\
=&\sqrt{G}\cdot\sum_{\substack{k_1<\cdots<k_r\\k_{r+1}<\cdots<k_m}}\delta^{1\cdots m}_{k_1\cdots k_m}\begin{vmatrix}g^{i_1k_1}&\cdots&g^{i_1k_r}\\ \vdots&&\vdots\\ g^{i_rk_1}&\cdots&g^{i_rk_r}\end{vmatrix}\\
&\cdot\mathrm{d}x^{k_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{k_m}.
\end{aligned}
$$

定义 5.6 设 (M,g) 是 m 维有向黎曼流形，线性映射

$$\delta=(-1)^{mr+1}*\circ\mathrm{d}\circ*:A^{r+1}(M)\to A^{r}(M)$$

称为 M 上的 **余微分算子**.

显然，$\delta\circ\delta=0$.

定理 5.7 设 (M,g) 是 m 维紧致的有向黎曼流形，则外微分算子 $\mathrm{d}:A^r(M)\to A^{r-1}(M)$ 与余微分算子 $\delta:A^{r+1}(M)\to A^r(M)$ 关于内积 $(\cdot,\cdot)$ 是互为共轭的线性映射，即 $\delta=\mathrm{d}^*$.

证明 设 $\varphi\in A^r(M)$, $\psi\in A^{r+1}(M)$, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\varphi\wedge*\psi)&=\mathrm{d}\varphi\wedge*\psi+(-1)^r\varphi\wedge\mathrm{d}(*\psi)\\&=\mathrm{d}\varphi\wedge*\psi+(-1)^r\cdot(-1)^{mr+r}\varphi\wedge*(*\mathrm{d}*\psi)\\&=\mathrm{d}\varphi\wedge*\psi-\varphi\wedge*(\delta\psi).\end{aligned}$$

由 Stokes 定理得到

$$(\mathrm{d}\varphi,\psi)=\int_M\mathrm{d}\varphi\wedge*\psi=\int_M\varphi\wedge*(\delta\psi)=(\varphi,\delta\psi).$$

证毕.

定义 5.7 设 (M,g) 是 m 维有向黎曼流形，映射 $\tilde{\Delta}=\mathrm{d}\circ\delta+\delta\circ\mathrm{d}:A^r(M)\to A^r(M)$ 称为 M 上的 **Hodge-Laplace 算子**.

下面考虑 Hodge-Laplace 算子 $\tilde{\Delta}$ 在 $C^\infty(M)=A^0(M)$ 上的作用.

由 δ 的定义易知，对于任意的 $f\in C^\infty(M)$, $\delta f=0$, 所以

$$\tilde{\Delta}f=\delta(\mathrm{d}f)=-*\mathrm{d}*\mathrm{d}f,\quad \tilde{\Delta}f\mathrm{d}V_M=*\tilde{\Delta}f=-\mathrm{d}*\mathrm{d}f.$$

设 $(U;x^i)$ 是 M 上与其定向相符的局部坐标系，则有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f|_U&=\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i,\\ *\mathrm{d}f|_U&=\frac{\sqrt{G}}{(m-1)!}\delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_m}g^{i_1j}\frac{\partial f}{\partial x^j}\mathrm{d}x^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_m}\end{aligned}$$

$$=\sqrt{G}\sum_{i=1}^m(-1)^{i+1}\frac{\partial f}{\partial x^j}g^{ji}\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m.$$

因而,

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}fdV_M|_U&=-\mathrm{d}(*\mathrm{d}f)|_U=-\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{G}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m\\&=-\Delta fdV_M|_U.\end{aligned}$$

所以 $\tilde{\Delta}f=-\Delta f$. 这说明 $-\tilde{\Delta}$ 在 $C^\infty(M)$ 上的作用恰好是前面所定义的 Beltrami-Laplace 算子 Δ.

§2.6 联络形式

对于给定的 m 维光滑流形 M, 除了由局部坐标系 $(U;x^i)$ 确定的自然标架场 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 外，人们还常常使用一般的局部标架场 $\{e_i\}$; 其中的每一个 e_i 都是定义在 M 的某个开集 U 上的光滑切向量场，并且对于任意一点 $p\in U$, $\{e_i(p)\}$ 是切空间 T_pM 的基底. 用 $\{\omega^i\}$ 表示与 $\{e_i\}$ 对偶的余切标架场，即 $dp=\omega^ie_i$, $p\in U$(参看 §2.1 的最后一段).

假定 D 是光滑流形 M 上的一个联络，则存在 U 上的一组光滑函数 Γ^k_{ji}, 使得

$$\mathrm{D}_{e_i}e_j=\Gamma^k_{ji}e_k.$$

这组光滑函数 Γ^k_{ji} 称为联络 D 在局部标架场 $\{e_i\}$ 下的联络系数. 令

$$\omega^k_j=\Gamma^k_{ji}\omega^i,$$

则 ω^k_j 是定义在 U 上的一组 1 次微分式，满足

$$\mathrm{D}e_j=\omega^k_je_k.$$

这 m^2 个 1 次微分式 $\{\omega^k_j\}$ 称为联络 D 关于标架场 $\{e_i\}$ 的 **联络形式**.

如果 $\{\tilde{e}_i\}$ 是 U 上的另一个局部标架场，与其对偶的余切标架场记为 $\{\tilde{\omega}^i\}$，则存在光滑函数 $a_i^j \in C^\infty(U)$，使得

$$\tilde{e}_i = a_i^j e_j, \quad \tilde{\omega}^i = b_j^i \omega^j,$$

其中 (b_j^i) 是矩阵 $a = (a_i^j)$ 的逆矩阵.

设 D 在标架场 $\{\tilde{e}_i\}$ 下的联络系数及联络形式分别记为 $\tilde{\Gamma}_{ji}^k$ 和 $\tilde{\omega}_j^k$，即

$$\mathrm{D}_{\tilde{e}_i} \tilde{e}_j = \tilde{\Gamma}_{ji}^k \tilde{e}_k, \quad \tilde{\omega}_j^k = \tilde{\Gamma}_{ji}^k \tilde{\omega}^i.$$

那么，由联络满足的条件得到

$$\tilde{\omega}_i^k a_k^j e_j = \tilde{\omega}_i^k \tilde{e}_k = \mathrm{D}\tilde{e}_i = \mathrm{d}a_i^j e_j + a_i^j \omega_j^k e_k = (\mathrm{d}a_i^j + a_i^k \omega_k^j) e_j,$$

因此

$$a_k^j \tilde{\omega}_i^k = \mathrm{d}a_i^j + \omega_k^j a_i^k. \tag{6.1}$$

(6.1) 式又可改写为

$$\tilde{\omega}_j^i = b_k^i \mathrm{d}a_j^k + b_k^i \omega_l^k a_j^l. \tag{6.2}$$

(6.1) 和 (6.2) 式是联络形式在局部标架场的变换下所满足的变换公式．还可以把上式改写成矩阵表达式：设 $\omega = (\omega_j^i)$, $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_j^i)$ 是由 1 次微分式构成的 m 阶方阵 (规定上指标表示行数，下指标表示列数)，则 (6.1) 与 (6.2) 式等价于

$$\tilde{\omega} = a^{-1}\mathrm{d}a + a^{-1}\omega a. \tag{6.3}$$

特别地，如果 $\{e_i\}$ 和 $\{\tilde{e}_i\}$ 分别是局部坐标系 $(U; x^i)$ 与 $(U; \tilde{x}^i)$ 所对应的自然标架场，即

$$e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \tilde{e}_i = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i},$$

则矩阵 a 就是局部坐标变换的 Jacobi 矩阵，即有

$$a = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right).$$

不难看出，此时的 (6.1) 式和 §2.4 的 (4.3) 式是一致的.

定理 6.1 设 (M, D) 是一个 m 维仿射联络空间，$\{e_i\}$ 是定义在开子集 $U \subset M$ 上的局部标架场，与之对偶的余切标架场记为 $\{\omega^i\}$. 如果 $\{\omega_j^i\}$ 是 D 关于 $\{e_i\}$ 的联络形式，则

$$\mathrm{d}\omega^i - \omega^j \wedge \omega_j^i = \frac{1}{2} T_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k, \tag{6.4}$$

其中 T_{jk}^i 是 D 的挠率张量 T 的分量，即 $T_{jk}^i = \omega^i(T(e_j, e_k))$.

证明 根据第一章的定理 7.2,

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\omega^i - \omega^l \wedge \omega_l^i)(e_j, e_k) &= e_j(\omega^i(e_k)) - e_k(\omega^i(e_j)) - \omega^i([e_j, e_k]) \\ &\quad - \omega^l(e_j)\omega_l^i(e_k) + \omega^l(e_k)\omega_l^i(e_j) \\ &= -\omega_j^i(e_k) + \omega_k^i(e_j) - \omega^i([e_j, e_k]) \\ &= -\Gamma_{jk}^i + \Gamma_{kj}^i - \omega^i([e_j, e_k]) \\ &= \omega^i(\mathrm{D}_{e_j} e_k - \mathrm{D}_{e_k} e_j - [e_j, e_k]) \\ &= \omega^i(T(e_j, e_k)) = T_{jk}^i.\end{aligned}$$

定理得证.

定义 6.1 2 次外微分式 $\Omega^i = \mathrm{d}\omega^i - \omega^j \wedge \omega_j^i$ 称为联络 D 在局部标架场 $\{e_i\}$ 下的**挠率形式**.

推论 6.2 设 (M, D) 是一个 m 维仿射联络空间，则对于 M 上任意一个局部标架场 $\{e_i(p); p \in U\}$，挠率张量 T 可以表示为

$$T|_U = \Omega^i \otimes e_i.$$

即对于任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $T(X,Y)|_U = \Omega^i(X,Y)e_i$.

由此可见，联络的无挠性等价于 $\Omega^i = 0$, $1 \le i \le m$，也就是

$$\mathrm{d}\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i.$$

当 (M,g) 为黎曼流形时，令 $g_{ij}=g(e_i,e_j)$，则联络 D 与度量 g 相容的条件成为

$$\mathrm{d}g_{ij}=\omega_i^k g_{kj}+\omega_j^k g_{ik}. \tag{6.5}$$

特别地，如果 $\{e_i\}$ 是 U 上的单位正交标架场，则 $g_{ij}=\delta_{ij}$，于是相容条件 (6.5) 成为

$$\omega_j^i+\omega_i^j=0.$$

这样，黎曼联络的存在唯一性 (定理 4.5) 就成为下述定理的直接推论：

定理 6.3 设 U 是 m 维光滑流形 M 的开子集，$\{\omega^i\}$ 是定义在 U 上的一个余切标架场，则在 U 上存在唯一的一组 1 次微分式 ω_j^i，$1\le i,j\le m$，满足条件

$$\mathrm{d}\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j^i,\quad \omega_i^j+\omega_j^i=0. \tag{6.6}$$

证明 首先证明满足定理要求的 ω_j^i 是唯一的。注意到 $\mathrm{d}\omega^i$ 是 2 次外微分式，不妨设

$$\mathrm{d}\omega^i=\frac{1}{2}a_{jk}^i\omega^j\wedge\omega^k,\quad a_{jk}^i=-a_{kj}^i.$$

由条件 (6.6)，

$$\omega^j\wedge\left(\omega_j^i-\frac{1}{2}a_{jk}^i\omega^k\right)=0.$$

根据 Cartan 引理，在 U 上存在光滑函数 $b_{jk}^i=b_{kj}^i$，使得

$$\omega_j^i-\frac{1}{2}a_{jk}^i\omega^k=b_{jk}^i\omega^k,$$

因而有

$$\omega_j^i=\frac{1}{2}a_{jk}^i\omega^k+b_{jk}^i\omega^k. \tag{6.7}$$

结合条件 $\omega_j^i+\omega_i^j=0$ 可得到

$$b_{jk}^i+b_{ik}^j=-\frac{1}{2}(a_{jk}^i+a_{ik}^j),$$

$$b_{ki}^j+b_{ji}^k=-\frac{1}{2}(a_{ki}^j+a_{ji}^k),$$

$$b_{ij}^k+b_{kj}^i=-\frac{1}{2}(a_{ij}^k+a_{kj}^i).$$

把上面三个式子的前两个相加，再减去第三式，并利用 b_{jk}^i 关于下指标的对称性和 a_{jk}^i 关于下指标的反对称性，不难得到

$$2b_{ik}^j=a_{kj}^i+a_{ij}^k. \tag{6.8}$$

因此，光滑函数组 b_{jk}^i 是由 a_{jk}^i 唯一确定的．代入 (6.7) 式，则得

$$\omega_j^i=\frac{1}{2}\sum_k(a_{jk}^i-a_{ik}^j+a_{ji}^k)\omega^k. \tag{6.9}$$

因而，满足定理条件 (6.6) 的 1 次微分式 ω_j^i 至多有一组．容易验证，由 (6.9) 式定义的这组 1 次微分式确实满足条件 (6.6)．证毕．

定理 6.3 为我们提供了用活动标架和外微分法求黎曼联络的一条途径．此方法既方便又有效，具有十分重要的实际意义．

例 6.1 求单位球面 $S^n=S^n(1)$ 上黎曼联络的联络形式和联络系数．

解 设 S 是 S^n 上的南极，$U=S^n\backslash\{S\}$．通过球极投影建立 U 上的局部坐标系 (U,ξ^i)(参看本章的例 2.2)．则 S^n 的度量 g 在 U 上的限制为

$$\mathrm{d}s^2\equiv g|_U=\frac{4\sum_i(\mathrm{d}\xi^i)^2}{\left(1+\sum_j(\xi^j)^2\right)^2}.$$

令

$$\omega^i=\frac{2\mathrm{d}\xi^i}{1+\sum\limits_j(\xi^j)^2},$$

则 $\mathrm{d}s^2=\sum_i(\omega^i)^2$．所以，$\{\omega^i\}$ 是 U 上的单位正交余切标架场，与其对偶的单位正交标架场 $\{e_i\}$ 是

$$e_i=\frac{1}{2}\left(1+\sum_j(\xi^j)^2\right)\frac{\partial}{\partial\xi^i},\quad 1\le i\le n.$$

设 $De_i = \omega_i^j e_j$, 则 ω_i^j 必须满足条件

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0.$$

在另一方面，直接计算得

$$d\omega^i = -\frac{4\sum_j \xi^j d\xi^j \wedge d\xi^i}{(1+\sum_l (\xi^l)^2)^2} = \sum_j \omega^j \wedge \left(-\frac{2\xi^j d\xi^i}{1+\sum_l(\xi^l)^2}\right)$$
$$= \sum_j \omega^j \wedge \left(\frac{2\xi^i d\xi^j}{1+\sum_l(\xi^l)^2} - \frac{2\xi^j d\xi^i}{1+\sum_l(\xi^l)^2}\right).$$

由定理 6.3, 在单位正交标架 $\{e_i\}$ 下的联络形式是

$$\omega_j^i = \frac{2}{1+\sum_l(\xi^l)^2}(\xi^i d\xi^j - \xi^j d\xi^i) = \xi^i\omega^j - \xi^j\omega^i.$$

若要求 D 在局部坐标系 $(U;\xi^i)$ 下的联络系数，只要注意到

$$\frac{\partial}{\partial\xi^i} = \frac{2}{1+\sum_l(\xi^l)^2}\cdot e_i,$$

并利用联络 D 所满足的条件，便可得到

$$D\frac{\partial}{\partial\xi^i} = D\left(\frac{2}{1+\sum_l(\xi^l)^2}\cdot e_i\right)$$
$$= d\left(\frac{2}{1+\sum_l(\xi^l)^2}\right)e_i + \frac{2}{1+\sum_l(\xi^l)^2}\omega_i^j e_j$$
$$= \frac{4}{(1+\sum_l(\xi^l)^2)^2}\left(-\sum_j \xi^j d\xi^j e_i + \sum_j(\xi^j d\xi^i - \xi^i d\xi^j)e_j\right)$$
$$= \frac{2}{1+\sum_l(\xi^l)^2}\sum_{j,k}(-\xi^j\delta_{ik} - \xi^i\delta_{jk} + \xi^k\delta_{ij})d\xi^j\cdot\frac{\partial}{\partial\xi^k}.$$

于是 D 在局部坐标系 $(U;\xi^i)$ 下的联络系数是

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{2}{1+\sum_l(\xi^l)^2}(-\xi^j\delta_{ik} - \xi^i\delta_{jk} + \xi^k\delta_{ij}).$$

§2.7　平行移动

在前面各节，已经详细地讨论了光滑流形上的联络的意义和功用；这一节将给出联络的几何描述.

定义 7.1　设 (M,D) 是一个 m 维仿射联络空间，$\gamma:[a,b]\to M$ 是 M 中的一条光滑曲线，$X\in\mathfrak{X}(M)$. 如果沿曲线 γ 有

$$D_{\gamma'(t)}X = 0, \quad \forall t\in[a,b],$$

则称切向量场 X 沿曲线 γ 是**平行**的，或称 X 是沿曲线 γ 的**平行向量场**.

鉴于联络所具有的局部性质，对于任意的光滑切向量场 X, 协变导数 $D_{\gamma'(t)}X$ 仅与 X 在曲线 γ 上的值有关. 所以，在讨论切向量场 X 沿光滑曲线 γ 的平行性时，可以假定 X 只是沿 γ 定义的切向量场 $X = X(t)$.

如果 γ 落在某个局部坐标系 $(U;x^i)$ 内，并且 $X = X(t)$ 是沿 γ 定义的光滑切向量场，令

$$x^i(t) = x^i\circ\gamma(t),\ 1\le i\le m;\quad X(t) = \sum X^i(t)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(t)},$$

则 $\gamma'(t) = \sum_i \frac{dx^i(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}$; 从而

$$D_{\gamma'(t)}X = \sum_k\left(\frac{dX^k(t)}{dt} + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k X^i(t)\frac{dx^j(t)}{dt}\right)\left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{\gamma(t)}. \tag{7.1}$$

因此，切向量场 X 沿 $\gamma(t)$ 平行的充分必要条件是 X 的分量 $X^k(t)$ 满足微分方程组

$$\frac{dX^k(t)}{dt} + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k X^i(t)\frac{dx^j(t)}{dt} = 0, \quad 1\le k\le m. \tag{7.2}$$

为了以后应用的方便，在此引入分段光滑曲线的概念.

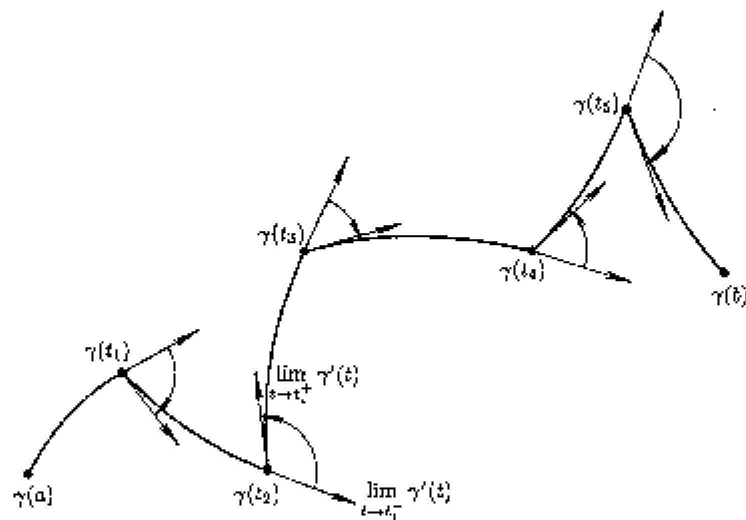


图 1 分段光滑曲线及其顶点和转角

定义 7.2 设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是光滑流形 M 上的一条连续曲线，如果存在区间 $[a,b]$ 的一个划分 $a=t_0<t_1<\cdots<t_{r-1}<t_r=b$，使得对于每一个 i, $1\le i\le r$, $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}:[t_{i-1},t_i]\to M$ 是 M 上的光滑曲线，则称 γ 是 M 上的一条 **分段光滑曲线**. 此时 $\gamma(t_i)(1\le i\le r-1)$ 称为曲线 γ 的 **顶点**; 向量 $\lim\limits_{t\to t_i^-}\gamma'(t)$ 与 $\lim\limits_{t\to t_i^+}\gamma'(t)$ 之间的夹角称为曲线 γ 在顶点 $\gamma(t_i)$ 处的 **转角**(参看图 1).

上述定义中的划分称为分段光滑曲线 γ 的一个 **光滑划分**.

现设 γ 是 M 上的一条分段光滑曲线， X 是 M 上沿曲线 γ 定义的连续切向量场. 如果存在 γ 的一个光滑划分:

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_{N-1}<t_N=b,$$

使得 X 在每一个小区间 $[t_{i-1},t_i]$ 上的限制都光滑地依赖于自变量 t, 则称 X 是沿曲线 γ 定义的 **分段光滑 (切) 向量场**; 如果对于任意的 i,

X 沿光滑曲线段 $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ 都是平行的，则称切向量场 X 沿 γ 是平行的，或称 X 是沿 γ 的 **(分段光滑的) 平行向量场**.

定理 7.1 设 (M,D) 是一个 m 维仿射联络空间， $p\in M$, $\gamma:[0,b]\to M$ 是从点 $p=\gamma(0)$ 出发的一条分段光滑曲线，则对于任意的 $X_0\in T_pM$, 沿曲线 γ 存在唯一的一个分段光滑平行向量场 $X=X(t)$, 满足初始条件 $X(0)=X_0$.

证明 取定区间 $[0,b]$ 的一个光滑划分:

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_N=b,$$

使得对于每一个 α, $1\le\alpha\le N$, 曲线段 $\gamma|_{[t_{\alpha-1},t_\alpha]}$ 包含在点 $\gamma(t_{\alpha-1})$ 的某个局部坐标系 $(U_\alpha;x_\alpha^i)$ 内.

为方便起见，记 $(U;x^i)=(U_1;x_1^i)$. 假定

$$X_0=\sum X_0^i\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(0)}\in T_{\gamma(0)}M,$$

并且 $\gamma|_{[t_0,t_1]}$ 在 $(U;x^i)$ 下的局部坐标表达式是

$$x^i=x^i(t),\quad 1\le i\le m.$$

根据 (7.2), 考虑如下的一阶线性齐次常微分方程组的初值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}X^k}{\mathrm{d}t}+\sum\limits_{i,j}\Gamma_{ij}^kX^i\dfrac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}=0,\\ X^k(0)=X_0^k,\quad 1\le k\le m.\end{cases}\tag{7.3}$$

由线性齐次常微分方程组解的存在唯一性定理，得到满足方程组 (7.3) 的唯一的一组光滑函数

$$X^k=X^k(t),\quad 0\le t\le t_1,\ 1\le k\le m,$$

从而得到一个沿 $\gamma|_{[0,t_1]}$ 的平行向量场

$$X(t)=\sum X^k(t)\frac{\partial}{\partial x^k},\quad 0\le t\le t_1,\quad X(0)=X_0;$$

同时确定了向量 $X_1 = X(t_1) \in T_{\gamma(t_1)}M$. 然后在曲线段 $\gamma|_{[t_1,t_2]}$ 上重复上述过程, 最终可以得到一个沿 γ 定义的、并满足定理要求的分段光滑切向量场 X. 证毕.

根据定理 7.1 的证明知道, 沿曲线 γ 的平行向量场在 γ 的每一个光滑区间上是光滑的.

很明显, 一阶线性齐次常微分方程组 (7.3) 的解构成一个向量空间, 并且它的每一个解是由 T_pM 中的元素 X_0 唯一确定的. 因此, 沿分段光滑曲线 γ 的平行向量场的集合构成一个与 T_pM 同构的向量空间. 特别地, 对于任意取定的 t, $0 \le t \le b$, 沿 γ 的平行向量场给出了从 T_pM 到 $T_{\gamma(t)}M$ 的线性同构 $P_0^t : T_pM \to T_{\gamma(t)}M$, 称为沿曲线 γ 从 $t = 0$ 到 t 的**平行移动**. 这样, 由切向量 $X_0 \in T_pM$ 确定的沿曲线 γ 平行的向量场 X 可以表示为

$$X(t) = P_0^t(X_0), \quad 0 \le t \le b.$$

总之, 在光滑流形上只要指定了联络, 就可以建立平行移动的概念. 反过来, 下面的定理说明, 切向量场的协变导数 (联络) 也可以借助于平行移动来得到.

定理 7.2 设 (M, D) 是一个 m 维仿射联络空间, $\gamma : [0, b] \to M$ 是 M 中任意一条光滑曲线. 则对于任意的 $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\mathrm{D}_{\gamma'(t)}X = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{t+\Delta t}^t(X \circ \gamma(t + \Delta t)) - X \circ \gamma(t)}{\Delta t}. \tag{7.4}$$

证明 记 $p = \gamma(0)$. 在 T_pM 中取定一个基底 $\{e_i\}$, 并且设

$$e_i(t) = P_0^t(e_i),$$

则 $e_i(0) = e_i$, 而且 $e_i(t)$ 是沿 γ 的平行向量场, 即有

$$\mathrm{D}_{\gamma'(t)}e_i(t) \equiv 0.$$

由于 $P_0^t : T_pM \to T_{\gamma(t)}M$ 是线性同构, 故 $\{e_i(t)\}$ 是 $T_{\gamma(t)}M$ 的基底. 于是, X 在 γ 上的限制可以表示为

$$X(\gamma(t)) = \sum_{i=1}^m X^i(t)e_i(t),$$

其中的 $X^i(t)$ 是 t 的光滑函数. 所以,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_{\gamma'(t)}X(\gamma(t)) &= \gamma'(t)(X^i(t)) \cdot e_i(t) + X^i(t) \cdot \mathrm{D}_{\gamma'(t)}e_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\mathrm{d}X^i(t)}{\mathrm{d}t} \cdot e_i(t). \end{aligned}$$

在另一方面, 因为 $P_{t+\Delta t}^t : T_{\gamma(t+\Delta t)}M \to T_{\gamma(t)}M$ 是同构, 所以

$$\begin{aligned} P_{t+\Delta t}^t(X(\gamma(t + \Delta t))) &= P_{t+\Delta t}^t(X^i(t + \Delta t)e_i(t + \Delta t)) \\ &= X^i(t + \Delta t)e_i(t). \end{aligned}$$

从而

$$\frac{P_{t+\Delta t}^t(X \circ \gamma(t + \Delta t)) - X \circ \gamma(t)}{\Delta t} = \frac{X^i(t + \Delta t) - X^i(t)}{\Delta t} e_i(t).$$

令 $\Delta t \to 0$, 则得

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{t+\Delta t}^t(X \circ \gamma(t + \Delta t)) - X \circ \gamma(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{\mathrm{d}X^i(t)}{\mathrm{d}t} e_i(t) = \mathrm{D}_{\gamma'(t)}X(\gamma(t)). \end{aligned}$$

公式 (7.4) 告诉我们, $\mathrm{D}_{\gamma'(t)}X$ 是切向量场 X 在邻近两点 $\gamma(t)$, $\gamma(t + \Delta t)$ 的值之差与 Δt 的商的极限; 只不过 $X(\gamma(t + \Delta t))$ 是 M 在 $\gamma(t+\Delta t)$ 处的切向量, 必须借助于同构 $P_{t+\Delta t}^t$ 把它变为在 $\gamma(t)$ 处的切向量之后, 才能与 $X(\gamma(t))$ 相减. (7.4) 式的另一个解释是: 固定 t 的值, 把 Δt 作为参数, 则当 Δt 变化时, $P_{t+\Delta t}^t(X \circ \gamma(t + \Delta t))$ 是 $T_{\gamma(t)}M$ 中经过 $X(\gamma(t))$ 的一条曲线, 而 $\mathrm{D}_{\gamma'(t)}X$ 恰好是该曲线在点 $X(\gamma(t))$ 处的切向量.

定理 7.3 设 (M,g) 是一个 m 维黎曼流形，D 是它的黎曼联络. 假定 X,Y 是沿光滑曲线 $\gamma:[a,b]\to M$ 平行的两个光滑切向量场，则它们的内积 $g(X,Y)$ 沿曲线 γ 为常数.

证明 由于黎曼联络 D 与黎曼度量 g 是相容的，利用 X,Y 的平行性有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g(X(\gamma(t)),Y(\gamma(t)))) =& g(\mathrm{D}_{\gamma'(t)}X(\gamma(t)),Y(\gamma(t)))\\ &+g(X(\gamma(t)),\mathrm{D}_{\gamma'(t)}Y(\gamma(t)))=0,\end{aligned}$$

最后一个等号是因为 X,Y 沿 γ 是平行的. 因此，

$$g(X(\gamma(t)),Y(\gamma(t)))=\text{常数}.$$

定理得证.

作为定理 7.3 的推论，沿曲线 γ 的平行移动保持切向量的长度和夹角不变；换句话说，对于黎曼流形 (M,g) 的黎曼联络而言，平行移动 $P_{t_0}^{t_1}:T_{\gamma(t_0)}M\to T_{\gamma(t_1)}M$ 是等距线性同构.

§2.8 向量丛上的联络

联络的概念可以推广到任意的向量丛，而光滑流形上的联络恰好是该流形的切丛上的联络. 向量丛上的联络提供了对向量丛的任意光滑截面求微分的手段；同时，平行移动的概念也可以移植到向量丛上来. 因此，向量丛上的联络已经成为现代微分几何中最重要的基本概念之一，有着十分广泛的应用. 本节将对向量丛上的联络理论作简要的介绍.

定义 8.1 设 $\pi:E\to M$ 是光滑流形 M 上的一个向量丛，$\Gamma(E)$ 是该向量丛的光滑截面的集合. 所谓向量丛 E 上的一个**联络**D 是指映射

$$\mathrm{D}:\Gamma(E)\times\mathfrak{X}(M)\to\Gamma(E),$$

$$(\xi,X)\mapsto \mathrm{D}(\xi,X)=\mathrm{D}_X\xi,$$

并且满足以下条件：对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, $\xi,\eta\in\Gamma(E)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, 以及 $f\in C^\infty(M)$,

(1) $\mathrm{D}_{X+fY}\xi=\mathrm{D}_X\xi+f\mathrm{D}_Y\xi$;

(2) $\mathrm{D}_X(\xi+\lambda\eta)=\mathrm{D}_X\xi+\lambda\mathrm{D}_X\eta$;

(3) $\mathrm{D}_X(f\xi)=X(f)\xi+f\mathrm{D}_X\xi$.

此时，$\mathrm{D}_X\xi$ 称为光滑截面 ξ 关于 X 的协变导数. 条件 (1) 表明 $\mathrm{D}_X\xi$ 关于自变量 X 有张量性质，于是可以把联络 D 看作映射 $\mathrm{D}:\Gamma(E)\to\Gamma(E\otimes T^*M)$，使得

$$(\mathrm{D}\xi)(X)=\mathrm{D}_X\xi,\qquad \forall\xi\in\Gamma(E),\ X\in\mathfrak{X}(M).$$

$\mathrm{D}\xi$ 称为光滑截面 ξ 的协变微分.

例 8.1 切丛和余切丛上的联络.

设 (M,D) 是一个仿射联络空间，则由定义知道，D 是 M 的切丛 TM 上的联络.

在另一方面，对于任意的 $\alpha\in\Gamma(T^*M)=A^1(M)$, α 是 M 上的一个 1 次外微分式，根据 (4.4) 式的定义，对于任意的 $X\in\mathfrak{X}(M)$, α 关于 X 的协变导数 $\mathrm{D}_X\alpha$ 由

$$(\mathrm{D}_X\alpha)(Y)=X(\alpha(Y))-\alpha(\mathrm{D}_XY),\quad \forall Y\in\mathfrak{X}(M)$$

定义. 容易验证，由 $(\alpha,X)\mapsto\mathrm{D}_X\alpha$ 确定的映射 $\mathrm{D}:\Gamma(T^*M)\times\mathfrak{X}(M)\to\Gamma(T^*M)$ 是余切丛上的一个联络，称为切丛上的联络 D 在与其对偶的**余切丛上的诱导联络**.

引理 8.1(联络的局部性) 设 D 是向量丛 $\pi:E\to M$ 上的一个联络，$\xi,\eta\in\Gamma(E)$, $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, U 是 M 的开集. 如果

$$\xi|_U=\eta|_U,\quad X|_U=Y|_U,$$

则 $(\mathrm{D}_X\xi)|_U = (\mathrm{D}_Y\eta)|_U$.

这个引理的证明与引理 4.1 类似，留给读者作为练习.

设 $\pi: E \to M$ 是一个秩为 n 的向量丛，U 是 M 的任意一个非空开子集，$\tilde{\pi}$ 是 π 在 $\pi^{-1}(U)$ 上的限制，则有向量丛

$$\tilde{\pi}: E|_U = \pi^{-1}(U) \to U,$$

它是向量丛 E 在 U 上的限制. 利用联络的局部性不难知道，从 E 上的联络 D 可以诱导出 $E|_U$ 上的联络. 如果在 U 上存在 M 的局部切标架场 $\{e_i; 1 \le i \le m\}$，以及向量丛 E 在 U 上的局部标架场 $\{s_\alpha; 1 \le \alpha \le n\}$，那么对于 $X \in \mathfrak{X}(M)$，$\xi \in \Gamma(E)$，可以设

$$X|_U = X^i e_i, \quad \xi|_U = \xi^\alpha s_\alpha,$$

其中 $X^i, \xi^\alpha \in C^\infty(U)$. 根据联络的条件有

$$(\mathrm{D}_X\xi)|_U = \mathrm{D}_{X|_U}(\xi|_U) = X^i \mathrm{D}_{e_i}(\xi^\alpha s_\alpha) = X^i(e_i(\xi^\alpha)s_\alpha + \xi^\alpha \mathrm{D}_{e_i}s_\alpha).$$

假定 $\mathrm{D}_{e_i}s_\alpha = \Gamma^\beta_{\alpha i}s_\beta$，其中 $\Gamma^\beta_{\alpha i} \in C^\infty(U)$，称为联络 D 在标架场 $\{e_i\}$ 及 $\{s_\alpha\}$ 下的联络系数，则

$$(\mathrm{D}_X\xi)|_U = X^i(e_i(\xi^\alpha) + \xi^\beta\Gamma^\alpha_{\beta i})s_\alpha. \tag{8.1}$$

这就是协变导数 $\mathrm{D}_X\xi$ 在局部标架场下的表达式. 若记

$$\omega^\alpha_\beta = \Gamma^\alpha_{\beta i}\omega^i,$$

则 $\mathrm{D}s_\alpha = \omega^\beta_\alpha s_\beta$，并且由 (8.1) 式得

$$(\mathrm{D}\xi)|_U = (\mathrm{d}\xi^\beta + \xi^\alpha\omega^\beta_\alpha)s_\beta. \tag{8.2}$$

这是协变微分 $\mathrm{D}\xi$ 在局部标架场 $\{s_\alpha\}$ 下的表达式. ω^α_β 称为联络 D 在局部标架场 $\{s_\alpha\}$ 下的**联络形式**.

若 $\{\tilde{s}_\alpha\}$ 是向量丛 E 在 U 上的另一个局部标架场，设

$$\tilde{s}_\alpha = a^\beta_\alpha s_\beta, \quad \mathrm{D}\tilde{s}_\alpha = \tilde{\omega}^\beta_\alpha\tilde{s}_\beta. \tag{8.3}$$

则 $a^\beta_\alpha \in C^\infty(U)$，并且在 U 上的每一点处 $\det(a^\beta_\alpha) \ne 0$. 由联络的性质得到

$$\mathrm{D}\tilde{s}_\alpha = \mathrm{d}a^\beta_\alpha s_\beta + a^\beta_\alpha \mathrm{D}s_\beta = (\mathrm{d}a^\beta_\alpha + a^\gamma_\alpha\omega^\beta_\gamma)s_\beta.$$

与 (8.3) 的第二式相比较，可得 $\tilde{\omega}^\gamma_\alpha a^\beta_\gamma = \mathrm{d}a^\beta_\alpha + a^\gamma_\alpha\omega^\beta_\gamma$，即

$$\tilde{\omega}^\beta_\alpha = b^\beta_\gamma \mathrm{d}a^\gamma_\alpha + b^\beta_\gamma\omega^\gamma_\delta a^\delta_\alpha, \tag{8.4}$$

其中 (b^β_α) 是矩阵 $a = (a^\beta_\alpha)$ 的逆矩阵. (8.4) 式是联络形式在局部标架场变换下的变换公式. 与 §2.6 一样，如果假定

$$\omega = (\omega^\beta_\alpha), \quad \tilde{\omega} = (\tilde{\omega}^\beta_\alpha),$$

则 (8.4) 式可表示为

$$\tilde{\omega} = a^{-1}\mathrm{d}a + a^{-1}\omega a. \tag{8.5}$$

一个自然的问题是：在向量丛上，如定义 8.1 所描述的联络是否存在？下面的定理肯定地回答了这一个问题.

定理 8.2 设 M 是满足第二可数公理的 m 维光滑流形，则在任意一个秩为 n 的向量丛 $\pi: E \to M$ 上必定能够指定一个联络.

证明 要在向量丛 E 上构造一个联络，需要用到微分流形论中的单位分解定理. 流形 M 满足第二可数公理保证了在 M 上单位分解的存在性. 于是，有 M 的局部有限的坐标覆盖

$$\mathscr{U} = \{(U_\lambda; x^i_\lambda);\ \lambda \in \mathbb{N}\},$$

以及从属于 $\mathscr{U}$ 的单位分解 $\{f_\lambda \in C^\infty(M)\}$. 根据定义，

$$\mathrm{Supp}\, f_\lambda \subset U_\lambda, \quad 0 \le f_\lambda \le 1,$$

并且 $\sum_\lambda f_\lambda \equiv 1$. 不失一般性, 还可以假定, 对于任意的 $\lambda \in \mathbb{N}$, 向量丛 E 有局部平凡化

$$\varphi_\lambda : U_\lambda \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U_\lambda).$$

在 $\mathbb{R}^n$ 中取定一个基底 $\{\delta_\alpha\}$, 并且设

$$s_\alpha^\lambda(p) = \varphi_\lambda(p, \delta_\alpha), \quad \forall p \in U_\lambda, \quad 1 \leq \alpha \leq n,$$

则 $\{s_\alpha^\lambda\}$ 是向量丛 E 在坐标域 $U_\lambda \subset M$ 上定义的局部标架场. 同时, 对于每一个固定的 $\lambda \in \mathbb{N}$, 设 D^λ 是限制丛 $E|_{U_\lambda}$ 上的平凡联络, 使得对于 U_λ 上的自然切标架场 $\left\{\frac{\partial}{\partial x_\lambda^i}\right\}$ 有

$$D^\lambda_{\frac{\partial}{\partial x_\lambda^i}} s_\alpha^\lambda \equiv 0, \quad 1 \leq i \leq m; \quad 1 \leq \alpha \leq n.$$

换言之, D^λ 是 $E|_{U_\lambda}$ 上使 $\{s_\alpha^\lambda\}$ 成为平行标架场的联络.

对于任意的 $\xi \in \Gamma(E)$, 设 $\xi|_{U_\lambda} = \sum_\alpha \xi_\lambda^\alpha s_\alpha^\lambda$, 则有

$$D^\lambda(\xi|_{U_\lambda}) = D^\lambda\left(\sum_\alpha \xi_\lambda^\alpha s_\alpha^\lambda\right) = \sum_\alpha d\xi_\lambda^\alpha \cdot s_\alpha^\lambda.$$

对每一个固定的 $\lambda \in \mathbb{N}$, 命

$$(f_\lambda D^\lambda \xi)(p) = \begin{cases} f_\lambda(p) \cdot (D^\lambda \xi|_{U_\lambda})(p), & \forall p \in U_\lambda; \\ 0, & \forall p \in M \backslash U_\lambda. \end{cases}$$

易见,

$$f_\lambda D^\lambda \xi \in \Gamma(E \otimes T^*M), \text{ 并且 } \operatorname{Supp}(f_\lambda D^\lambda \xi) \subset U_\lambda.$$

令

$$D = \sum_\lambda f_\lambda D^\lambda,$$

则 $D : \Gamma(E) \to \Gamma(E \otimes T^*M)$, 或等价地,

$$D : \Gamma(E) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(E)$$

是向量丛 E 上的一个联络. 事实上, 对于任意的 $f \in C^\infty(M)$, $\xi \in \Gamma(E)$ 有

$$\begin{aligned} D(f \cdot \xi) &= \sum_\lambda f_\lambda D^\lambda(f\xi) = \sum_\lambda f_\lambda(df \cdot \xi + f D^\lambda \xi) \\ &= \left(\sum_\lambda f_\lambda\right)(df \cdot \xi) + f \sum_\lambda (f_\lambda D^\lambda)\xi = df \cdot \xi + f D\xi. \end{aligned}$$

关于联络的其余条件显然是满足的. 因此, 上面所定义映射 D 确实是 E 上的一个联络. 证毕.

设 D 是向量丛 $\pi : E \to M$ 上的一个联络, $p \in M$. 则由 D 的局部表达式 (8.2) 可知, 对于任意的 $\xi \in \Gamma(E)$, $v \in T_pM$, $D_v\xi \in \pi^{-1}(p)$ 是有定义的. $D_v\xi$ 称为光滑截面 ξ 在 p 点沿切向量 X 的协变导数. 另外, 对于 M 中的光滑曲线 $\gamma : [0, b] \to M$, 如果 $\xi \in \Gamma(E)$ 满足

$$D_{\gamma'(t)}\xi = 0, \quad \forall t \in [0, b],$$

则称光滑截面 ξ 沿曲线 γ 是**平行的**. 当然, 此时只需要 ξ 沿 γ 有定义即可. 类似于仿射联络空间, 对于任意的 $p \in M$, 还可以定义向量 $\xi \in \pi^{-1}(p)$ 沿底流形 M 上从 p 出发的光滑曲线 γ 的平行移动, 从而得到在两个不同点 $p, q \in M$ 处的纤维 $\pi^{-1}(p)$ 和 $\pi^{-1}(q)$ 之间的线性同构, 该同构与连接 p, q 的光滑曲线 γ 有关. 这种推广是显而易见的, 在此不再赘述.

例 8.2 拉回丛上的诱导联络.

设 $(N, \overline{D})$ 是 n 维仿射联络空间, M 是 m 维光滑流形, $f : M \to N$ 是光滑映射, 则根据第一章的例 9.2, 可以构造所谓的拉回丛 $\pi : f^*TN \to M$, 它是 M 上的秩为 n 的向量丛, 其 (光滑) 截面称为 N 中沿 f 定义的 (光滑) 向量场. 借助于联络 $\overline{D}$ 能够在 f^*TN 上引入联络 D, 具体构造如下:

对于任意的 $\xi \in \Gamma(f^*TN)$ 和 $p \in M$, 取 N 在点 $f(p) \in N$ 的开邻域 V 以及 M 在点 p 的邻域 U 使得 $f(U) \subset V$, 并在 V 上取局部标架

场 $\{e_\alpha\}$. 则在邻域 U 上 ξ 可以表示为

$$\xi|_U = \xi^\alpha \cdot e_\alpha,$$

其中 $\xi^\alpha \in C^\infty(U)(1 \le \alpha \le n)$. 对于任意的 $X \in T_pM$, 命

$$D_X\xi = X(\xi^\alpha)e_\alpha(f(p)) + \xi^\alpha(p)\overline{D}_{f_*(X(p))}e_\alpha \in \pi^{-1}(p). \tag{8.6}$$

则上式右端与局部标架场 $\{e_\alpha\}$ 的选取无关. 如果 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 则上式给出的 $D_X\xi$ 是拉回丛 $\pi: f^*TN \to M$ 的光滑截面. 于是, 得到映射 $D: \Gamma(f^*TN) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(f^*TN)$. 不难看出, 映射 D 满足定义 8.1 的所有条件, 因而是向量丛 f^*TN 上的一个联络, 称为在**拉回丛上的诱导联络**.

注意到, 对于任意的 $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f_*(X) \in \Gamma(f^*TN)$. 现在假定 N 是黎曼流形, $\overline{D}$ 是相应的黎曼联络. 则根据联络 D 的构造以及黎曼联络 $\overline{D}$ 的性质, 容易证明下面两个恒等式 (参看本章习题第 52 题):

$$D_Xf_*(Y) - D_Yf_*(X) = f_*([X,Y]), \quad \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M); \tag{8.7}$$

$$X\langle\xi,\eta\rangle = \langle D_X\xi,\eta\rangle + \langle\xi,D_X\eta\rangle, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \xi,\eta \in \Gamma(f^*TN). \tag{8.8}$$

注记 8.1　设 $\gamma: [a,b] \to M$ 是仿射联络空间 $(M,\overline{D})$ 上的正则光滑曲线, 即切向量 γ' 处处不为零, 则 γ 在局部上是嵌入. 因此, 对于任意的 $X \in \Gamma(\gamma^*TM)$, X 在局部上是 M 上的切向量在曲线 γ 上的限制, 因而协变导数 $\overline{D}_{\gamma'(t)}X$ 处处有意义 (参看本章的推论 3.4 和注记 3.2). 根据诱导联络 D 和 $D_{\gamma'(t)}X$ 的定义不难知道

$$D_{\frac{\partial}{\partial t}}X = \overline{D}_{\gamma'(t)}X, \quad \forall X \in \Gamma(\gamma^*TM). \tag{8.9}$$

据此, X 沿曲线 γ 是平行向量场的条件可以改写为 $D_{\frac{\partial}{\partial t}}X = 0$. 特别地, γ 是测地线 $\iff D_{\frac{\partial}{\partial t}}\gamma' = 0$.

例 8.3　联络的直和与张量积.

设 $D^{(i)}$ 是向量丛 $\pi_i: E_i \to M$ 上的联络, $i = 1,2$. 由 E_1 和 E_2 可以构造向量丛的直和 $E_1 \oplus E_2$ 和张量积 $E_1 \otimes E_2$(参看第一章的例 9.4). 现在要说明 $D^{(1)}$ 和 $D^{(2)}$ 在这两个向量丛上有自然的诱导联络.

对于任意的 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 以及 $\forall \xi_i \in \Gamma(E_i)$, $i = 1,2$, 定义

$$D_X(\xi_1 \oplus \xi_2) = D^{(1)}_X\xi_1 \oplus D^{(2)}_X\xi_2,$$
$$D_X(\xi_1 \otimes \xi_2) = D^{(1)}_X\xi_1 \otimes \xi_2 + \xi_1 \otimes D^{(2)}_X\xi_2.$$

直接验证可知, 上面定义的两个映射满足定义 8.1 的条件, 因而是向量丛 $E_1 \oplus E_2$ 和 $E_1 \otimes E_2$ 上的联络, 分别记为 $D^{(1)} \oplus D^{(2)}$ 和 $D^{(1)} \otimes D^{(2)}$.

例 8.4　设 (M,D) 是仿射联络空间, 则对于任意的非负整数 r,s, D 在张量丛 $T^r_s(M)$ 上有诱导联络.

事实上, D 给出了切丛 TM 和余切丛 T^*M 上联络, 而张量丛 $T^r_s(M)$ 是 r 个 TM 与 s 个 T^*M 构成的张量积向量丛 (参看第一章的例 9.4), 所以由例 8.3, D 在 $T^r_s(M)$ 上有自然的诱导联络 D; 此外, 对于任意的 $\tau \in \Gamma(T^r_s(M)) = \mathscr{T}^r_s(M)$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$, 与上述诱导联络 D 相对应的协变导数 $D_X\tau$ 具有局部表达式 (4.6). 细节留给读者作为练习.

习　题　二

1. 设 (M_1,g_1), (M_2,g_2) 是黎曼流形. 由第一章习题第 18 题, 对于任意的 $(p,q) \in M_1 \times M_2$,

$$T_{(p,q)}(M_1 \times M_2) = (\alpha_1)_{*p}(T_pM_1) \oplus (\alpha_2)_{*q}(T_qM_2).$$

M 上的乘积度量 $g = g_1 \times g_2$ 定义为

$$g\left((\alpha_1)_*X_1 + (\alpha_2)_*Y_1, (\alpha_1)_*X_2 + (\alpha_2)_*Y_2\right)$$
$$= g_1(X_1,X_2) + g_2(Y_1,Y_2),$$

$$\forall X_1, X_2 \in T_pM_1, \quad Y_1, Y_2 \in T_qM_2.$$

证明：g 是流形 $M_1 \times M_2$ 上的黎曼度量.

2. 设 (M, g) 是 m 维有向黎曼流形，$(U; x^i)$ 是 M 的与其定向相符的局部坐标系. 令

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right), \quad G = \det(g_{ij}).$$

证明：m 次外微分式 $dV_M = \sqrt{G}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m$ 与局部坐标系 $(U; x^i)$ 的取法无关，因而是大范围地定义在 M 上的 m 次外微分式.

3. 设 $M, \tilde{M}$ 是有向光滑流形，$f: M \to \tilde{M}$ 是光滑同胚. 如果 f 把 M 的定向映射为 $\tilde{M}$ 的定向，即对于任意的 $p \in M$，以及 T_pM 上每一个与定向相符的基底 $\{e_i\}$，$\{f_*(e_i)\}$ 必定是与 $T_{f(p)}\tilde{M}$ 上的定向相符的基底，则称 f 是**保持定向不变的**. 证明：f 保持定向不变当且仅当 f 在 M 和 $\tilde{M}$ 的任意两个与定向相符的局部坐标系下具有恒正的 Jacobi 行列式.

4. 设 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是标准球面，$A: S^n \to S^n$ 是**对径点映射**，即对于任意的 $p \in S^n$，$A(p) = -p$.

(1) 证明：A 是等距.

(2) 定义**自然投影** $\pi: S^n \to \mathbb{R}P^n$ 如下：

$$\forall p \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}, \quad \pi(p) = [p],$$

其中 $[p]$ 是点 p 在 $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ 中的等价类 (参看本章的例 2.4). 试利用结论 (1) 在 $\mathbb{R}P^n$ 上引入黎曼度量，使得映射 π 成为局部等距.

5. 例 2.4 给出了实射影空间 $\mathbb{R}P^n$ 上的一个黎曼度量，试问：在 $\mathbb{R}P^n$ 上体积元素是否有意义？为什么？

6. 设 (M, g) 是 m 维有向黎曼流形，$X \in \mathfrak{X}(M)$. 对于与定向相符的局部坐标系 $(U; x^i)$，令

$$\omega = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\sqrt{G}X^i\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m,$$

其中 $G = \det(g_{ij})$，$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$，$X^i = \mathrm{d}x^i(X)$. 证明：

(1) ω 与局部坐标系 $(U; x^i)$ 的取法无关，因而是在 M 上整体定义的 $m-1$ 次外微分式；

(2) 如果 dV_M 是 M 的体积元素，则有 $i(X)dV_M = \omega$，其中 $i(X)$ 的定义可参看第一章习题第 54 题.

7. 设 $f, g: (a, b) \to \mathbb{R}$ 是光滑函数，$(f')^2 + (g')^2 \neq 0$，$f \neq 0$. 令

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < u < 2\pi + \varepsilon, v \in (a, b)\},$$

其中 $\varepsilon > 0$. 定义映射 $\varphi: U \to \mathbb{R}^3$ 如下：

$$\varphi(u, v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)), \quad (u, v) \in U.$$

$S = \varphi(U)$ 是由 Oxz 平面上的曲线 $t \mapsto (f(t), 0, g(t))$ 绕 Oz 轴旋转一周所得到的旋转曲面. 试证明：

(1) φ 是浸入；

(2) $\mathbb{R}^3$ 在 S 上诱导的度量 g 关于局部坐标系 (u, v) 的分量为

$$g_{11} = f^2, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = (f')^2 + (g')^2.$$

8. 设 $\tilde{M}, M$ 是黎曼流形，$f: \tilde{M} \to M$ 是淹没 (参看第一章的定义 4.5). 对于任意的 $\tilde{p} \in \tilde{M}$，记 $p = \pi(\tilde{p})$，$F_p = f^{-1}(p)$ 称为淹没 f 在点 $p \in M$(或通过点 $\tilde{p}$) 的**纤维**.

(1) 证明：对于任意 $p \in M$，纤维 F_p 是 $\tilde{M}$ 的嵌入子流形. 对于任意的 $\tilde{p} \in F_p$，我们把 $V_{\tilde{p}}(f) = T_{\tilde{p}}(F_p)$ 称为淹没 f 在点 $\tilde{p}$ 的**铅垂切空间**，它在 $T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ 中的正交补空间 $H_{\tilde{p}}(f) = (T_{\tilde{p}}F_p)^{\perp}$ 称为淹没 f 在点 $\tilde{p}$ 的**水平切空间**；$V_{\tilde{p}}(f)$ 和 $H_{\tilde{p}}(f)$ 中的向量分别称为淹没 f 在点 $\tilde{p}$ 的**铅垂切向量**和**水平切向量**.

(2) 如果对于任意的 $\tilde{p} \in \tilde{M}$，以及任意的水平切向量 $\tilde{v} \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$，$v = f_*(\tilde{v})$ 与 $\tilde{v}$ 的长度相等，则称 $f: \tilde{M} \to M$ 为**黎曼淹没**. 证明：M_1 和 M_2 的黎曼乘积 $M_1 \times M_2$(参看例 2.5) 到 M_1, M_2 的自然投影

$$\pi_1: M_1 \times M_2 \to M_1, \quad \pi_2: M_1 \times M_2 \to M_2$$

都是黎曼流设.

9. 设 K 是 $\mathbb{R}^m$ 的子集, $\{g_{ij}; 1 \le i, j \le m\}$ 是定义在 K 上的 m^2 个连续函数, 使得对于任意的 $x \in K$, 矩阵 $(g_{ij}(x))$ 是对称的. 证明:

(1) 如果 $\lambda(x)$ 和 $\Lambda(x)$ 分别是矩阵 $(g_{ij}(x))$ 的最小和最大特征值, 则 λ 和 Λ 都是 K 上的连续函数;

(2) 如果 K 是紧致的, 并且对于任意的 $x \in K$, $(g_{ij}(x))$ 是正定的, 则存在正数 ε 和 δ, 使得对于任意的 $x \in K$ 和任意的 $(v^1, \cdots, v^m) \in \mathbb{R}^m$ 都有

$$\varepsilon \sum_i (v^i)^2 \le \sum_{i,j} g_{ij}(x) v^i v^j \le \delta \sum_i (v^i)^2.$$

10. (**双曲空间的"球极投影"**) 设 $a > 0$, $N = (0, \cdots, 0, -a) \in \mathbb{R}^{n+1}$. 令

$$H^n = \{(x^1, \cdots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1};\ (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 - (x^{n+1})^2 = -a^2,\quad x^{n+1} > 0\},$$

$$B^n(a) = \{(\xi^1, \cdots, \xi^n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1};\ (\xi^1)^2 + \cdots + (\xi^n)^2 < a^2\}.$$

对于任意的 $p = (x^1, \cdots, x^{n+1}) \in H^n$, p 和 N 两点确定一条直线 l_p. 以 $\varphi(p) = (\xi^1, \cdots, \xi^n, 0)$ 记 l_p 与超平面 $x^{n+1} = 0$ 的交点; 显然, 该交点落在 $B^n(a)$ 内, 于是有可逆映射 $\varphi: H^n \to B^n(a)$(见图, 取 $a = 1$).

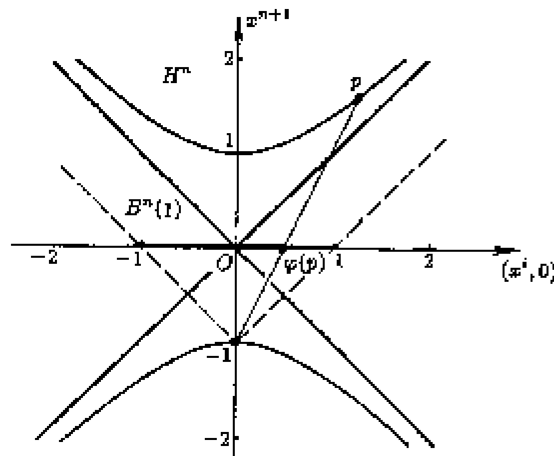
对任意的 $(x^1, \cdots, x^{n+1}) \in H^n$, 令 $(\xi^1, \cdots, \xi^n) = \varphi(x^1, \cdots, x^{n+1})$. 证明:

$$\xi^1 = \frac{ax^1}{a + x^{n+1}}, \quad \cdots, \quad \xi^n = \frac{ax^n}{a + x^{n+1}};$$

$$x^1 = \frac{2a^2\xi^1}{a^2 - \sum_j (\xi^j)^2}, \quad \cdots, \quad x^n = \frac{2a^2\xi^n}{a^2 - \sum_j (\xi^j)^2},$$

$$x^{n+1} = \frac{a(a^2 + \sum_j (\xi^j)^2)}{a^2 - \sum_j (\xi^j)^2}.$$

11. 证明命题 2.2.



第 10 题图

12. 设 M 是嵌入在 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的超曲面, (x^A) 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的直角坐标系. 对于任意的点 $p \in M$, 存在 p 在 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的开邻域 U, 使得 $M \cap U$ 有参数表示:

$$x^A = f^A(u^1, \cdots, u^m), \quad 1 \le A \le m+1, \quad (u^1, \cdots, u^m) \in D \subset \mathbb{R}^m,$$

其中 D 是 R^m 中的开区域.

(1) 证明: M 上的单位法向量场 ξ 的分量是 $\xi^A = W^A/W$, 其中

$$W^A = (-1)^{A+1} \frac{\partial(f^1, \cdots, \widehat{f^A}, \cdots, f^{m+1})}{\partial(u^1, \cdots, u^m)}, \quad W = \left(\sum_A (W^A)^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

(2) 求 $\mathbb{R}^{m+1}$ 在 M 上的诱导黎曼度量 $g = \sum g_{ij} \mathrm{d}u^i \mathrm{d}u^j$, 并证明: $G = \det(g_{ij}) = W^2$;

(3) 证明: M 的体积元素是

$$\mathrm{d}V_M = i(\xi)(\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{m+1})|_M.$$

13. 在 $\mathbb{R}^n$ 中引进等价关系如下: 设 $(u^1, \cdots, u^n), (v^1, \cdots, v^n) \in \mathbb{R}^n$, 则 $(u^1, \cdots, u^n) \sim (v^1, \cdots, v^n)$ 当且仅当存在 n 个整数 $a^1, \cdots, a^n$

使得

$$u^i - v^i = 2\pi a^i, \qquad 1 \le i \le n.$$

命 $T^n = \mathbb{R}^n/\sim$, 记 $\pi: \mathbb{R}^n \to T^n$ 为自然投影, 并且把 $(u^1, \cdots, u^n) \in \mathbb{R}^n$ 的 $\sim$ 等价类记为 $[u^1, \cdots, u^n]$.

(1) 给出 T^n 的光滑结构, 并且在 T^n 上定义黎曼度量 g 使得 $\pi: \mathbb{R}^n \to T^n$ 是局部等距.

(2) 定义映射 $\varphi: T^n \to \mathbb{C}^n$ 使得

$$\varphi([u^1, \cdots, u^n]) = (e^{\sqrt{-1}u^1}, \cdots, e^{\sqrt{-1}u^n}), \quad \forall [u^1, \cdots u^n] \in T^n.$$

将 $\mathbb{C}^n$ 看成 $\mathbb{R}^{2n}$. 证明: φ 是等距映射. 由此可见, 本题所定义的黎曼流形 (T^n, g) 就是例 2.5 中所定义的 n 维平坦环面.

14. 设 $\mathbb{R}^2_+$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的上半平面, 即

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}.$$

对于任意的 $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$, 定义 $f_{x,y} \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R})$, 使得

$$f_{x,y}(t) = yt + x, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

令

$$G = \{f_{x,y};\ (x,y) \in \mathbb{R}^2_+\},$$

它关于从 $\mathbb{R}^2_+$ 诱导的光滑结构和复合运算构成一个 2 维李群. 如果把 G 和 $\mathbb{R}^2_+$ 等同起来, 其单位元素是 $e = (0,1)$.

(1) 设 g 是 G 上的 **左不变黎曼度量**, 即有

$$(L_a)^* g = g, \quad \forall a \in G,$$

其中 L_a 是在 G 上的左移动 (参看第一章习题第 44 题). 记

$$g_{11} = g\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right), \quad g_{12} = g_{21} = g\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$g_{22} = g\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right).$$

证明: 若在单位元 e 处设 $g_{11} = g_{22} = 1, g_{12} = g_{21} = 0$, 那么在任意一点 $(x,y) \in G$, $g_{11} = g_{22} = 1/y^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$. 上述黎曼度量 g 就是所谓的罗氏几何中的度量.

(2) 令 $z = (x,y) = x + \sqrt{-1}\,y$, 并设 $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$, 证明: 由

$$z \mapsto z' = \frac{az+b}{cz+d}$$

给出的变换是从 G 到自身的等距.

15. 举例说明: 黎曼流形之间的局部等距不是等价关系.

16. 设 G 是紧致的 n 维连通李群.

(1) 证明: 在 G 上存在非零的 n 次 **左不变外微分式**, 即存在 $\omega \in A^n(G)$, $\omega \ne 0$, 使得对于任意的 $a \in G$, $(L_a)^*(\omega) = \omega$, 这里 L_a 是 G 上的左移动 (参看第一章习题第 44 题).

(2) 假设 ω 是 G 上的 n 次左不变外微分式, 证明: ω 也是右不变外微分式, 即对于任意的 $a \in G$, 有 $(R_a)^*\omega = \omega$, 其中 R_a 是 G 上的右移动 (参看第一章习题第 44 题).

(3) 设 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 G 上的一个左不变黎曼度量, ω 是 G 上的一个非零的 n 次左不变外微分式, 它给出了 G 的定向. 定义 (其中的 x 是积分变量)

$$(u,v)|_y = \int_G \langle (R_x)_{*y}(u), (R_x)_{*y}(v)\rangle_{yx}\, \omega(x),$$
$$\forall u, v \in T_yG; \quad \forall y \in G.$$

证明: 上面定义的 $(\cdot,\cdot)$ 是 G 上的 **双不变黎曼度量**, 即 $g = (\cdot,\cdot)$ 是 G 上的对称正定的二阶协变张量场, 并且满足

$$L_x^* g = g, \quad R_x^* g = g, \quad \forall x \in G.$$

(双不变黎曼度量的存在性的另一个证明方法可以参看参考文献 [14, 第 246 页].)

17. 设 D 是黎曼流形 M 上的黎曼联络，证明：对于任意的 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$，

$$
\begin{aligned}
2\langle \mathrm{D}_X Y, Z\rangle = & X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\
& - \langle [X, Y], Z\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle.
\end{aligned}
$$

反过来，由上式确定的映射 $\mathrm{D}: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ 是 M 上的无挠联络并与度量 $\langle\ ,\ \rangle$ 相容. 这个习题给出了黎曼联络的存在唯一性定理的另一个证明.

18. 设 D 是李群 G 上关于双不变黎曼度量 g(参看本章习题第 16 题) 的黎曼联络，证明：

(1) 对于 G 上的每一个左不变向量场 X，有 $\mathrm{D}_X X = 0$；

(2) 对于 G 上的任意两个左不变向量场 X, Y，

$$
\mathrm{D}_X Y = \frac{1}{2}[X, Y].
$$

19. 设 $\mathrm{D}, \tilde{\mathrm{D}}$ 分别是黎曼流形 $M, \tilde{M}$ 上的黎曼联络，$\varphi: M \to \tilde{M}$ 是局部等距，$p \in M$，$\tilde{p} = \varphi(p)$. 证明：对于任意的 $v \in T_pM$，以及任意的 $X \in \mathfrak{X}(M)$，有

$$
\varphi_*(\mathrm{D}_v X) = \tilde{\mathrm{D}}_{\varphi_*(v)} \varphi_*(X).
$$

因此，局部等距保持黎曼流形的黎曼联络 (即 Levi-Civita 联络) 不变. 如果把题目中的条件 "局部等距" 换为 "等距浸入"，结论是否成立？为什么？

20. 设 M 是 m 维光滑流形，g 和 $\tilde{g}$ 是 M 上的两个黎曼度量. 如果存在光滑的正函数 $\lambda \in C^\infty(M)$，使得 $\tilde{g} = \lambda^2 g$，则 g 和 $\tilde{g}$ 互称为**共形的黎曼度量**，简称为**共形度量**.

(1) 假定 $(U; x^i)$ 是 M 的容许局部坐标系，证明：共形的黎曼度量 g 和 $\tilde{g}$ 的 Christoffel 记号 Γ_{ij}^k，$\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ 满足如下的关系式：

$$
\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \delta_i^k \frac{\partial}{\partial x^j}(\ln\lambda) + \delta_j^k \frac{\partial}{\partial x^i}(\ln\lambda) - g_{ij} g^{kl} \frac{\partial}{\partial x^l}(\ln\lambda).
$$

特别地，如果 $\lambda = e^\rho$，$\rho \in C^\infty(M)$，则上式成为

$$
\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \delta_i^k \frac{\partial \rho}{\partial x^j} - \delta_j^k \frac{\partial \rho}{\partial x^i} - g_{ij} g^{kl} \frac{\partial \rho}{\partial x^l}.
$$

(2) 设 Δ_g 和 $\Delta_{\tilde{g}}$ 分别是黎曼度量 g 和 $\tilde{g} = \lambda^2 g$ 的 Beltrami-Laplace 算子，利用 (1) 的结论证明：

$$
\Delta_{\tilde{g}}(f) = \lambda^{-2}\left(\Delta_g(f) + (m-2) g(\nabla(\ln\lambda), \nabla f)\right), \quad \forall f \in C^\infty(M).
$$

21. (**共形度量的联络**) 设 M 是微分流形，g 与 $\tilde{g}$ 是 M 上的两个互为共形的黎曼度量，即有光滑函数 $\rho \in C^\infty(M)$，使得 $\tilde{g} = e^{2\rho} g$. 假设 D 和 $\tilde{\mathrm{D}}$ 分别是 M 上关于 g 和 $\tilde{g}$ 的黎曼联络. 证明：

$$
\tilde{\mathrm{D}}_X Y = \mathrm{D}_X Y - S(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),
$$

其中

$$
S(X, Y) = X(\rho)Y + Y(\rho)X - g(X, Y)\mathrm{grad}_g(\rho);
$$

利用本题重新证明上面第 20 题的结论 (2).

22. 设 g 是光滑流形 M 上的一个光滑、对称的二阶协变张量场 g. 如果 g 是非退化的，则称 g 为**伪黎曼度量**；特别地，正定的伪黎曼度量就是通常的黎曼度量. 具有指定的伪黎曼度量 g 的光滑流形 M 称为**伪黎曼流形**，并记为 (M, g)；如果 M 上的联络 D 和伪黎曼度量 g 满足 (4.9) 式，则称 D 是伪黎曼度量 g 的**相容联络**.

(1) 证明：在伪黎曼流形 (M, g) 上存在唯一的一个与 g 相容的无挠联络，称为 M 上的**伪黎曼联络**.

(2) 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上定义

$$
\begin{aligned}
& g(x, y) = (x, y)_1 = x^1y^1 + \cdots + x^ny^n - x^{n+1}y^{n+1}, \\
& \forall x = (x^1, \cdots, x^{n+1}),\ y = (y^1, \cdots, y^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1},
\end{aligned}
$$

则 g 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的伪黎曼度量 (称为 **Lorentz 度量**)，因而 $(\mathbb{R}^{n+1}, g)$ 是一个伪黎曼流形，称为 $n+1$ 维 **Lorentz 空间**，记为 $\mathbb{R}_1^{n+1}$ 或 L^{n+1}. 证

明：$\mathbb{S}_1^{n-1}$ 上的平行移动与 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上关于标准黎曼度量的平行移动是一致的.

23. 设 U 是 m 维黎曼流形 M 的一个非空开子集，$X \in \mathfrak{X}(U)$，$\varphi(t,p)$ 是由 X 确定的**局部单参数变换群**(参看参考文献 [3, 定义 3.3, 第 140 页], 或 [14, 第 134~135 页].), 即对于任意的 $p \in M$, $\varphi(t,q)$ 是初值问题

$$\frac{\partial \varphi(t,p)}{\partial t} = X|_{\varphi(t,p)}, \quad \varphi(0,p) = p$$

的解. 如果对于任意的 t, 由 $p \mapsto \varphi_t(p) = \varphi(t,p)$ 给出的映射 φ_t 都是等距，则称 X 是 M 上的一个 **Killing 向量场**(或**无穷小等距**).

(1) 设 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 证明：X 是 Killing 向量场的充分必要条件是

$$\langle \mathrm{D}_Y X, Z\rangle + \langle \mathrm{D}_Z X, Y\rangle = 0, \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

上述方程称为 **Killing 方程**.

(2) 设 M, N 是黎曼流形，$f: M \to N$ 为等距，$X \in \mathfrak{X}(M)$; 证明：$f_*(X)$ 是 N 上的 Killing 向量场当且仅当 X 是 M 上的 Killing 向量场.

(3) 设 $p \in M$, X 是 M 上的一个 Killing 向量场，并且 $X(p) \neq 0$. 证明：存在点 p 的一个局部坐标系 $(U; x^i)$, 使得黎曼度量 g 在 $(U; x^i)$ 下的系数 g_{ij} 与 x^m 无关.

(4) 求 $\mathbb{R}^n$ 上的 Killing 向量场.

24. 设 M_1 和 M_2 是两个黎曼流形，$\mathrm{D}^{(1)}$ 和 $\mathrm{D}^{(2)}$ 分别是 M_1 和 M_2 上的黎曼联络. 令 $M = M_1 \times M_2$ 是黎曼积流形 (参看本章的例 2.5). 设 $(U; u^i)$ 是 M_1 的局部坐标系，$(V; v^\alpha)$ 是 M_2 的局部坐标系，命

$$\mathrm{D}^{(1)}_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^j} = \Gamma^{(1)k}_{ji} \frac{\partial}{\partial u^k}, \qquad \mathrm{D}^{(2)}_{\frac{\partial}{\partial v^\alpha}} \frac{\partial}{\partial v^\beta} = \Gamma^{(2)\gamma}_{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial v^\gamma}.$$

于是 $(U \times V; u^i, v^\alpha)$ 是 M 上的一个局部坐标系，自然标架为

$$\left\{(p,q); \left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_{(p,q)}, \left.\frac{\partial}{\partial v^\alpha}\right|_{(p,q)}\right\},$$

其中对于任意固定的 $q \in V$,

$$\left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_{(p,q)} = (\alpha_1)_{*p}\left(\left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_p\right),$$

对于任意固定的 $p \in U$,

$$\left.\frac{\partial}{\partial v^\alpha}\right|_{(p,q)} = (\alpha_2)_{*q}\left(\left.\frac{\partial}{\partial v^\alpha}\right|_q\right).$$

上面所用的记号可以参看第一章习题第 18 题. 证明：M 上的黎曼联络 D 由下列各式给出：

$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^j} = (\Gamma^{(1)k}_{ji} \circ \pi_1)\frac{\partial}{\partial u^k},$$
$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial v^\alpha}} \frac{\partial}{\partial v^\beta} = (\Gamma^{(2)\gamma}_{\beta\alpha} \circ \pi_2)\frac{\partial}{\partial v^\gamma},$$
$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial v^\alpha}} \frac{\partial}{\partial u^i} = \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial v^\alpha} = 0.$$

25. (**黎曼淹没的联络**) 设 $f: \tilde{M} \to M$ 是黎曼淹没 (参看本章习题第 8 题), $\tilde{p} \in \tilde{M}$. 易知，切空间 $T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ 有如下的直和分解：

$$T_{\tilde{p}}\tilde{M} = (T_{\tilde{p}}\tilde{M})^h \oplus (T_{\tilde{p}}\tilde{M})^v,$$

其中的 $(T_{\tilde{p}}\tilde{M})^h$ 和 $(T_{\tilde{p}}\tilde{M})^v$ 分别是 $\tilde{M}$ 在 $\tilde{p}$ 点的水平切空间和铅垂切空间. 设 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 则 X 在 $\tilde{M}$ 中的**水平提升**指的是 $\tilde{M}$ 上的水平切向量场 $\overline{X}$, 满足条件

$$f_{*\tilde{p}}(\overline{X}(\tilde{p})) = X_{f(\tilde{p})}, \quad \forall \tilde{p} \in \tilde{M}.$$

(1) 证明：每一个光滑向量场 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 有唯一的水平提升 $\overline{X} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$;

(2) 设 D 和 $\tilde{\mathrm{D}}$ 分别为 M 和 $\tilde{M}$ 上的黎曼联络，证明：

$$\tilde{\mathrm{D}}_{\overline{X}}\overline{Y} = \overline{\mathrm{D}_X Y} + \frac{1}{2}[\overline{X}, \overline{Y}]^v, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

其中 $(\cdots)^v$ 是指向量 $(\cdots)$ 的铅垂分量;

(3) $[\overline{X}, \overline{Y}]^v(\tilde{p})$ 仅与 X, Y 以及 $\overline{X}(\tilde{p})$ 和 $\overline{Y}(\tilde{p})$ 有关.

26. 设 (M,D) 是仿射联络空间，φ 是 M 到自身的微分同胚. 如果对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ 有 $\mathrm{D}_{\varphi_*(X)}\varphi_*(Y)=\varphi_*(\mathrm{D}_XY)$，则称 φ 是 M 上的一个**仿射变换**. 假设 D 是欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 关于标准度量的黎曼联络，试求 $(\mathbb{R}^m,\mathrm{D})$ 上的仿射变换.

27. 设 (M,D) 是仿射联络空间，$\{e_i\}$ 是 M 上的局部切标架场，$\{\omega^i\}$ 是与之对偶的余切标架场，即 $\omega^i(e_j)=\delta^i_j$. 证明：如果 D 是无挠联络，则对于 M 上任意的 r 次外微分式 θ 有

$$\mathrm{d}\theta=\sum_i\omega^i\wedge\mathrm{D}_{e_i}\theta.$$

28. 设 (M,D) 是仿射联络空间，$\theta\in A^r(M)$. 证明：如果 D 是无挠联络，则对于任意的 $X_1,\cdots,X_{r+1}\in\mathfrak{X}(M)$,

$$(\mathrm{d}\theta)(X_1,\cdots,X_{r+1})=\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}(\mathrm{D}_{X_i}\theta)(X_1,\cdots,\widehat{X_i},\cdots,X_{r+1}).$$

29. 设 $S^3\subset\mathbb{R}^4$ 是单位球面，$(x^1,\cdots,x^4)$ 是 $\mathbb{R}^4$ 中的直角坐标系，在 $\mathbb{R}^4$ 上定义三个的光滑切向量场如下：

$$X_1=(-x^2,x^1,x^4,-x^3),\quad X_2=(-x^3,-x^4,x^1,x^2),$$
$$X_3=(-x^4,x^3,-x^2,x^1).$$

(1) 证明：$[X_1,X_2]=2X_3,[X_2,X_3]=2X_1,[X_3,X_1]=2X_2$.

(2) 令

$$e_1=\frac{1}{2}X_1|_{S^3},\quad e_2=\frac{1}{2}X_2|_{S^3},\quad e_3=\frac{1}{2}X_3|_{S^3}.$$

证明：$\{e_1,e_2,e_3\}$ 是大范围地定义在 S^3 上的光滑标架场，并且有

$$[e_1,e_2]=e_3,\quad [e_2,e_3]=e_1,\quad [e_3,e_1]=e_2.$$

(3) 把 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 看作单位正交标架场便在 S^3 上确定了一个黎曼度量 g. 试求 g 的 Levi-Civita 联络.

30. 设 (M,g) 是 m 维有向黎曼流形，$\omega\in A^r(M)$. 假定在与定向相符的局部坐标系 $(U;x^i)$ 下，ω 具有如下的表达式

$$\omega|_U=\frac{1}{r!}\omega_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}.$$

证明：$*\omega$ 的定义式 (5.24) 的右端与局部坐标系 $(U;x^i)$ 的选取无关.

31. $\mathbb{R}^3$ 上的直角坐标系 (x,y,z) 与球坐标系 (r,φ,θ) 之间有如下的变换公式：

$$x=r\cos\varphi\cos\theta,\quad y=r\cos\varphi\sin\theta,\quad z=r\sin\varphi.$$

试求 Beltrami-Laplace 算子 Δ 在球坐标系下的表达式.

32. 设 Δ 和 Δ_1 分别是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 和 S^m 关于标准度量的 Beltrami-Laplace 算子. 如果 $(x^1,\cdots,x^{m+1})$ 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 上的笛卡尔直角坐标系，命

$$r=\sqrt{(x^1)^2+\cdots+(x^{m+1})^2},$$

则 $\mathbb{R}^{m+1}$ 上的光滑函数 $f(x^1,\cdots,x^{m+1})$ 可以表示为 $f(r\cdot p)$, 其中 $p\in S^m$. 证明：当 $r>0$ 时，下述关系式成立：

$$\Delta f=\frac{\partial^2f}{\partial r^2}+\frac{m}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Delta_1f,$$

在这里 Δ_1f 是把 $f(r\cdot p)$ 作为 $p\in S^m$ 的函数所求的 Laplacian.

33. 在 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 中令

$$\alpha=\frac{x^1\mathrm{d}x^1+\cdots+x^n\mathrm{d}x^n}{((x^1)^2+\cdots+(x^n)^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

求 $*\alpha$ 并证明 $*\alpha$ 是闭微分式 (参看第一章习题第 63 题).

34. 设 M 是 m 维有向黎曼流形，dV_M 是 M 的体积元，$X\in\mathfrak{X}(M)$, $i(X)dV_M\in A^{m-1}(M)$ 是 X 与 m 次外微分式 dV_M 的内乘 (参看第一章习题第 54 题), 即

$$(i(X)dV_M)(X_1,\cdots,X_{m-1})=dV_M(X,X_1,\cdots,X_{m-1}),$$

$$\forall X_1, \cdots X_{m-1} \in \mathfrak{X}(M).$$

证明：$\mathrm{d}(i(X)dV_M) = \mathrm{div}\,(X) \cdot dV_M$.

35. 设 (M,g) 是有向黎曼流形，D 是 M 上的黎曼联络.

(1) 如果 $\{e_i\}$ 是 M 上的一个与定向相符的局部光滑切标架场，并设 $g_{ij} = g(e_i, e_j)$，矩阵 $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$. 证明：余微分算子 δ 可以表示为

$$\delta\alpha = -g^{ij}(i(e_j)\mathrm{D}_{e_i}\alpha),\ \forall \alpha \in A^{r+1}(M),$$

即对于任意的 $X_1, \cdots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$,

$$(\delta\alpha)(X_1, \cdots, X_r) = -g^{ij}(\mathrm{D}_{e_i}\alpha)(e_j, X_1, \cdots, X_r);$$

(2) 对于任意的 $\alpha \in A^{r+1}(M)$, 利用上面的表达式进一步写出 $\delta\alpha$ 关于对偶余切标架场 $\{\omega^i\}$ 的表达式;

(3) 对于任意的 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 设 α_X 是由下式确定的 1 次微分式:

$$\alpha_X(Y) = g(X, Y),\ \ \forall Y \in \mathfrak{X}(M),$$

证明：X 的散度 $\mathrm{div}\,X = -\delta(\alpha_X)$.

36. **证明如下的 Hopf 定理**: 设 M 是紧致无边的可定向连通黎曼流形. 如果 $f \in C^\infty(M)$ 是 M 上的 **次调和函数**, 即满足 $\Delta f \geq 0$, 则 f 为常值函数. 特别地，如果 f 是 M 上的 **调和函数**(即 $\Delta f = 0$), 则 f 是常值函数.

37. 设 M 是 m 维黎曼流形，$p \in M$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, 并且 $X(p) \neq 0$. 如果 $(U; t, x^2, \cdots, x^m)$ 是 M 在 p 点的一个局部坐标系，使得

$$X = \frac{\partial}{\partial t},\ \ dV_M = g\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m,$$

证明：

$$i(X)dV_M = g\mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m,$$

并由此说明 $\mathrm{div}\,X = \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial g}{\partial t}$.

38. 设 $\{e_i\}$ 是黎曼流形 M 上的一个单位正交的局部标架场.

(1) 证明：对于任意的 $f \in C^\infty(M)$, $\nabla f = \sum_i e_i(f)e_i$;

(2) 证明：对于任意的 $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\mathrm{div}\,X = \sum_i \langle \mathrm{D}_{e_i}X, e_i \rangle$;

(3) 利用 (1) 和 (2) 重新证明等式

$$\mathrm{div}\,(\nabla f) = -\tilde{\Delta} f,\ \ \forall f \in C^\infty(M),$$

其中 $\tilde{\Delta}$ 是 Hodge-Laplace 算子.

39. 设 (M,g) 是紧致的黎曼流形，d 和 δ 分别是 M 上的外微分算子和余微分算子，$\tilde{\Delta} = \mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d}$ 是 M 上的 Hodge-Laplace 算子. 对于 $\omega \in A^r(M)$, 如果 $\tilde{\Delta}\omega = 0$, 则称 ω 是 M 上的 r 次 **调和形式**. 设 H^r 是 M 上的 r 次调和形式的集合，$(\cdot,\cdot)$ 是由 (5.23) 式定义的内积，则 $A^r(M)$ 关于内积 $(\cdot,\cdot)$ 有如下的正交分解 (**Hodge 分解定理**):

$$A^r(M) = \mathrm{d}(A^{r-1}(M)) \oplus \delta(A^{r+1}(M)) \oplus H^r.$$

上述 Hodge 定理的详细证明可以参看参考文献 [46, 第 223~225 页].

(1) 证明：$\omega \in A^r(M)$ 是调和形式当且仅当 $\mathrm{d}\omega = \delta\omega = 0$;

(2) 证明：$\tilde{\Delta}(A^r(M)) = \mathrm{d}(A^{r-1}(M)) \oplus \delta(A^{r-1}(M))$, 从而根据上面的 Hodge 定理，下述的分解式成立:

$$A^r(M) = \tilde{\Delta}(A^r(M)) \oplus H^r = \mathrm{d}\delta(A^r(M)) \oplus \delta\mathrm{d}(A^r(M)) \oplus H^r.$$

40. 令 $Z^r(M) = \{\omega \in A^r(M);\ \mathrm{d}\omega = 0\}$. 利用 Hodge 分解定理证明：$Z^r(M) = H^r \oplus \mathrm{d}(A^{r-1}(M))$.

41. 利用定理 6.3 证明黎曼联络的存在唯一性 (即定理 4.5).

42. 设 $\mathbb{R}^3$ 中曲面 $S: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2)$ 的第一、第二基本形式分别为

$$I = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j,\quad I\!I = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j.$$

令

$$\begin{cases} \omega^i = du^i, \quad \omega^3 = 0, \\ \omega_i^j = \sum_k \Gamma_{ik}^j du^k, \quad \omega_i^3 = \sum_j b_{ij} du^j, \qquad 1 \le i, j \le 2, \\ \omega_3^i = -\sum_{j,k} g^{ik} b_{kj} du^j, \quad \omega_3^3 = 0, \end{cases}$$

其中 Γ_{ik}^j 是度量系数 $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)$ 的 Christoffel 记号，矩阵 $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$. 如果约定 $1 \le A, B, C \le 3$, 试验证：

(1) 第一组结构方程 $d\omega^A = \sum_B \omega^B \wedge \omega_B^A$ 是自动成立的；

(2) 第二组结构方程 $d\omega_A^B = \sum_C \omega_A^C \wedge \omega_C^B$ 恰好是曲面 M 的 Gauss-Codazzi 方程.

43. 设 M 是有向黎曼流形，$p, q \in M$, γ 是连接 p, q 两点的一条光滑曲线段. 证明：沿 γ 的平行移动 $P_\gamma : T_pM \to T_qM$ 是保持定向的等距线性同构，这里 T_pM 和 T_qM 的定向分别由 M 的定向所确定.

44. 设 M 是 $\mathbb{R}^3$ 中的正则曲面，并具有诱导黎曼度量. $\gamma : [a, b] \to M$ 是 M 中的一条光滑曲线，$X = X(t)$ 是在 M 上沿 γ 定义的光滑切向量场. X 可以看作光滑映射 $X : [a, b] \to \mathbb{R}^3$.

(1) 证明：X 是沿 γ 的平行向量场当且仅当它在 $\mathbb{R}^3$ 中的普通微商 $\frac{dX}{dt}(t)$ 垂直于 $T_{\gamma(t)}M$, $\forall t \in [a, b]$. 说明上述结论对于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的超曲面也是成立的；

(2) 假设 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面，γ 是 S^2 上的一个大圆，并以弧长 t 为参数. 证明 $\gamma'(t)$ 是沿 γ 的平行向量场. 这个结论对 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的单位球面 S^n 是否成立？

45. 考虑上半平面

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}.$$

在 $\mathbb{R}_+^2$ 上定义黎曼度量 g, 使得在坐标系 (x, y) 下，

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}, \quad g_{12} = 0.$$

(1) 证明：度量 g 的 Christoffel 记号为

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}.$$

(2) 设 $v = (0, 1)$ 是 $\mathbb{R}_+^2$ 在点 $(0, 1)$ 处的一个切向量，$\gamma(t)$ 是由 $t \mapsto (t, 1)$ 给出的光滑曲线，$X = X(t)$ 是沿 γ 的平行向量场，满足 $X(0) = v$. 证明：从 y 轴的正向到 $X(t)$ 的有向角等于 $-t$.

46. 设 S^2 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面，γ 是 S^2 上的一个小圆 (即平行圆)，v 是 S^2 在 γ 上一点 p 处的切向量. 试给出 v 沿 γ 平行移动的直观描述.

47. 设 p 是黎曼流形 M 上的一点，$\gamma : [a, b] \to M$ 是取值为 p 的常值曲线，即对于任意的 $t \in [a, b]$, $\gamma(t) = p$. 又设 X 是沿 γ 定义的光滑向量场，即它是拉回丛 γ^*TM 的一个光滑截面 (参看第一章的例 9.2). 此时，X 也可以看作光滑映射 $X : [a, b] \to T_pM$. 证明：如果 D 是拉回丛 γ^*TM 上的诱导联络，则有

$$\frac{DX}{dt} = D_{\frac{\partial}{\partial t}} X = \frac{dX}{dt},$$

即诱导联络 D 与 T_pM 上的普通微分重合.

48. 设 (M, g) 是黎曼流形，$\pi : TM \to M$ 是 M 上的切丛. 采用下面的方法可以在切丛 TM 上引入黎曼度量：$\forall P \in TM$ 以及 $\forall V, W \in T_P(TM)$, 取 TM 上的光滑曲线

$$v = v(t) \text{ 和 } w = w(s)$$

使得 $v(0) = w(0) = P$, 并且 $V = v'(0)$, $W = w'(0)$. 如果令

$$\gamma(t) = \pi \circ v(t), \quad \beta(s) = \pi \circ w(s),$$

则 $v(t)$ 和 $w(s)$ 分别是 M 上沿光滑曲线 γ, β 定义的向量场. 用 D 同时表示 M 上的黎曼联络在拉回丛 γ^*TM 和 β^*TM 上的诱导联络. 定义

$$\langle V, W \rangle_P = g(\pi_*(V), \pi_*(W)) + g\left(\frac{Dv}{dt}(0), \frac{Dw}{ds}(0)\right),$$

其中

$$\frac{Dv}{dt} = D_{\frac{\partial}{\partial t}} v, \quad \frac{Dw}{ds} = D_{\frac{\partial}{\partial s}} w.$$

证明：上面定义的内积 $(V,W)_P$ 与曲线 $v(t)$ 和 $w(t)$ 的选取无关，并且给出了切丛在 TM 上的一个黎曼度量，称为**切丛上的诱导度量**.

49. 设 $f:(\tilde{M},\tilde{g}) \to (M,g)$ 是黎曼淹没 (参看本章习题第 8 题). $\tilde{\gamma}(t)$ 是 $\tilde{M}$ 上的一条曲线，如果对于任意的 t, $\tilde{\gamma}'(t)$ 是淹没 f 在点 $\tilde{\gamma}(t)$ 的水平切向量，则称 $\tilde{\gamma}$ 为淹没 f(在 $\tilde{M}$ 中) 的**水平曲线**. 现设 $\pi: TM \to M$ 是黎曼流形 M 的切丛，$\bar{g}$ 是 TM 上的诱导度量 (参看本章习题第 48 题). 显然，丛投影 π 是淹没. 证明：

(1) 对于任意的 $\bar{p} \in TM$, $V \in T_{\bar{p}}(TM)$, 如果 V 是铅垂切向量，则有

$$\bar{g}(V,V) = g(V,V);$$

如果 V 是水平切向量，则有

$$\bar{g}(V,V) = g(\pi_*(V), \pi_*(V)).$$

因此，丛投影 π 关于诱导度量 $\bar{g}$ 是黎曼淹没 (参看本章习题第 8 题).

(2) TM 中的曲线 $v(t)$ 是水平的当且仅当 $v(t)$ 是沿 M 中的曲线 $\gamma = \pi \circ v(t)$ 的平行向量场.

(3) 如果 $v(t)$ 是 TM 中的水平曲线，则 $v(t)$ 和 $\pi \circ v(t)$ 具有相同的弧长，即 $L(v(t)) = L(\pi \circ v(t))$.

50. 证明引理 8.1.

51. 假设同例 8.2, 试说明 (8.6) 式的右端与局部标架场 $\{e_\alpha\}$ 的选取无关，并且验证，由 (8.6) 式定义的映射

$$D: \Gamma(f^*TN) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(f^*TN)$$

满足定义 8.1 的所有条件.

52. 证明 (8.7) 和 (8.8) 式.

53. 在例 8.2 中用任意的向量丛 $\pi: E \to N$ 代替切丛 TN, 定义在 M 上的拉回丛 f^*E, 并在 E 上具有联络 $\overline{D}$ 的情况下，类似地引入向量丛 f^*E 上的诱导联络.

54. 设 $D^{(i)}$ 是向量丛 $\pi_i: E_i \to M$ 上的联络，$i = 1, 2$. 试分别求出诱导联络 $D^{(1)} \oplus D^{(2)}$, 和 $D^{(1)} \otimes D^{(2)}$ 的联络系数和联络形式.

55. 设 (M, D) 是仿射联络空间，证明：关于 D 在张量丛 $T^r_s(M)$ 上的诱导联络，协变导数公式 (4.4) 成立.

第三章　测地线

§3.1　测地线的概念

测地线是欧氏空间中的直线段在黎曼流形或一般的仿射联络空间中的推广. 在欧氏空间中, 直线段被看作是方向不改变的曲线. 换言之, 设 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 是一条曲线, 并且 $\gamma'(t)\neq 0$, 则 γ 为直线段当且仅当 γ 的切向量 $\gamma'(t)$ 是常向量; 后者又等价于

$$\mathrm{D}_{\gamma'(t)}\gamma'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma'(t))=\gamma''(t)=0,$$

即 $\gamma(t)$ 的切向量 $\gamma'(t)$ 沿曲线自身是平行的切向量场. 不难看出, 对于一般的仿射联络空间, 上述条件仍然是有意义的, 因而可以用来定义测地线.

假定 (M,D) 是一个 m 维仿射联络空间, I 是 $\mathbb{R}$ 中的一个区间.

定义 1.1　仿射联络空间 (M,D) 中的一条光滑曲线 $\gamma:I\to M$ 称为 **测地线**, 如果它的切向量 $\gamma'(t)$ 沿 γ 是平行的切向量场, 即

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right)\equiv\mathrm{D}_{\gamma'(t)}\gamma'(t)=0. \tag{1.1}$$

下面给出测地线在局部坐标系下所满足的微分方程. 为此, 对于任意的 $t_0\in I$, 取 M 在点 $p=\gamma(t_0)$ 的局部坐标系 $(U;x^i)$, 则有 t_0 在 I 中的邻域 I_{t_0}, 使得 $\gamma(I_{t_0})\subset U$. 于是在 I_{t_0} 上, γ 可以用局部坐标表示为

$$x^i=x^i(t),\quad 1\leq i\leq m,$$

并且

$$\gamma'(t)=\frac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t}\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(t)}.$$

令 Γ^k_{ji} 是联络 D 在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下的联络系数，即

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma^k_{ji}\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

则

$$D_{\gamma'(t)}\gamma'(t)=\left(\frac{d^2x^k(t)}{dt^2}+\frac{dx^j(t)}{dt}\frac{dx^i(t)}{dt}\Gamma^k_{ji}(\gamma(t))\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_{\gamma(t)}.$$

所以，曲线段 $\gamma|_{I_{t_0}}$ 是测地线当且仅当 $x^i=x^i(t)$, $1\le i\le m$, 满足方程组：

$$\frac{d^2x^k}{dt^2}+\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}\Gamma^k_{ji}=0,\quad 1\le k\le m;\quad t\in I_{t_0}. \tag{1.2}$$

上面的讨论可以归结为

定理 1.1 设 $\gamma:I\to M$ 是仿射联络空间 (M,D) 中的一条光滑曲线，则 γ 是 (M,D) 中的测地线当且仅当对于任意的 $t_0\in I$, 存在点 $p=\gamma(t_0)$ 的局部坐标系 $(U;x^i)$, 以及 t_0 在 I 中的邻域 I_{t_0}, 使得 $\gamma(I_{t_0})\subset U$, 并且 γ 的局部坐标表达式 $x^i=x^i(t)$ 满足常微分方程组 (1.2).

引进新的未知函数 $y^i=\dfrac{dx^i}{dt}$, 则方程组 (1.2) 可以改写为一阶常微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx^i}{dt}=y^i,\\[2mm] \dfrac{dy^k}{dt}=-y^jy^i\Gamma^k_{ji}.\end{cases} \tag{1.3}$$

由于上述方程组的右端是 x^i,y^j 的光滑函数，根据常微分方程的理论，对于任意给定的初值 $(t_0;x_0;y_0)$, 必有 $\varepsilon>0$, 以及唯一的一组光滑地依赖于 $(t;x_0;y_0)$ 函数

$$x^i=x^i(t;x_0,y_0),\quad y^i=y^i(t;x_0,y_0),\quad 1\le i\le m;\quad t\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon), \tag{1.4}$$

满足方程组 (1.3) 以及初值条件

$$x^i(t_0;x_0,y_0)=x^i_0,\quad y^i(t_0;x_0,y_0)=y^i_0. \tag{1.5}$$

定理 1.2 设 (M,D) 是 m 维仿射联络空间，则对于任意一点 $p\in M$, 存在 p 点的开邻域 $U\subset M$, 以及切丛 TU 中的一个开子集 $\mathscr{W}\ni(p,0)$, $\delta>0$ 和光滑映射 $\gamma:(-\delta,\delta)\times\mathscr{W}\to M$, 使得对于每一个固定的 $(q,v)\in\mathscr{W}$,

$$\gamma(t)=\gamma(t;q,v),\quad t\in(-\delta,\delta)$$

是 M 中唯一的一条测地线，满足初始条件 $\gamma(0)=q$, $\gamma'(0)=v$.

注记 1.1 定理中的唯一性是指，如果 $\tilde\gamma(t)$, $t\in(-\delta_1,\delta_1)$, 是 M 中的一条测地线，并且和测地线 $\gamma(t)=\gamma(t;q,v)$ 满足同一组初始条件

$$\tilde\gamma(0)=q,\quad \tilde\gamma'(0)=v,$$

则在 $(-\delta_1,\delta_1)\cap(-\delta,\delta)$ 上必有 $\tilde\gamma=\gamma$.

证明 取点 p 的一个局部坐标系 $(U;x^i)$, 考虑常微分方程组 (1.3). 根据常微分方程理论 (参看参考文献 [8, 第 140 页]), 在 TU 中存在点 $(p,0)$ 的开邻域 $\mathscr{W}$, 以及 $\delta>0$, 使得对于任意的 $(q,v)\in\mathscr{W}$, 方程组 (1.3) 有唯一的一组解

$$x^i=x^i(t;q,v),\quad y^i=y^i(t;q,v),\quad t\in(-\delta,\delta),$$

满足初值条件：

$$x^i(0;q,v)=x^i(q);\quad y^i(0;q,v)=v(x^i).$$

并且这组函数光滑地依赖于 $(t,q,v)\in(-\delta,\delta)\times\mathscr{W}$. 因此，函数组 $x^i(t;q,v)$ 是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x^k}{dt^2}+\dfrac{dx^j}{dt}\dfrac{dx^i}{dt}\Gamma^k_{ji}=0,\\[2mm] x^i(0;q,v)=x^i(q),\\[2mm] \dfrac{dx^i}{dt}(0;q,v)=v(x^i)\end{cases} \tag{1.6}$$

的解.

假定 $\gamma:(-\delta,\delta)\to U\subset M$ 是在 U 中由参数方程

$$x^i(t)=x^i(t;q,v)$$

定义的光滑曲线. 则由定理 1.1 得知 γ 是测地线, 并且满足初始条件

$$\gamma(0)=q,\quad \gamma'(0)=v.$$

以后, 把该测地线记为 $\gamma(t;q,v)$, 则它是从 $(-\delta,\delta)\times\mathscr{W}$ 映到 M 的光滑映射, 且满足定理的条件. 证毕.

推论 1.3 (M,D) 中一条正则测地线 $\gamma:I\to M$(即满足条件 $\gamma'(t)\neq 0$ 的测地线) 的参数 t 被确定到至多相差一个仿射变换, 即: 如果 γ 有重新参数化 (参数变换)

$$t=t(u),\quad \tilde{\gamma}(u)=\gamma(t(u)),\quad u\in\tilde{I},$$

使得 $\tilde{\gamma}:\tilde{I}\to M$ 仍然是 (M,D) 中的测地线, 则有 $t(u)=au+b$, 其中 a,b 为常数, 且 $a\neq 0$.

证明 因为 $\tilde{\gamma}'(u)=\gamma'(t(u))\cdot t'(u)$, 所以

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_{\tilde{\gamma}'(u)}\tilde{\gamma}'(u)&=\mathrm{D}_{\tilde{\gamma}'(u)}(\gamma'(t(u))\cdot t'(u))\\&=\gamma'(t(u))\cdot t''(u)+(t'(u))^2\mathrm{D}_{\gamma'(t(u))}\gamma'(t(u))\\&=\gamma'(t(u))\cdot t''(u).\end{aligned}$$

若 $\tilde{\gamma}(u)$ 仍然是 (M,D) 中的测地线, 则 $\mathrm{D}_{\tilde{\gamma}'(u)}\tilde{\gamma}'(u)=0$. 因为 $\gamma'(t)\neq 0$, 故有 $t''(u)\equiv 0$, 因而

$$t(u)=au+b,\quad a\neq 0.$$

推论 1.4 若测地线 $\gamma(t;q,v)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 上有定义, 则对于任意的正数 λ, 测地线 $\gamma(t;q,\lambda v)$ 在 $(-\delta/\lambda,\delta/\lambda)$ 上有定义, 并且对于任意的 $t\in(-\delta/\lambda,\delta/\lambda)$ 有

$$\gamma(t;q,\lambda v)=\gamma(\lambda t;q,v).$$

证明 对测地线 $\gamma(t)=\gamma(t;q,v)$ 作参数变换

$$t=\lambda u,\quad u\in(-\delta/\lambda,\delta/\lambda),$$

并记 $\tilde{\gamma}(u)=\gamma(\lambda u;q,v)$. 则由推论 1.3 可知, $\tilde{\gamma}$ 是定义在 $(-\delta/\lambda,\delta/\lambda)$ 上的测地线, 并且 $\tilde{\gamma}'(u)=\lambda\gamma'(\lambda u;q,v)$. 所以,

$$\tilde{\gamma}(0)=\gamma(0)=q,\quad \tilde{\gamma}'(0)=\lambda\gamma'(0)=\lambda v.$$

这意味着 $\tilde{\gamma}(u)$ 是经过点 q、以 λv 为切向量的测地线, 故由唯一性得知

$$\tilde{\gamma}(u)=\gamma(\lambda u;q,v)=\gamma(u;q,\lambda v),\quad u\in(-\delta/\lambda,\delta/\lambda).$$

定义 1.2 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形, D 是它的黎曼联络. M 上关于 D 的测地线称为黎曼流形 (M,g) 的测地线.

定理 1.5 设 $\gamma(t)$ 是黎曼流形 (M,g) 中的一条正则测地线, 则其切向量 $\gamma'(t)$ 的长度是常数; 并且存在常数 a,b, $a>0$, 使得 $s=at+b$ 为 γ 的弧长参数.

证明 利用黎曼联络与度量的相容性,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle=\gamma'(t)(\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle)=2\langle\mathrm{D}_{\gamma'(t)}\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle=0.$$

因此,

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=|\gamma'(t)|=a\,(\text{正常数}).$$

于是, 有常数 b 使得 $s=at+b$. 证毕.

定义 1.3 设 $\gamma(t)$ 是黎曼流形 (M,g) 中的一条测地线, 如果其切向量 $\gamma'(t)$ 是单位向量, 即 $|\gamma'(t)|\equiv 1$, 则称它是**正规测地线**.

换言之, 正规测地线 γ 是以弧长为参数的测地线.

注记 1.2 对于黎曼流形 (M,g) 来说, 定理 1.2 仍然是成立的; 此时, 开子集 $\mathscr{W}$ 可以具体地取为

$$\mathscr{W}=\{(q,v)\in TM;\ q\in U, v\in T_qM, 且|v|<\delta\},$$

其中 U 是点 p 的一个开邻域，δ 是一个正数.

定理 1.6 设 $\varphi:(M,g)\to(N,h)$ 是黎曼流形之间的局部等距，$\gamma=\gamma(t)$ 是 M 中的测地线，则 $\tilde{\gamma}=\varphi\circ\gamma$ 是 N 中的测地线，并且 $L(\tilde{\gamma})=L(\gamma)$.

证明 设 D 和 $\tilde{\mathrm{D}}$ 分别是 M, N 上的黎曼联络. 因为 φ 是局部等距，所以由 $\tilde{\gamma}$ 的定义知

$$\tilde{\gamma}'(t)=\varphi_*(\gamma'(t)),\quad |\tilde{\gamma}'(t)|=|\varphi_*(\gamma'(t))|=|\gamma'(t)|,$$

因而 $L(\tilde{\gamma})=L(\gamma)$. 在另一方面，根据第二章的定理 4.6,

$$\tilde{\mathrm{D}}_{\tilde{\gamma}'}\tilde{\gamma}'=\tilde{\mathrm{D}}_{\varphi_*(\gamma')}\varphi_*(\gamma')=\varphi_*(\mathrm{D}_{\gamma'}\gamma')=0.$$

所以，$\tilde{\gamma}=\varphi\circ\gamma$ 是 N 上的测地线. 证毕.

在求测地线时，除了按照定理 1.1 解常微分方程组 (1.2) 或 (1.3) 外，在某些特殊情形还可以采用一些特殊的方法. 下面介绍两个有关的命题.

命题 1.7 设 $f:(M,g)\to\mathbb{R}^n$ 是等距浸入在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的 m 维黎曼流形，则光滑曲线 $\gamma:I\to M$ 是黎曼流形 (M,g) 中的一条测地线，当且仅当

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2(f\circ\gamma(t))}{\mathrm{d}t^2}\right)^{\top}=0,$$

这里 $\top$ 表示从 $\mathbb{R}^n$ 到 M 的切空间的正交投影.

证明 设 $X\in\mathfrak{X}(M)$、D 是 (M,g) 上的黎曼联络，因此 (参看第二章 (3.1) 式和第七章的 (1.5) 式)

$$\mathrm{D}_{\gamma'(t)}f_*X=\left(\frac{\mathrm{d}f_*X(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\right)^{\top},$$

特别是

$$f_*\mathrm{D}_{\gamma'(t)}\gamma'(t)=\left(\frac{\mathrm{d}f_*\gamma'(t)}{\mathrm{d}t}\right)^{\top}=\left(\frac{\mathrm{d}^2(f\circ\gamma(t))}{\mathrm{d}t^2}\right)^{\top}.$$

所以，γ 是测地线当且仅当 $\dfrac{\mathrm{d}^2(f\circ\gamma(t))}{\mathrm{d}t^2}$ 是子流形 (f,M) 的法向量.

命题 1.8 设 $\gamma=\gamma(t)$, $t\in I$, 是黎曼流形 (M,g) 中以弧长为参数的光滑曲线，如果存在 M 到其自身的等距 φ, 使得 φ 的不动点集恰好是曲线 γ 上的点构成的集合，则 γ 是 (M,g) 上的一条正规测地线.

证明 由假设，对于任意的 $t\in I$, $\varphi\circ\gamma(t)=\gamma(t)$, 从而有

$$\varphi_*(\gamma'(t))=\gamma'(t).$$

任意取定一点 $t_0\in I$. 设 β 是满足

$$\beta(t_0)=\gamma(t_0),\quad \beta'(t_0)=\gamma'(t_0)$$

的测地线，则由定理 1.6, $\varphi\circ\beta$ 也是测地线，并且满足初始条件

$$\varphi\circ\beta(t_0)=\varphi\circ\gamma(t_0)=\gamma(t_0)=\beta(t_0),$$
$$\varphi_*(\beta'(t_0))=\varphi_*(\gamma'(t_0))=\gamma'(t_0)=\beta'(t_0).$$

根据测地线的唯一性，存在 t_0 的邻域 I_{t_0}, 使得对于任意的 $t\in I_{t_0}$, 有 $\varphi(\beta(t))=\beta(t)$, 即 $\beta(t)$ 是 φ 的不动点. 根据假设，$\beta(t)$ 落在 γ 上，因而 β 是 γ 的重新参数化. 由于 t 是 γ 和 β 的弧长参数，且 $\gamma(t_0)=\beta(t_0)$, 故

$$\gamma|_{I_{t_0}}=\beta|_{I_{t_0}},$$

所以 $\gamma|_{I_{t_0}}$ 是测地线. 又由于 t_0 是 I 中的任意一点，定理得证.

例 1.1 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的测地线为直线或其一部分.

事实上，$\mathbb{R}^n$ 中的协变微分就是向量场的普通微分. 由测地线的定义，$\mathbb{R}^n$ 中一条光滑曲线是测地线当且仅当它的切向量是常向量，这正是直线的特征.

例 1.2 球面 S^n 上的测地线是大圆或大圆的一部分.

事实上，设 $S^1=\Pi\cap S^n$ 是 S^n 上任意一个大圆，其中 Π 是过球心的一个二维平面. 假定 φ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中关于 Π 的反射变换，它在 S^n

上的限制是 S^n 到其自身的等距，并且以 S^1 为其不动点集. 于是由命题 1.8, S^1 是 S^n 上的测地线. 在另一方面，由于在任意一点沿任意的一个切方向，都有一个大圆通过该点并且与该方向相切，根据测地线的唯一性，S^n 上的测地线只能是大圆或其一部分.

另外，若设大圆 S^1 的参数方程是 $\gamma(t)$, t 是弧长参数，于是 $|\gamma(t)| = r$ (球面 S^n 的半径), $|\gamma'(t)| = 1$. 将此两式对 t 求导得到

$$\langle\gamma'(t), \gamma(t)\rangle = 0, \ \langle\gamma''(t), \gamma'(t)\rangle = 0.$$

由于 $\gamma(t), \gamma'(t), \gamma''(t)$ 都落在平面 Π 内，故 $\gamma''(t)$ 与 $\gamma(t)$ 共线，即

$$(\gamma''(t))^{\top} = 0.$$

于是，根据命题 1.7, $\gamma(t)$ 是测地线.

例 1.3 双曲空间中的测地线.

根据第二章的例 2.3, 双曲空间的定义是

$$H^n(c) = \left\{(x^1, \cdots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}_1^{n+1}; \sum_{i=1}^{n}(x^i)^2 - (x^{n+1})^2 = \frac{1}{c}, x^{n+1} > 0\right\}, \quad c < 0.$$

现在来求 $H^n(c)$ 在点 $p = (0, \cdots, 0, 1/\sqrt{-c})$ 的测地线. $H^n(c)$ 有一个大范围定义的坐标系 $(H^n(c), \varphi; \xi^i)$, 其中 φ 是从 $H^n(c)$ 到 $\mathbb{R}^n$ 中的开球

$$B^n\left(\frac{1}{\sqrt{-c}}\right) = \left\{(\xi^i) \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^{n}(\xi^i)^2 < -\frac{1}{c}\right\}$$

的微分同胚，它的定义为

$$\begin{aligned}(\xi^1, \cdots, \xi^n) &= \varphi(x^1, \cdots, x^{n+1}) \\ &= \left(\frac{x^1}{1+\sqrt{-c}x^{n+1}}, \cdots, \frac{x^n}{1+\sqrt{-c}x^{n+1}}\right).\end{aligned}$$

$H^n(c)$ 上的度量 g 由 $\mathbb{R}_1^{n+1}$ 的标准 Lorentz 内积诱导而得，它的局部坐标表达式是

$$g = \frac{4\sum_i(d\xi^i)^2}{(1+c\sum_i(\xi^i)^2)^2}. \tag{1.7}$$

对于任意的满足条件 $\sum\limits_i(v^i)^2 = 1$ 的 $(v^i) \in \mathbb{R}^n$, 考虑 $H^n(c)$ 中由

$$\xi^i(t) = \frac{v^i}{\sqrt{-c}}\tanh\left(\frac{\sqrt{-c}t}{2}\right), \quad 1 \le i \le n, \quad -\infty < t < \infty$$

确定的曲线 γ. 容易看出，γ 以 t 为弧长参数且有 $\gamma(0) = p$. 下面证明 γ 是测地线. 注意到，在 $B^n\left(1/\sqrt{-c}\right)$ 中围绕原点的任何旋转都保持度量 (1.7) 不变，因而由定理 1.6, 可以假定

$$v^1 = 1, \quad v^2 = \cdots = v^n = 0.$$

定义变换 $\psi: H^n(c) \to H^n(c)$, 使得

$$\psi(\xi^1, \xi^2, \cdots, \xi^n) = (\xi^1, -\xi^2, \cdots, -\xi^n).$$

则不难看出，ψ 是 $H^n(c)$ 上的一个等距，并且 γ 上的点刚好是 ψ 的不动点. 由命题 1.8, γ 是 $H^n(c)$ 的正规测地线. 再由测地线的唯一性，$H^n(c)$ 在 p 点的测地线都是这样的曲线或其一部分. 根据坐标映射 φ 的定义，$H^n(c)$ 中通过 p 点的任意一条测地线都是 $\mathbb{R}_1^{n+1}$ 中通过 x^{n+1} 轴的一个二维平面与 $H^n(c)$ 的交线.

与球面的情形类似，利用 $H^n(c)$ 上的联络和 $\mathbb{R}_1^{n+1}$ 中的联络之间的关系以及命题 1.7, 可以证明 $H^n(c)$ 与 $\mathbb{R}_1^{n+1}$ 中通过原点、且包含类时向量 (即满足条件 $\langle v, v\rangle_1 < 0$ 的向量 v) 的二维平面的交线是 $H^n(c)$ 中的测地线.

§3.2 指数映射

定理 1.2 断言，对于任意给定的 $(q, v) \in TM$, 必有定义在 $(-\delta, \delta)$

上的测地线 $\gamma(t)=\gamma(t;q,v)$，满足

$$\gamma(0)=q,\quad \gamma'(0)=v;$$

在另一方面，推论 1.4 告诉我们，同一条测地线可以取不同的参数化使得参数 t 的取值范围扩大或缩小，只要它的初始切向量乘以一个适当的倍数. 本章只对黎曼流形 (M,g) 的情形进行讨论，尽管在一般的仿射联络空间 (M,D) 上也有类似的结论. 首先，对于 M 的开集 U 以及正数 ε，定义 TU 中的开子集

$$\mathscr{U}^\varepsilon=\{(q,v)\in TU;\ q\in U,\ v\in T_qM,\ 且\ |v|<\varepsilon\},\tag{2.1}$$

其中 $|v|^2=g(v,v)$. 显然，$\mathscr{U}^\varepsilon$ 是 TU 中零截面的一个开邻域.

定理 2.1 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形，则对于任意一点 $p\in M$，必存在 p 点的开邻域 U，正数 ε，以及光滑映射

$$\gamma:(-2,2)\times\mathscr{U}^\varepsilon\to M,\tag{2.2}$$

使得对于任意的 $(q,v)\in\mathscr{U}^\varepsilon$，$\gamma(t)=\gamma(t;q,v)$ 是定义在区间 $(-2,2)$ 上、且满足初始条件 $\gamma(0)=q,\gamma'(0)=v$ 的唯一的一条测地线.

证明 将定理 1.2 用于黎曼流形 (M,g)，则对于任意一点 $p\in M$，存在 p 点的开邻域 $U\subset M$，正数 δ,ε_1，以及光滑映射

$$\gamma:(-\delta,\delta)\times\mathscr{U}^{\varepsilon_1}\to M,$$

使得对于每一个固定的 $(q,v)\in\mathscr{U}^{\varepsilon_1}$，$\gamma(t)=\gamma(t;q,v)$ 是在 M 中定义在 $(-\delta,\delta)$ 上、满足初始条件 $\gamma(0)=q,\gamma'(0)=v$ 的唯一的一条测地线.

根据推论 1.4，

$$\gamma(t;q,v)=\gamma\left(\frac{\delta t}{2};q,\frac{2v}{\delta}\right),$$

并且假定右端在 $q\in U$，$|\delta t/2|<\delta$，且 $|2v/\delta|<\varepsilon_1$ 上有定义. 因此，左端 $\gamma(t;q,v)$ 在 $q\in U$，$|t|<2$，且 $|v|<\delta\varepsilon_1/2$ 上有定义. 取 $\varepsilon=\delta\varepsilon_1/2$，定理得证.

利用定理 2.1 中得到的映射 γ，可以在 TM 的开子集 $\mathscr{U}^\varepsilon$ 上定义光滑映射 $\exp:\mathscr{U}^\varepsilon\to M$，使得对于任意的 $(q,v)\in\mathscr{U}^\varepsilon$ 有

$$\exp(q,v)=\gamma(1;q,v).\tag{2.3}$$

特别地，固定一点 $p\in U$，并设

$$B_p(\varepsilon)=\mathscr{U}^\varepsilon\cap T_pM=\{v\in T_pM;\ |v|<\varepsilon\},\tag{2.4}$$

则 $B_p(\varepsilon)$ 是 T_pM 中以原点为中心、以 ε 为半径的开球. 于是有光滑映射 $\exp_p:B_p(\varepsilon)\to M$ 使得

$$\exp_p(v)=\exp(p,v)=\gamma(1;p,v),\quad\forall v\in B_p(\varepsilon).\tag{2.5}$$

定义 2.1 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形，$\mathscr{U}^\varepsilon\subset TM$ 和 $B_p(\varepsilon)\subset T_pM$ 的意义同上. 映射 $\exp:\mathscr{U}^\varepsilon\to M$ 称为在切丛 TM 的开集 $\mathscr{U}^\varepsilon$ 上的**指数映射**；映射 $\exp_p:B_p(\varepsilon)\to M$ 称为 **M 在 p 点的指数映射**.

定理 2.2 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形，则对于任意的 $p\in M$，在 T_pM 中存在原点的开邻域 V，使得指数映射 $\exp_p$ 是从 V 到 M 中的开集 $U=\exp_p(V)$ 上的微分同胚.

证明 根据反函数定理，只需要说明 $\exp_p$ 在原点 $0\in T_pM$ 处是浸入. 事实上，由指数映射的定义以及推论 1.4，对于任意的 $v\in B_p(\varepsilon)\subset T_pM=T_0(T_pM)$，以及 $|t|\le 1$ 有

$$\exp_p(tv)=\gamma(1;p,tv)=\gamma(t;p,v),$$

即 $\exp_p(tv)$ 是通过 p 点、并且以 v 为初始切向量的测地线. 于是

$$(\exp_p)_{*0}(v)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\exp_p(tv)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\gamma(t;p,v)=v,$$

$$\forall v \in B_p(\varepsilon) \subset T_pM.$$

这意味着切映射 $(\exp_p)_{*0}$ 是恒同映射. 由此可知, $\exp_p$ 在原点 0 的一个开邻域 $W \subset B_p(\varepsilon)$ 上是浸入. 注意到 W 和 M 有相同的维数, 故由反函数定理 (或第一章定理 2.1) 得知存在原点 0 的开邻域 $V \subset W$, 使得 $\exp_p$ 在 V 上的限制是从 V 到 $\exp_p(V) \subset M$ 的光滑同胚. 定理得证.

注记 2.1 假定 $v \in T_pM$, 并且 $\exp_p(v)$ 有意义. 因为

$$\gamma(1; p, v) = \gamma\left(|v|; p, \frac{v}{|v|}\right),$$

所以从几何上看, 指数映射 $\exp_p$ 把切向量 $v \in T_pM$ 映到初始条件为 (p, v) 的测地线上从点 p 量起的弧长等于 $|v|$ 的点.

例 2.1 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上的指数映射.

若把欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 与它在原点处的切空间 $T_0(\mathbb{R}^n)$ 等同起来, 则指数映射 $\exp_0$ 就是恒同映射. 一般地, 对于任意的 $p \in \mathbb{R}^n$, 不难看出,

$$\exp_p(v) = p + v, \quad \forall v \in T_p(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n.$$

例 2.2 球面 S^n 上的指数映射.

设 $p \in S^n$, 则 $\exp_p$ 在 T_pS^n 上处处有定义. 对于任意的 $v \in T_pS^n$, $v \neq 0$, 存在唯一的一条通过 p 点、且与 v 相切的有向正规测地线 (大圆)γ. 于是, $\exp_p(v)$ 是在这条测地线上从 p 点量起的弧长距离为 $|v|$ 的点; 特别地, 设 k 是任意一个非负整数, 则当 $|v| = 2k\pi$ 时,

$$\exp_p(v) = p;$$

当 $|v| = (2k+1)\pi$ 时,

$$\exp_p(v) = -p \quad (p \text{ 点的对径点}).$$

§3.3 弧长的第一变分公式

在欧氏空间中, 任意两点之间的直线段是连接这两点的最短线; 换句话说, 欧氏空间的测地线具有最短性 (短程性). 在一般的黎曼流形中, 测地线只有局部的最短性. 为说明这个问题, 首先导出曲线弧长的第一变分公式.

定义 3.1 设 $\gamma: [a,b] \to M$ 是微分流形 M 中一条光滑曲线段. 若有 $\varepsilon > 0$ 以及光滑映射 $\Phi: [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, 满足

$$\Phi(t, 0) = \gamma(t), \quad \forall t \in [a,b],$$

则称映射 Φ 是曲线 γ 的一个**变分**; 如果 γ 的变分 Φ 满足

$$\Phi(a, u) = \gamma(a), \quad \Phi(b, u) = \gamma(b), \quad \forall u \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

则称 Φ 是 γ 的一个**具有固定端点的变分**.

现在假定 Φ 是光滑曲线 γ 的一个变分. 对于每一个固定的 $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, 定义光滑曲线段 $\gamma_u: [a,b] \to M$ 使得

$$\gamma_u(t) = \Phi(t, u), \quad \forall t \in [a,b]. \tag{3.1}$$

为方便起见, 通常称曲线 γ_u, $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ 为**变分曲线**. 特别地, 有 $\gamma_0 = \gamma$. 显然, 变分曲线族 $\{\gamma_u\}$ 光滑地依赖于参数 $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. 因此, 要作曲线 γ 的一个变分, 实际上就是把 γ 嵌入到光滑地依赖于族参数 u 的一族曲线中去, 或等价地说, 让曲线 γ 在它的附近作一个微小的扰动.

在另一方面, 任意固定 $t \in [a,b]$, 又有光滑曲线 $\sigma_t: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, 使得

$$\sigma_t(u) = \Phi(t, u), \quad \forall u \in (-\varepsilon, \varepsilon). \tag{3.2}$$

这样得到的一族光滑曲线 $\{\sigma_t\}$ 光滑地依赖于参数 $t \in [a,b]$, 称为变分 Φ 的**横截曲线**.

对于 γ 的每一个变分 Φ, 可以引入沿 Φ 定义的光滑向量场

$$\tilde{T}=\Phi_{*(t,u)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),\quad \tilde{U}=\Phi_{*(t,u)}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right). \tag{3.3}$$

则 $\tilde{T}$ 与 $\tilde{U}$ 分别是变分曲线族 $\{\gamma_u\}$ 和横截曲线族 $\{\sigma_t\}$ 的切向量场. 不难看出, 当 Φ 有固定端点时, 对于任意的 $u\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ 有

$$\tilde{U}(a,u)=\tilde{U}(b,u)=0.$$

对于任意的 $t\in[a,b]$, 令 $U(t)=\tilde{U}(t,0)$, 则得到沿曲线 γ 定义的光滑向量场 $U=\tilde{U}|_{u=0}$, 称为变分 Φ 的 **变分向量场**. 特别地, 如果 Φ 有固定的端点, 则 $U(a)=U(b)=0$.

从定义可知, 变分向量场 U 是变分 Φ 在 γ 处 (即 $u=0$ 处) 的线性化, 或者说, 它是变分 Φ 在 γ 上每一点处关于自变量 u 作 Taylor 展开时的一阶近似. 每一个变分都有一个确定的变分向量场; 而下面的命题则告诉我们, 在 M 上沿曲线 γ 定义的每一个光滑切向量场都是 γ 的某一个变分的变分向量场.

命题 3.1 设 (M,g) 是黎曼流形, $\gamma:[a,b]\to M$ 是 M 上的一条光滑曲线; 又设 $U=U(t)$ 是沿 γ 定义的光滑向量场, $U(t)\in T_{\gamma(t)}M$, 则存在 γ 的一个变分 Φ 以 U 为其变分向量场.

证明 根据上一节的讨论, 在 TM 的零截面的邻域内有指数映射 exp. 由于区间 $[a,b]$ 的紧致性, 必存在 $\varepsilon>0$, 使得对于任意的 $(t,u)\in[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)$,

$$\exp(\gamma(t),uU(t))=\exp_{\gamma(t)}(uU(t))$$

有定义. 于是得到光滑映射 $\Phi:[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$, 使得

$$\Phi(t,u)=\exp(\gamma(t),uU(t)),\quad \forall(t,u)\in[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon). \tag{3.4}$$

容易看出, $\Phi(t,0)=\gamma(t)$; 并且对于每一个固定的 $t\in[a,b]$, 曲线

$$\sigma_t:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$$

是初始条件为 $(\gamma(t),U(t))$ 的测地线. 由此可知映射 Φ 是命题所要求的变分. 证毕.

定理 3.2 设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是黎曼流形 (M,g) 上的一条光滑曲线, 其参数 t 与弧长参数成比例. 如果 $\Phi:[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是 γ 的一个变分, 设 $L(u)=L(\gamma_u)$ 是曲线 γ_u 的弧长, $u\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, 则有

$$L'(0)=\left.\frac{\mathrm{d}L(u)}{\mathrm{d}u}\right|_{u=0}=\frac{b-a}{l}\left\{\langle\gamma',U\rangle|_a^b-\int_a^b\langle U,\mathrm{D}_{\gamma'}\gamma'\rangle\mathrm{d}t\right\}, \tag{3.5}$$

其中 $l=L(0)$ 是曲线 γ 的弧长, U 是 Φ 的变分向量场, D 是 M 上的黎曼联络.

(3.5) 式称为 **弧长的第一变分公式**.

证明 设 $\tilde{T}$ 与 $\tilde{U}$ 分别是由 (3.3) 式确定的向量场. 根据曲线弧长的计算公式, 对于任意的 $u\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ 有

$$L(u)=\int_a^b|\tilde{T}|\mathrm{d}t=\int_a^b\langle\tilde{T},\tilde{T}\rangle^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t.$$

为了方便起见, 也用 D 表示 M 上的黎曼联络在拉回向量丛 Φ^*TM 上的诱导联络 (参看第二章的例 8.2). 在此意义下, 如果变量 u 固定, 则 D 化为拉回向量丛 $(\gamma_u)^*TM$ 上的诱导联络. 根据第二章的 (8.8) 式可知

$$L'(u)=\int_a^b\frac{\partial}{\partial u}(\langle\tilde{T},\tilde{T}\rangle^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}t=\int_a^b\frac{\langle\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u}}\tilde{T},\tilde{T}\rangle}{\langle\tilde{T},\tilde{T}\rangle^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}t. \tag{3.6}$$

再由第二章的 (8.7) 式

$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u}}\tilde{T}-\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{U}=\Phi_*\left(\left[\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial t}\right]\right)=0. \tag{3.7}$$

代入 (3.6) 式得到

$$L'(u)=\int_a^b\frac{\langle\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{U},\tilde{T}\rangle}{\langle\tilde{T},\tilde{T}\rangle^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}t. \tag{3.8}$$

根据定理的假设，参数 t 与曲线 γ 的弧长参数成比例，所以 $|\gamma'|=$ 常数．于是

$$l=L(\gamma)=\int_a^b|\gamma'|\mathrm{d}t=(b-a)|\gamma'|,$$

即有

$$|\gamma'|=\frac{l}{b-a}. \tag{3.9}$$

另外，当 $u=0$ 时，$\tilde{T}$ 是曲线 γ 的切向量，即 $\tilde{T}(t,0)=\gamma'(t)$．

在 (3.8) 式两端取 $u=0$，再把 (3.9) 式代入并且利用第二章的 (8.8) 式和 (8.9) 式，可得

$$\begin{aligned}L'(0)&=\int_a^b\left.\frac{\langle \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{U},\tilde{T}\rangle}{\langle\tilde{T},\tilde{T}\rangle^{\frac12}}\right|_{u=0}\mathrm{d}t=\frac{1}{|\gamma'|}\int_a^b\langle \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}U,\gamma'\rangle\mathrm{d}t\\&=\frac{b-a}{l}\int_a^b\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle U,\gamma'\rangle-\langle U,\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\gamma'\rangle\right\}\mathrm{d}t\\&=\frac{b-a}{l}\left\{\langle U,\gamma'\rangle|_a^b-\int_a^b\langle U,\mathrm{D}_{\gamma'}\gamma'\rangle\mathrm{d}t\right\}.\end{aligned}$$

证毕．

从变分公式 (3.5) 可得如下的推论：

推论 3.3　假设同定理 3.2．如果 Φ 是曲线 γ 的有固定端点的变分，则有变分公式

$$L'(0)=\left.\frac{\mathrm{d}L(u)}{\mathrm{d}u}\right|_{u=0}=-\frac{b-a}{l}\int_a^b\langle U,\mathrm{D}_{\gamma'}\gamma'\rangle\mathrm{d}t. \tag{3.10}$$

特别地，若 γ 是测地线，则 γ 必是在它的任意一个有固定端点的变分下弧长泛函的临界点．

曲线的变分以及弧长的第一变分公式可以推广为分段光滑曲线的分段光滑变分以及相应的弧长第一变分公式．

定义 3.2　设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是光滑流形 M 上的一条分段光滑曲线，$\Phi:[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是一个连续映射，$\varepsilon>0$．如果存在曲线 γ 的一个光滑划分 (参看第二章的定义 7.2)

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_N=b,$$

使得对于 $i=1,\cdots,N$，Φ 在 $[t_{i-1},t_i]\times(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上的限制是光滑映射，且 $\gamma_0=\Phi(\cdot,0)=\gamma$，则称 Φ 是 γ 的 **(分段光滑) 变分**．

相应地，通过 (3.3) 式沿变分 Φ 定义了向量场 $\tilde{T}$ 和向量场 $\tilde{U}$，以及变分向量场 $U=\tilde{U}|_{u=0}$，它们关于变量 t 是分段光滑的．

另外，不难证明，命题 3.1 对于分段光滑曲线也是成立的，证明留作练习．

将定理 3.2 用于分段光滑曲线 γ，可以得到下面的结论：

推论 3.4　设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是黎曼流形 (M,g) 上一条分段光滑曲线，参数 t 与其弧长参数成比例．如果 $\Phi:[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是 γ 的一个分段光滑变分，U 是相应的变分向量场，则对于 γ 的任意一个光滑划分：$a=t_0<\cdots<t_N=b$，有如下的第一变分公式：

$$\begin{aligned}L'(0)=\left.\frac{\mathrm{d}L(u)}{\mathrm{d}u}\right|_{u=0}&=\frac{b-a}{l}\left\{\sum_{i=1}^N\langle\gamma',U\rangle\Big|_{t_{i-1}^+}^{t_i^-}-\int_a^b\langle U,\mathrm{D}_{\gamma'}\gamma'\rangle\mathrm{d}t\right\}\\&=\frac{b-a}{l}\left\{\langle\gamma',U\rangle|_a^b+\sum_{i=1}^{N-1}\langle\gamma'(t_i^-)-\gamma'(t_i^+),U(t_i)\rangle\right.\\&\qquad\left.-\int_a^b\langle U,\mathrm{D}_{\gamma'}\gamma'\rangle\mathrm{d}t\right\}.\end{aligned}$$

特别地，如果 Φ 是 γ 的一个有固定端点的变分，则

$$L'(0)=\frac{b-a}{l}\left\{\sum_{i=1}^{N-1}\langle\gamma'(t_i^-)-\gamma'(t_i^+),U(t_i)\rangle-\int_a^b\langle U,\mathrm{D}_{\gamma'}\gamma'\rangle\mathrm{d}t\right\}. \tag{3.11}$$

定义 3.3　设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是黎曼流形 (M,g) 中的一条分段光滑曲线．如果对于 M 中连接 $\gamma(a)$ 和 $\gamma(b)$ 的任意一条分段光滑曲线 β，都有 $L(\beta)\geq L(\gamma)$，则称 γ 是连接 $\gamma(a)$ 和 $\gamma(b)$ 的一条 **最短线**．

定理 3.5 设 $\gamma(t), t\in[a,b]$, 是黎曼流形 (M,g) 中的一条分段光滑曲线，t 与其弧长参数成比例. 如果 γ 是连接 $\gamma(a)$ 和 $\gamma(b)$ 的一条最短线，则 γ 必是一条测地线.

证明 考虑 γ 的任意一个有固定端点的变分

$$\Phi:[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M.$$

根据定理的假设，

$$L(\gamma_0)=L(\gamma)\le L(\gamma_u),\quad \forall u\in(-\varepsilon,\varepsilon).$$

所以，$u=0$ 是光滑函数 $L(u)=L(\gamma_u)$ 的极小值点. 因此，$L'(0)=0$. 根据 (3.11) 式，

$$\sum_{i=1}^{N-1}\langle\gamma'(t_i^+)-\gamma'(t_i^-),U(t_i)\rangle-\int_a^b\langle U,\mathrm{D}_{\gamma'}\gamma'\rangle\mathrm{d}t=0,\tag{3.12}$$

其中 U 是变分 Φ 的向量场. 由变分 Φ 的任意性以及命题 3.1 可知，(3.12) 对于沿 γ 定义的任意一个满足 $U(a)=U(b)=0$ 的分段光滑向量场 $U=U(t)$ 都是成立的.

取定曲线 γ 的一个光滑划分 $a=t_0<\cdots<t_N=b$, 以及充分小的正数 δ, 使得 $2\delta<\min_i(t_i-t_{i-1})$. 对于每一个固定的 j, $1\le j\le N$. 选定函数 $h_j\in C^\infty(\mathbb{R})$, 使得

$$0\le h_j\le 1,\quad 并且\quad h_j(t)=\begin{cases}1, & t_{j-1}+\delta\le t\le t_j-\delta,\\ 0, & t<t_{j-1}\ 或\ t>t_j.\end{cases}$$

令

$$U_j(t)=h_j(t)\mathrm{D}_{\gamma'(t)}\gamma'(t).$$

将 U_j 代入 (3.12) 式得到

$$0=\int_a^b\langle U_j(t),\mathrm{D}_{\gamma'}\gamma'\rangle\mathrm{d}t=\int_{t_{j-1}}^{t_j}h_j(t)\cdot|\mathrm{D}_{\gamma'}\gamma'|^2\mathrm{d}t.$$

因此，

$$h_j(t)\cdot|\mathrm{D}_{\gamma'}\gamma'|^2=0,\quad t_{j-1}\le t\le t_j.$$

根据 h_j 的定义，当 $t\in[t_{j-1}+\delta,t_j-\delta]$ 时，$h_j(t)=1$, 因而

$$|\mathrm{D}_{\gamma'}\gamma'|^2=0.$$

再令 $\delta\to 0$, 可得

$$\mathrm{D}_{\gamma'(t)}\gamma'(t)|_{(t_{j-1},t_j)}\equiv 0,\quad 1\le j\le N.\tag{3.13}$$

因此，对于每一个 j, 曲线段 $\gamma|_{(t_{j-1},t_j)}$ 是测地线. 此外，(3.13) 式还说明积分

$$\int_a^b\langle U,\mathrm{D}_{\gamma'}\gamma'\rangle\mathrm{d}t=0.$$

于是，(3.12) 式成为

$$\sum_{i=1}^{N-1}\langle\gamma'(t_i^-)-\gamma'(t_i^+),U(t_i)\rangle=0.\tag{3.12'}$$

为了说明 γ' 的连续性，需要构造一个适当的分段光滑的变分向量场 $U(t)$, 使得 $U(a)=U(b)=0$, 且有

$$U(t_i)=\gamma'(t_i^-)-\gamma'(t_i^+),\quad 1\le i\le N-1.$$

为此目的，首先用 $U_i(t)$ 表示向量 $\gamma'(t_i^-)-\gamma'(t_i^+)$ 沿曲线 γ 作平行移动所得到的分段光滑向量场，并取正数

$$\delta_1<\delta<\frac{1}{2}\min_{1\le i\le N}|t_i-t_{i-1}|.$$

再取 $k_i\in C^\infty(\mathbb{R})$ $(1\le i\le N-1)$, 使得 $0\le k_i\le 1$, 并且

$$k_i(t)=\begin{cases}1, & t=t_i,\\ 0, & |t-t_i|\ge\delta_1.\end{cases}$$

令

$$U(t)=\begin{cases} k_i(t)\cdot U_i(t), & t\in[t_i-\delta,t_i+\delta],\ 1\le i\le N-1,\\ 0, & t\in[a,t_1-\delta_1)\cup\left(\bigcup_{i=1}^{N-2}(t_i+\delta_1,t_{i+1}-\delta_1)\right)\\ & \quad\cup(t_{N-1}+\delta_1,b]. \end{cases}$$

显然，这样构造的向量场 $U(t)$ 满足我们的要求.

把这个向量场 U 代入 (3.12′) 式便得到

$$\sum_{i=1}^{N-1}|\gamma'(t_i^-)-\gamma'(t_i^+)|^2=0,$$

即有

$$\gamma'(t_i^-)=\gamma'(t_i^+),\quad 1\le i\le N-1. \tag{3.14}$$

此式说明 γ 具有连续的切向量场 γ'. 前面已经证明了 γ 在每一个小区间 $[t_{j-1},t_j]$ 上的限制是测地线，现在知道 γ,γ' 在区间 $[a,b]$ 上是连续的，所以由测地线的存在唯一性得知 γ 是定义在 $[a,b]$ 上的测地线，因而是光滑的. 证毕.

仔细分析定理 3.5 的证明过程，可以得到如下的推论：

推论 3.6 一条分段光滑曲线 γ 是测地线当且仅当 γ 是在它的任意一个有固定端点的变分下的弧长泛函的临界点.

§3.4 Gauss 引理和法坐标系

在几何学中，为了能够简单明了地描述一个几何对象，选取适当的坐标系是至关重要的. 对于黎曼流形来说，最适用的局部坐标系就是所谓的法坐标系，它是借助于指数映射建立的. 本节将引入法坐标系的概念，并在这种特殊的坐标系下研究黎曼联络的性质. 为此，需要对 §3.2 所引入的指数映射作进一步的讨论.

定理 4.1(Gauss 引理) 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形，$p\in M$，$v\in T_pM$. 如果指数映射 $\exp_p$ 在 v 点有定义，则对于任意的 $w\in T_pM=T_v(T_pM)$，有

$$\langle(\exp_p)_{*v}(v),(\exp_p)_{*v}(w)\rangle_{\exp(p,v)}=\langle v,w\rangle_p. \tag{4.1}$$

证明 任取 $w\in T_pM$. 由于 $\exp_p$ 在 v 处有定义，故有 $\varepsilon>0$，使得对于任意的 $(t,u)\in[0,1]\times(-\varepsilon,\varepsilon)$，$\exp_p t(v+uw)$ 有意义. 因此，得到光滑映射 $\Phi:[0,1]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$，使得

$$\Phi(t,u)=\exp_p t(v+uw),\quad \forall(t,u)\in[0,1]\times(-\varepsilon,\varepsilon).$$

显然，对于每一个 $u\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，$\gamma_u=\Phi(\cdot,u)$ 是测地线. 换句话说，Φ 是测地线 $\gamma=\gamma_0$ 的一个测地变分，相应的变分向量场 U 为

$$\begin{aligned} U(t)&=\Phi_{*(t,0)}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)=(\exp_p)_{*tv}(tw)\\ &=t(\exp_p)_{*tv}(w),\quad 0\le t\le 1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

在另一方面，曲线 γ 的切向量场为

$$\gamma'(t)=\Phi_{*(t,0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=(\exp_p)_{*tv}(v). \tag{4.3}$$

把 (4.2) 和 (4.3) 式代入弧长的第一变分公式 (3.5)，则得

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}L(u)}{\mathrm{d}u}\right|_{u=0}&=\frac{1}{l}\left\{\langle\gamma',U\rangle|_0^1-\int_0^1\langle U,\mathrm{D}_{\gamma'}\gamma'\rangle\mathrm{d}t\right\}\\ &=\frac{1}{l}\langle(\exp_p)_{*v}(v),(\exp_p)_{*v}(w)\rangle, \end{aligned} \tag{4.4}$$

其中

$$l=L(\gamma)=\int_0^1|\gamma'|\mathrm{d}t=|v|.$$

注意到测地线的切向量的长度是常数，直接计算 $L(u)=L(\gamma_u)$ 可以得到

$$L(u)=\int_0^1|\gamma_u'(t)|\mathrm{d}t=\int_0^1|\gamma_u'(0)|\mathrm{d}t=|v+uw|$$

$$=(\langle v,v\rangle+2u\langle v,w\rangle+u^2\langle w,w\rangle)^{\frac{1}{2}}.$$

故

$$\frac{\mathrm{d}L(u)}{\mathrm{d}u}=\frac{\langle v,w\rangle+u\langle w,w\rangle}{(\langle v,v\rangle+2u\langle v,w\rangle+u^2\langle w,w\rangle)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}L(u)}{\mathrm{d}u}\right|_{u=0}=\frac{\langle v,w\rangle}{|v|}.\tag{4.5}$$

把 (4.5) 式代入 (4.4), 便得到 (4.1) 式, 定理得证.

推论 4.2　指数映射 $\exp_p$ 把 T_pM 中与射线 tv 正交的向量映到 M 中与测地线 $\gamma(t)=\exp_p(tv)$ 正交的切向量, 即指数映射保持向量与径向测地线的正交性.

证明　根据 Gauss 引理, 对于任意的 $t\in[0,1]$ 以及任意的 $w\in T_pM$ 有

$$\langle(\exp_p)_{*tv}(v),(\exp_p)_{*tv}(w)\rangle=\langle v,w\rangle.$$

所以, 当 $\langle v,w\rangle=0$ 时有

$$\langle(\exp_p)_{*tv}(v),(\exp_p)_{*tv}(w)\rangle=0.$$

证毕.

推论 4.3　指数映射 $\exp_p$ 沿射线 tv 的切方向是保长的, 即对于任意的、平行于 v 的切向量 $w\in T_pM$, 都有

$$|(\exp_p)_{*tv}(w)|=|w|.$$

证明　设 $w=\lambda v$, 则由 Gauss 引理得到

$$|(\exp_p)_{*tv}(w)|^2=\lambda\langle(\exp_p)_{*tv}(v),(\exp_p)_{*tv}(w)\rangle=\lambda\langle v,w\rangle=|w|^2.$$

证毕.

注记 4.1　设 $p\in M$, 假定 $\delta>0$ 使得指数映射 $\exp_p$ 在

$$B_p(\delta)=\{v\in T_pM;|v|<\delta\}$$

上有定义. 根据 Gauss 引理,

$$\begin{aligned}\mathscr{B}_p(\delta)&=\exp_p(B_p(\delta))\\&=\{q\in M;\ 存在连接p,q的测地线\gamma,使得L(\gamma)<\delta\},\end{aligned}\tag{4.6}$$

称为在 M 中以 p 为中心、以 δ 为半径的**测地球**; 其边界 $\partial\mathscr{B}_p(\delta)$ 记为 $\mathscr{S}_p(\delta)$, 称为在 M 中以 p 为中心、以 δ 为半径的**测地球面**. 很明显, 测地球 $\mathscr{B}_p(\delta)$ 和开球 $B_p(\delta)\subset T_pM$ 未必是同胚的. 但是, 从定理 2.2 得知, 当 δ 充分小时, 指数映射是从 $B_p(\delta)$ 到 $\mathscr{B}_p(\delta)$ 的光滑同胚; 此时, $\mathscr{S}_p(\delta)$ 与球面 S^{m-1} 是同胚的. 推论 4.2 断言, 从点 p 出发的测地线与 $\mathscr{S}_p(\delta)$ 是正交的, 所以通常把这样的测地线称为**径向测地线**.

定理 4.4　设 (M,g) 是 m 维黎曼流形, $p\in M$, $\mathscr{B}_p(\delta)$ $(\delta>0)$ 是 $B_p(\delta)\subset T_pM$ 在指数映射 $\exp_p$ 下的光滑同胚像. 如果

$$\gamma:[0,1]\to\mathscr{B}_p(\delta)$$

是一条从点 p 出发的径向测地线, 满足 $\gamma(0)=p$. 那么, 对于 M 中任意一条从 p 到 $q=\gamma(1)$ 的分段光滑曲线 $\beta:[a,b]\to M$ 都有

$$L(\beta)\geq L(\gamma),$$

并且等号仅在 $\beta([a,b])=\gamma([0,1])$ 时成立.

证明　记 $v=\gamma'(0)$, 则 γ 可以用指数映射表示为

$$\gamma(s)=\exp_p(sv),\quad 0\leq s\leq 1.$$

首先假定曲线 β 完全包含在测地球 $\mathscr{B}_p(\delta)$ 之内, 则 $\tilde{\beta}=\exp_p^{-1}\circ\beta$ 是在 $B_p(\delta)\subset T_pM$ 中从原点 0 到 v 的一条分段光滑曲线. 在单位球面 $S_p(1)\subset T_pM$ 上取一条分段光滑曲线 $u:[a,b]\to S_p(1)$, 以及非负的分段光滑函数 $r:[a,b]\to\mathbb{R}$, 使得

$$\tilde{\beta}(t)=r(t)\cdot u(t),\quad a\leq t\leq b.$$

从而，$r(a)=0$, $r(b)=|v|$. 于是

$$
\begin{aligned}
\beta(t)&=\exp_p(r(t)\cdot u(t)),\\
\beta'(t)&=(\exp_p)_{*r(t)u(t)}(r'(t)u(t)+r(t)u'(t))\\
&=r'(t)(\exp_p)_{*r(t)u(t)}(u(t))+r(t)(\exp_p)_{*r(t)u(t)}(u'(t)).
\end{aligned}
$$

由于 $|u(t)|\equiv 1$, $u'(t)\perp u(t)$, 再根据推论 4.2 和推论 4.3 有

$$
\begin{aligned}
\langle\beta'(t),\beta'(t)\rangle=&(r'(t))^2|(\exp_p)_{*r(t)u(t)}(u(t))|^2\\
&+(r(t))^2|(\exp_p)_{*r(t)u(t)}(u'(t))|^2\\
&+2r'(t)r(t)\langle(\exp_p)_{*r(t)u(t)}(u(t)),(\exp_p)_{*r(t)u(t)}(u'(t))\rangle\\
\geq&(r'(t))^2|u(t)|^2=|r'(t)|^2.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

所以，

$$
\begin{aligned}
L(\beta)&=\int_a^b|\beta'(t)|\mathrm{d}t\geq\int_a^b|r'(t)|\mathrm{d}t\geq\int_a^b r'(t)\mathrm{d}t\\
&=r(b)-r(a)=|v|=L(\gamma).
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

现在假定 β 不完全包含在 $\mathscr{B}_p(\delta)$ 之内，于是，存在 $c\in(a,b]$ 使得 $\beta(c)\in\mathscr{S}_p(\delta)$, 并且曲线段 $\beta_1=\beta|_{[a,c]}$ 完全包含在 $\mathscr{B}_p(\delta)$ 之内．因此，$L(\beta)\geq L(\beta_1)\geq\delta>L(\gamma)$.

如果 $L(\beta)=L(\gamma)$, 则根据上面的讨论，β 必定完全包含在 $\mathscr{B}_p(\delta)$ 内，而且 (4.8) 式中的等号成立．所以，$r'(t)\geq 0$, 并且 (4.8) 和 (4.7) 式成为等式．不失一般性，可设 $r(t)>0$, 因而有

$$
(\exp_p)_{*r(t)u(t)}(u'(t))=0.
$$

由于 $\exp_p:B_p(\delta)\to\mathscr{B}_p(\delta)$ 是光滑同胚，$u'(t)\equiv 0$, 因而

$$
u(t)=\text{const}.
$$

所以，

$$
u(t)=u(b)=\frac{v}{|v|},\quad \beta(t)=\exp_p\left(r(t)\cdot\frac{v}{|v|}\right).
$$

这说明，曲线 β 只不过是测地线 γ 的重新参数化，它们的像集是相同的，即

$$
\beta([a,b])=\gamma([0,1]).
$$

证毕．

定理 4.4 的几何意义如下：当 $\mathscr{B}_p(\delta)(\delta>0)$ 是 $B_p(\delta)\subset T_pM$ 在指数映射 $\exp_p$ 下的光滑同胚像时，测地球 $\mathscr{B}_p(\delta)$ 中的任意一点 q 与 p 点相连接的最短线是 p,q 之间的径向测地线段；特别地，它完全落在在 $\mathscr{B}_p(\delta)$ 内．

因此，自然地要问：在 M 上连接 $\mathscr{B}_p(\delta)$ 中任意两点 q_1,q_2 的最短线是否完全落在该测地球内呢？在一般情况下，这个问题的答案是否定的．事实上，可以考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面 S^2. 设 $p,q\in S^2$ 是 S^2 上的一对对径点，则

$$
\mathscr{B}_p(\pi)=S^2\backslash\{q\}
$$

是在 S^2 上以 p 点为中心的测地球，而且它是 $B_p(\pi)\subset T_pS^2$ 在指数映射 $\exp_p$ 下的同胚像．不难看出，存在

$$
q_1,q_2\in\mathscr{B}_p(\pi)\Big\backslash\overline{\mathscr{B}_p\left(\frac{\pi}{2}\right)},
$$

使得在 S^2 中连接 q_1,q_2 两点的最短曲线是通过 q 点的大圆弧，它显然不会完全落在测地球 $\mathscr{B}_p(\pi)$ 内．因此，问题的提法应该是：对于黎曼流形上的任意一点 p, 是否存在它的某个邻域 W, 使得连接其中任意两点的最短线都落在 W 之内？在下一节将肯定地回答这个问题．

对于 $p\in M$, 在 T_pM 中任意取定一个以零向量为原点的笛卡尔直角坐标系 (x^i). 根据定理 2.2, 在 T_pM 中存在原点的开邻域 V, 使得指数映射

$$
\exp_p:V\to U=\exp_p(V)\subset M
$$

是光滑同胚．把 T_pM 等同于 $\mathbb{R}^m$ 并设 $\varphi=\exp_p^{-1}:U\to V$, 便得到 p 点的一个局部坐标系 $(U,\varphi;x^i)$.

定义 4.1 如上得到的局部坐标系 $(U,\varphi;x^i)$ 称为黎曼流形 (M,g) 在 p 点的 **法坐标系**，相应的开集 U 称为 p 点的一个 **法坐标邻域**.

显然，如果不考虑坐标邻域的大小，p 点的法坐标系被确定到相差一个常系数的正交变换. 事实上，在 $\mathbb{R}^m$ 中任意取定一个笛卡尔直角坐标系，则在 U 上便给出了一个法坐标系. 为了方便起见，通常取半径 δ 适当小的测地球 $\mathscr{B}_p(\delta)=\exp_p(B_p(\delta))$ 作为 p 点的法坐标邻域，称为 p 点的 **法坐标球邻域**.

定理 4.5 设 $(U,\varphi;x^i)$ 是黎曼流形 (M,g) 上一点 p 的法坐标系，Γ^k_{ij} 是黎曼联络 D 在 $(U;x^i)$ 下的联络系数，则有

$$g_{ij}(p)=\delta_{ij},\qquad \Gamma^k_{ij}(p)=0,\quad 1\le i,j,k\le m,\tag{4.9}$$

或等价地，

$$g_{ij}(p)=\delta_{ij},\qquad \mathrm{d}g_{ij}(p)=\mathrm{d}g^{ij}(p)=0,\quad 1\le i,j\le m,\tag{4.9'}$$

其中 $g_{ij}=g\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i},\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right)$，矩阵 $(g^{ij})=(g_{ij})^{-1}$.

证明 根据法坐标系的定义，对于任意的 $a=(a^1,\cdots,a^m)\in V=\varphi(U)$，有

$$x^i\circ\exp_p(a)=a^i,\quad 1\le i\le m.$$

因此，在法坐标系 $(U;x^i)$ 下，从 p 点出发的径向测地线 $\exp_p(ta)$ 的参数方程是

$$x^i(t)=x^i(\exp_p(ta))=ta^i,\quad 1\le i\le m.$$

代入测地线的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x^k}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\Gamma^k_{ij}(ta)=0,\quad 1\le k\le m$$

得到

$$a^ia^j\Gamma^k_{ij}(ta)=0,\quad 0\le t\le 1,\quad 1\le i,j,k\le m.$$

在上式中令 $t=0$，并利用 $a=(a^1,\cdots,a^m)\in V$ 的任意性和 Γ^k_{ij} 关于下指标 i,j 的对称性，便得到

$$\Gamma^k_{ij}(0)=0,\quad \forall i,j,k,$$

这就是所要证明的 (4.9) 式. 定理的其余部分是显然的. 证毕.

法坐标系对于协变导数的计算具有重要意义：从光滑张量场的协变导数的公式得知，如果在一点 $p\in M$ 的法坐标系下进行计算，则张量场的分量在 p 点的协变导数就化为这些分量在该点的普通导数. 这个事实经常用来简化一些复杂的运算过程.

定义 4.2 设 (M,g) 是连通的 m 维黎曼流形，对于任意的两点 $p,q\in M$，令

$$d(p,q)=\inf\{L(\gamma);\ \gamma\text{是}M\text{中连接}p,q\text{的分段光滑曲线}\},\tag{4.10}$$

称为 p,q 两点之间的 **距离**.

定理 4.6 设 (M,g) 是连通的 m 维黎曼流形，则由 (4.10) 式定义的距离函数 d 满足度量空间的公理，因而 (M,d) 是一个度量空间.

证明 要依次证明 d 满足正定性、对称性和三角不等式.

(1) 正定性：显然，对于任意的 $p\in M$ 有 $d(p,p)=0$. 现设 $p,q\in M$，$p\ne q$. 因此可取 p 点的测地球 $\mathscr{B}_p(\delta)$，$\delta>0$ 使得 $q\notin\mathscr{B}_p(\delta)$. 则在 M 中任意一条连接 p,q 两点的分段光滑曲线 γ 与 $\mathscr{S}_p(\delta)$ 至少有一个交点. 因此，$L(\gamma)\ge\delta$. 在此式两端关于曲线 γ 取下确界，便得

$$d(p,q)=\inf_{\gamma}L(\gamma)\ge\delta>0.$$

正定性得证.

(2) 对称性：显然.

(3) 三角不等式：设 $p,q,r\in M$，$\gamma_1,\gamma_2:[0,1]\to M$ 分别是连接 p 与 q，以及 q 与 r 的分段光滑曲线. 把 γ_1,γ_2 接起来得到 M 中的一条

分段光滑曲线 γ, 其定义是

$$\gamma(t)=\begin{cases}\gamma_1(2t), & t\in[0,1/2];\\ \gamma_2(2t-1), & t\in[1/2,1].\end{cases}$$

显然 $\gamma(0)=p$, $\gamma(1)=r$. 根据 $d(p,r)$ 的定义,

$$d(p,r)\le L(\gamma)=L(\gamma_1)+L(\gamma_2).$$

在上式中分别取 $L(\gamma_1)$, $L(\gamma_2)$ 关于 γ_1, γ_2 的下确界, 便得

$$d(p,r)\le d(p,q)+d(q,r).$$

证毕.

根据距离 d 的定义 (4.10), 度量空间 (M,d) 是由黎曼度量 g 确定的. 以后, 在把黎曼流形 (M,g) 看作度量空间时, 指的就是定理 4.6 中所说的度量空间 (M,d). 特别地, 总是假定 (M,g) 是连通的.

注记 4.2 根据定义 4.2 不难知道 (参看注记 4.1)

$$\mathscr{B}_p(\delta)\subset\{q\in M;\ d(p,q)<\delta\}.$$

特别是, 如果指数映射 $\exp_p$ 在 $B_p(\delta)$ 上是光滑同胚, 则

$$\mathscr{B}_p(\delta)=\{q\in M;\ d(p,q)<\delta\}$$

(参看本章习题第 14,15 题). 由此可见, 黎曼流形 (M,g) 在看作度量空间(M,d) 时, 它的度量拓扑与微分流形 M 本身的拓扑是一致的.

在第二章的 §2.2, 曾经引入过黎曼流形之间的等距的概念, 那么, 它与度量空间之间的等距又有什么样的关系呢? 下面的定理回答了这个问题.

定理 4.7 设 $f:(M,g)\to(N,h)$ 是黎曼流形之间的等距, 用 d^g 和 d^h 分别表示在黎曼流形 (M,g) 和 (N,h) 上的距离函数, 则 f 也是从度量空间 (M,d^g) 到 (N,d^h) 的等距.

证明 如果 $f:(M,g)\to(N,h)$ 是等距, 则 f 保持对应曲线的弧长不变. 于是对于任意的 $p,q\in M$, 以及在 M 中连接 p,q 的任意一条分段光滑曲线 γ,

$$d^h(f(p),f(q))\le L(f\circ\gamma)=L(\gamma).$$

关于曲线 γ 求下确界, 得

$$d^h(f(p),f(q))\le\inf L(\gamma)=d^g(p,q).$$

在另一方面, 由于 $f^{-1}:(N,h)\to(M,g)$ 也是等距, 故有

$$d^g(p,q)=d^g(f^{-1}(f(p)),f^{-1}(f(q)))\le d^h(f(p),f(q)).$$

所以 $d^h(f(p),f(q))=d^g(p,q)$, 即 f 是度量空间 (M,d^g) 和 (N,d^h) 之间的等距. 定理得证.

§3.5 测地凸邻域

首先引入强凸子集的概念.

定义 5.1 设 S 是黎曼流形 (M,g) 的子集. 如果对于任意两点 $p,q\in\overline{S}$, 都有唯一的一条最短测地线 γ 连接 p 和 q, 并且在 γ 上除端点 p,q 以外的其余各点都落在 S 内, 则称 S 为 (M,g) 的一个**强凸子集**.

本节的主要目的是要说明一个事实, 即: 黎曼流形在每一点都具有强凸测地球作为该点的法坐标邻域, 称为该点的**测地凸邻域**. 为此, 需要下面的命题:

定理 5.1 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形, 则对于任意一点 $p\in M$, 都有 p 点的法坐标邻域 W, 以及正数 δ, 使得 W 中的每一点 q 都有法坐标球邻域 $\mathscr{B}_q(\delta)\supset W$. 换言之, W 包含在 W 中每一点的一个具有相同半径 δ 的法坐标球邻域内.

证明 根据定理 2.1, 对于任意的 $p \in M$, 存在 p 点的开邻域 U、正数 ε 以及光滑映射

$$\gamma : (-2,2) \times \mathscr{U}^{\varepsilon} \to M,$$

使得对于每一个 $(q,v) \in \mathscr{U}^{\varepsilon}$, $\gamma(t) = \gamma(t;q,v) = \exp_q(tv)$ 是定义在区间 $(-2,2)$ 上、且满足初始条件 $\gamma(0) = q, \gamma'(0) = v$ 的唯一的一条测地线. 定义光滑映射 $F : \mathscr{U}^{\varepsilon} \to M \times M$, 使得

$$F(q,v) = (q, \exp_q(v)), \quad \forall (q,v) \in \mathscr{U}^{\varepsilon}.$$

由于 $F(p,0) = (p,p)$, 故 $U \times U$ 是点 $F(p,0)$ 在 $M \times M$ 中的一个开邻域. 不妨设 $(U;x^i)$ 是 p 点的一个局部法坐标系, 则当 U 充分小时, $U \times U$ 是 $M \times M$ 在点 $F(p,0)$ 的一个局部坐标系. 此时, 在 $\mathscr{U}^{\varepsilon}$ 上有确定的局部坐标系 (x^i, v^i), 使得任意一点 $(q,v) \in \mathscr{U}^{\varepsilon}$ 的坐标由 $x^i(q)$ 和 $v^i = v(x^i)$ 给出. 于是, 映射 F 可以表示为

$$(q,v) \to (x^i(q), x^i(\exp_q(v))).$$

由于 $(\exp_p)_{*0} : T_pM \to T_pM$ 是恒同映射, 易知 F 在点 $(p,0)$ 的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ * & I_m \end{pmatrix},$$

其中 I_m 是 m 阶单位方阵. 所以, 存在 p 点的开邻域 $V \subset U$, 以及 $\delta \in (0,\varepsilon)$, 使得 F 是 $\mathscr{V}^{\delta}$ 到 $M \times M$ 的开子集 $\mathscr{V}' = F(\mathscr{V}^{\delta})$ 上的微分同胚, 其中 $\mathscr{V}^{\delta}$ 的意义同 $\mathscr{U}^{\varepsilon}$, 即

$$\mathscr{V}^{\delta} = \{(q,v) \in TM;\ q \in V,\ v \in T_qM,\ 且 |v| < \delta\}.$$

取以 p 点为中心的开球 W, 使得 $W \times W \subset \mathscr{V}'$, 则 W 和 δ 满足定理的要求.

事实上, 对于任意的 $q, q' \in W$, 由于 $W \times W \subset \mathscr{V}' = F(\mathscr{V}^{\delta})$, 不难看出

$$(q,q') \in F(\{q\} \times \{v \in T_qM;\ |v| < \delta\}) = \{q\} \times \mathscr{B}_q(\delta).$$

这意味着 $q' \in \mathscr{B}_q(\delta)$, 故有 $W \subset \mathscr{B}_q(\delta)$, 定理得证.

推论 5.2 对于黎曼流形 (M,g) 上的每一点 p, 都存在 p 点的一个开邻域 W 和正数 δ, 使得 W 中任意两点 q_1, q_2 都可以用唯一的一条长度小于 δ 的最短测地线相连接.

证明 选取符合定理 5.1 的要求的开邻域 W 和正数 δ. 任给 $q_1, q_2 \in W$, 由于 $W \subset \mathscr{B}_{q_1}(\delta)$, $q_2 \in \mathscr{B}_{q_1}(\delta)$. 根据定理 4.4, q_1 与 q_2 可以用 $\mathscr{B}_{q_1}(\delta)$ 中的径向测地线相连接, 它是连接 q_1, q_2 的唯一的一条最短曲线, 并且其长度小于 δ. 证毕.

下面的定理在一定的意义上说明了测地球的凸性.

定理 5.3 设 p 是 m 维黎曼流形 (M,g) 上的任意一点, 则存在正数 c, 使得对于任意的正数 $r < c$ 以及任意的 $q \in \mathscr{S}_p(r)$, 当 M 中的测地线 γ 与 $\mathscr{S}_p(r)$ 在 q 点相切时, γ 在 q 点的一个邻域内与闭测地球 $\overline{\mathscr{B}_p(r)}$ 仅有一个公共点 q.

证明 设 $(W;x^i)$ 是 p 点的一个法坐标系, 取 $\delta > 0$, 使得

$$\mathscr{B}_p(\delta) \subset W.$$

因此

$$\mathscr{B}_p(\delta) = \left\{ q \in W;\ \sum_{i=1}^{m} (x^i(q))^2 < \delta^2 \right\}.$$

设 $0 < r < \delta$, 则测地球面 $\mathscr{S}_p(r)$ 的方程为

$$F(x^1, \cdots, x^m) \equiv \sum_{i=1}^{m} (x^i)^2 - r^2 = 0.$$

对于任意的 $q \in \mathscr{S}_p(r)$, 设 γ 是在 M 中任意一条与 $\mathscr{S}_p(r)$ 在 q 点相切的测地线, 其参数方程是

$$x^i = x^i(t), \quad x^i(0) = x^i(\gamma(0)) = x^i(q), \quad 1 \le i \le m.$$

令 $F(t) = F(x^1(t), \cdots, x^m(t))$, 则有

$$F(0) = F(x^1(0), \cdots, x^m(0)) = 0,$$

并且 $\gamma(t)\in\overline{\mathscr{B}_p(r)}$ 当且仅当 $F(t)\le 0$. 由于 $(W;x^i)$ 是 p 点的法坐标系，测地线 γ 可以表示为

$$\gamma(t)=\exp_p(x^1(t),\cdots,x^m(t)).$$

另外，从 p 到 q 的径向测地线为

$$\sigma(s)=\exp_p(s\cdot(x^1(0),\cdots,x^m(0))),\quad 0\le s\le 1.$$

所以

$$\gamma'(0)=(\exp_p)_{*(x^1(0),\cdots,x^m(0))}\left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}(0),\cdots,\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}t}(0)\right),$$
$$\sigma'(1)=(\exp_p)_{*(x^1(0),\cdots,x^m(0))}(x^1(0),\cdots,x^m(0)).$$

由定理的假设，$\gamma'(0)\perp\sigma'(1)$，即有 $\langle\gamma'(0),\sigma'(1)\rangle_q=0$. 根据 Gauss 引理得知

$$\begin{aligned}0&=\left\langle\left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}(0),\cdots,\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}t}(0)\right),(x^1(0),\cdots,x^m(0))\right\rangle_p\\&=\sum_{i=1}^m x^i(0)\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}(0)=\frac12\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(x^1(t),\cdots,x^m(t))\Big|_{t=0}\\&=\frac12F'(0).\end{aligned}$$

由此可见，$t=0$ 是函数 $F(t)$ 的一个临界点.

下面将要证明，存在充分小的正数 c，使得当 $0<r<c$ 时，$t=0$ 是函数 $F(t)$ 的一个局部最小值点. 为此，需要计算 $F(t)$ 在 $t=0$ 处的二阶导数. 利用测地线 γ 所满足的方程可得

$$\begin{aligned}F''(t)&=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}F(x^1(t),\cdots,x^m(t))=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^m x^i(t)\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}(t)\right)\\&=2\sum_{i=1}^m\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2+2\sum_{i=1}^m x^i(t)\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}(t)\\&=2\sum_{j,k=1}^m\left(\delta_{jk}-\sum_{i=1}^m x^i(t)\Gamma^i_{jk}(\gamma(t))\right)\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}(t)\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}(t).\end{aligned}$$

在上式中令 $t=0$，得

$$\begin{aligned}F''(0)&=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}F(x^1(t),\cdots,x^m(t))\Big|_{t=0}\\&=2\sum_{j,k=1}^m\left(\delta_{jk}-\sum_{i=1}^m x^i(0)\Gamma^i_{jk}(q)\right)\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}(0)\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}(0).\end{aligned}$$

由定理 4.5，$\Gamma^i_{jk}(p)=0$；又因为

$$\sum_i(x^i(0))^2<\delta^2,$$

即每一个 $x^i(0)=x^i(q)$ 是有界的，故存在正数 $c\le\delta$，使得当 $\tilde q\in\mathscr{B}_p(c)$ 时，m 阶方阵

$$\left(\delta_{jk}-\sum_i x^i(\tilde q)\Gamma^i_{jk}(\tilde q)\right)$$

是正定矩阵. 于是，对于任意的正数 $r<c$，当测地线 γ 与 $\mathscr{S}_p(r)$ 在 q 点相切时，

$$F''(0)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}F(x^1(t),\cdots,x^m(t))\Big|_{t=0}>0.$$

所以，函数 $F(t)$ 在 $t=0$ 的一个充分小的邻域 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 内严格下凸，且在 $t=0$ 处取极小值 $F(0)=0$. 从而当 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ 且 $t\neq0$ 时，

$$F(t)=F(x^1(t),\cdots,x^m(t))>0,$$

这意味着 $\gamma(t)\notin\overline{\mathscr{B}_p(r)}$. 定理得证.

定理 5.4 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形，p 是 M 中任意一点. 则存在 $\eta>0$，使得对于任意两点 $q_1,q_2\in\overline{\mathscr{B}_p(\eta)}$，必有唯一的一条最短测地线 γ 连接 q_1 与 q_2，并且在 γ 上除端点 q_1,q_2 以外的其余点都落在 $\mathscr{B}_p(\eta)$ 内.

证明 根据定理 5.1, 可取 p 点的邻域 W 和某个 $\delta>0$, 使得对于每一点 $q\in W$, $\mathscr{B}_q(\delta)$ 是点 q 的法坐标球邻域, 且 $W\subset\mathscr{B}_q(\delta)$. 再由定理 5.3, 存在正数 c, 使得 $\mathscr{B}_p(c)\subset W$, 并且当 $0<r<c$ 时, 每一条与 $\mathscr{S}_p(r)$ 相切的测地线 γ 在切点 $q=\gamma(0)$ 的一个邻域内和闭测地球 $\overline{\mathscr{B}_p(r)}$ 仅有一个公共点 q.

取定正数 $\delta_1<c/4$, $\eta<\delta_1$. 则对于任意的 $q_1,q_2\in\mathscr{B}_p(\eta)\subset\mathscr{B}_p(c)$, 存在唯一的一条最短测地线 γ 连接 q_1,q_2 两点, 其长度

$$L(\gamma)=d(q_1,q_2)\le d(q_1,p)+d(p,q_2)\le 2\eta.$$

此外, 对于 γ 上任意一点 q' 有

$$d(p,q')\le d(p,q_1)+d(q_1,q')\le\eta+2\eta<\frac{3c}{4}<c,$$

因而 γ 完全落在测地球 $\mathscr{B}_p(c)$ 内.

假定 $\gamma=\gamma(t)$, $0\le t\le 1$. 由区间 $[0,1]$ 的紧致性, 存在 $t_0\in[0,1]$ 使得点 $q=\gamma(t_0)$ 满足

$$d(p,q)=\max\{d(p,\gamma(t));\ 0\le t\le 1\}.$$

我们断言: $q=q_1$ 或 $q=q_2$. 如若不然, 必有 $t_0\in(0,1)$. 于是 t_0 为函数 $F(t)=d(p,\gamma(t))$ 在开区间 $(0,1)$ 内的最大值点, 因而是 $F(t)$ 的临界点. 设 $r=d(p,q)$, 则 $0<r<c$, 并且 γ 与 $\mathscr{S}_p(r)$ 在 q 点相切. 根据正数 c 的取法, γ 在 t_0 的一个邻域内除 $q=\gamma(t_0)$ 点以外的其余各点都在 $\overline{\mathscr{B}_p(r)}$ 之外. 这与 q 点的取法相矛盾, 故断言成立. 因此, 对于任意的 $t\in(0,1)$,

$$d(p,\gamma(t))<\max\{d(p,q_1),d(p,q_2)\}\le\eta.$$

所以, 在 γ 上除端点 q_1,q_2 之外的其余各点都落在 $\mathscr{B}_p(\eta)$ 内. 证毕.

注记 5.1 根据定义 5.1, $\mathscr{B}_p(\eta)$ 是一个强凸的测地球, 因而是 p 点的一个测地凸邻域. 于是定理 5.4 断言: 黎曼流形在每一点都有一个测地凸邻域. 由此可见, 在这一方面黎曼流形的局部性态和欧氏空间是一样的.

§3.6 Hopf-Rinow 定理

在前面各节中, 对测地线的局部性态已经进行了充分的讨论. 特别地, 对于连通黎曼流形 (M,g) 中的任意一点 q_1, 当 $q_2\in M$ 充分接近 q_1 时, 都有最短测地线把它们连接起来. 但是, 如果没有距离充分小的假设, 这样的最短测地线未必是存在的. 事实上, 读者很容易在欧氏空间中找到例子说明这一点. 在本节将引入完备黎曼流形的概念, 并证明在完备黎曼流形上任意两点都可以用最短测地线连接起来.

设 M 是一个度量空间. 在点集拓扑学中已经知道: 如果在 M 中每一个 Cauchy 点列都有极限, 则称度量空间 M 是完备的. 在另一方面, 任何连通的黎曼流形 (M,g) 都可以看作度量空间, 相应的距离函数 d 由 (4.10) 式给出. 于是有下面的定义:

定义 6.1 设 (M,g) 是连通的黎曼流形. 如果 (M,g) 作为度量空间是完备的, 则称它是**完备**的黎曼流形.

以后假定所提到的黎曼流形都是连通的.

引理 6.1 设 $\mathscr{B}_p(\delta')$ 是黎曼流形 (M,g) 中以 p 点为中心、以 δ' 为半径的法坐标球邻域, $\delta<\delta'$, $q\in M$. 如果 $q\notin\mathscr{B}_p(\delta)$, 则存在一点 $q_0\in\mathscr{S}_p(\delta)$ 使得

$$d(p,q)=\delta+d(q_0,q).$$

证明 设 $\gamma:[0,1]\to M$ 是连接 p,q 两点的任意一条分段光滑曲线. 由于 $q\notin\mathscr{B}_p(\delta)$, γ 与 $\mathscr{S}_p(\delta)$ 必有公共点. 取最小的 $t_0\in(0,1]$, 使得 $\gamma(t_0)\in\mathscr{S}_p(\delta)$. 于是

$$\begin{aligned}L(\gamma)&=L(\gamma|_{[0,t_0]})+L(\gamma|_{[t_0,1]})\ge\delta+d(\gamma(t_0),q)\\&\ge\delta+\inf\{d(q',q);\ q'\in\mathscr{S}_p(\delta)\}.\end{aligned}$$

在上式两端关于曲线 γ 取下确界, 则得

$$d(p,q)\ge\delta+\inf\{d(q',q);\ q'\in\mathscr{S}_p(\delta)\}.\tag{6.1}$$

在另一方面，对于任意的 $q' \in \mathscr{S}_p(\delta)$ 有三角不等式

$$d(p,q) \le d(p,q') + d(q',q) \le \delta + d(q',q).$$

再关于 $q' \in \mathscr{S}_p(\delta)$ 取下确界，又得到

$$d(p,q) \le \delta + \inf\{d(q',q);\ q' \in \mathscr{S}_p(\delta)\}.$$

将它与 (6.1) 式相比较，便有

$$d(p,q) = \delta + \inf\{d(q',q);\ q' \in \mathscr{S}_p(\delta)\}. \tag{6.2}$$

最后，由于 $\mathscr{S}_p(\delta)$ 是紧致的，并且距离函数 d 是连续的，故存在 $q_0 \in \mathscr{S}_p(\delta)$，使得

$$d(q_0,q) = \inf\{d(q',q);\ \ q' \in \mathscr{S}_p(\delta)\}.$$

代入 (6.2)，引理得证.

定理 6.2 设 p 是黎曼流形 (M,g) 上的任意一点. 如果指数映射 $\exp_p$ 在 T_pM 上处处有定义，则 M 中的每一个点 q 都可以用最短测地线与 p 点相连接.

证明 设 $\mathscr{B}_p(2\delta)$ 是以 p 为中心的法坐标球邻域， $q \in M$. 如果 $q \in \mathscr{B}_p(2\delta)$，则由定理 4.4, p, q 两点可以用径向测地线相连接，而且这条径向测地线是连接 p, q 的最短线.

现在假定 $q \notin \mathscr{B}_p(2\delta)$，故 $q \notin \mathscr{B}_p(\delta)$. 则由引理 6.1，存在 $q_0 \in \mathscr{S}_p(\delta)$，使得

$$d(p,q) = \delta + d(q_0,q).$$

由于 $q_0 \in \mathscr{B}_p(2\delta)$，故有 $v_0 \in T_pM$ 使得 $q_0 = \exp_p(v_0)$. 特别地， $v_0 \ne 0$. 令 $v = v_0/|v_0|$，则 $v \in T_pM$ 是单位切向量. 根据定理假设， $\exp_p$ 在 T_pM 上处处有定义，因而对于任意的 $t \ge 0$, $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ 是有意义的. 由此得到一条正规测地线 $\gamma : [0,+\infty) \to M$. 令 $a = d(p,q)$，下面将证明测地线段 $\gamma|_{[0,a]}$ 是连接 p, q 的最短测地线. 由于 γ 是正规测地

线 (即 $|\gamma'(t)| \equiv 1$), $L(\gamma|_{[0,a]}) = a = d(p,q)$，所以只要证明 $\gamma(a) = q$ 即可. 为此，考虑集合

$$A = \{t \in [0,a];\ d(\gamma(t),q) = a - t\}.$$

显然， $0 \in A$，并且 $\gamma(a) = q \Longleftrightarrow a \in A$. 由于距离函数 d 和测地线 $\gamma(t)$ 的连续性， A 是 $[0,a]$ 的非空闭子集. 记

$$b = \sup A,$$

则 $b \in A$. 如果 $b \ne a$，则 $b < a$. 选取充分小的正数 $\varepsilon' < a - b$，使得 $\mathscr{B}_{\gamma(b)}(\varepsilon')$ 为 $\gamma(b)$ 的法坐标球邻域，同时取正数 $\varepsilon < \varepsilon'$，使得

$$q \notin \mathscr{B}_{\gamma(b)}(\varepsilon).$$

根据 A 的定义和引理 6.1，存在 $q_1 \in \mathscr{S}_{\gamma(b)}(\varepsilon)$，使得

$$a - b = d(\gamma(b),q) = \varepsilon + d(q_1,q). \tag{6.3}$$

我们断言： $q_1 = \gamma(b+\varepsilon)$.

事实上，由三角不等式得

$$d(p,q_1) \ge d(p,q) - d(q_1,q) = a - (a - b - \varepsilon) = b + \varepsilon. \tag{6.4}$$

在另一方面，取最短测地线 γ_1 连接 $\gamma(b)$ 和 q_1，再把 $\gamma|_{[0,b]}$ 与 γ_1 拼接起来得到一条分段光滑曲线 $\tilde{\gamma}$(参看定理 4.6 的证明)，其长度为

$$b + \varepsilon = L(\gamma|_{[0,b]}) + L(\gamma_1) = L(\tilde{\gamma}) \ge d(p,q_1).$$

将它与不等式 (6.4) 相比较，得到 $d(p,q_1) = b + \varepsilon = L(\tilde{\gamma})$. 所以分段光滑曲线 $\tilde{\gamma}$ 是连接 p, q_1 的最短曲线，由定理 3.5 得知它是一条测地线. 根据测地线的唯一性， $\tilde{\gamma} = \gamma|_{[0,b+\varepsilon]}$. 从而有

$$\gamma(b+\varepsilon) = \tilde{\gamma}(b+\varepsilon) = \gamma_1(\varepsilon) = q_1.$$

把此式代入 (6.3) 式，并注意到 $b \in A$，便得

$$d(\gamma(b+\varepsilon), q) = a - b - \varepsilon = a - (b+\varepsilon).$$

根据集合 A 的定义，$b+\varepsilon \in A$. 这与 b 的取法相矛盾，此矛盾是由假设 $b \neq a$ 引起的，所以 $a = b \in A$. 定理得证.

定理 6.3 (Hopf-Rinow 定理) 对于黎曼流形 (M, g)，下面四个命题是相互等价的：

(1) 对于任意的 $p \in M$，指数映射 $\exp_p$ 在 T_pM 上处处有定义；

(2) 存在一点 $p \in M$，使得指数映射 $\exp_p$ 在 T_pM 上处处有定义；

(3) (M, d) 的任意一个有界闭子集都是 M 的紧致子集；

(4) (M, g) 是完备的.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 是显然的. 下面依次证明 (2) $\Longrightarrow$ (3)，(3) $\longrightarrow$ (4) 和 (4) $\Longrightarrow$ (1).

(2) $\Longrightarrow$ (3). 假定 (2) 成立，并设 A 是 (M, d) 的任意一个有界闭子集，则存在充分大的正数 R，使得

$$A \subset V_p(R) = \{q \in M;\ d(p, q) < R\}.$$

根据条件 (2) 和定理 6.2，对于任意的 $q \in V_p(R)$，在 M 中有最短测地线连接 p 与 q. 于是存在单位切向量 $v \in T_pM$，使得

$$\exp_p(av) = q,$$

其中 $a = d(p, q)$. 所以 $av \in B_p(R)$. 这就证明了

$$V_p(R) \subset \exp_p(B_p(R)) \subset \exp_p(\overline{B_p(R)}),$$

从而有 $A \subset V_p(R) \subset \exp_p(\overline{B_p(R)})$. 注意到 $\overline{B_p(R)}$ 是 T_pM 中的紧致子集，并且 $\exp_p$ 是连续映射，故 $\exp_p(\overline{B_p(R)})$ 是 M 中的紧致子集. 现在 A 是 $\exp_p(\overline{B_p(R)})$ 的闭子集，因而也是紧致的.

(3) $\Longrightarrow$ (4). 假定 $\{p_i\}$ 是 M 中的任意一个 Cauchy 点列，即对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得当 $i, j > N$ 时，总是有

$$d(p_i, p_j) < \varepsilon.$$

令 K 是点列 $\{p_i\}$ 中互不相同的点构成的集合，则 K 是 M 的一个有界子集.

如果 K 没有聚点，则它是 M 的有界闭子集. 因而，根据假设，它是 M 的紧致子集. 在另一方面，因为 K 没有聚点，所以对于每一个 i，存在 p_i 的开邻域 U_i，使得

$$U_i \cap K = \{p_i\}.$$

这样就得到 K 的一个开覆盖 $\mathscr{U} = \{U_i;\ 1 \le i \le +\infty\}$，其中每一个 U_i 仅含 K 中的一个点 $\{p_i\}$. 由于 K 是紧致的，故覆盖 $\mathscr{U}$ 必有一个有限子覆盖，因而 K 是有限集. 此时，Cauchy 点列 $\{p_i\}$ 必在某个正整数 N 之后取常值点 $p \in K \subset M$，因而收敛于 p 点.

如果 K 有聚点，取 K 的一个聚点 $p \in M$，则 $\{p_i\}$ 有一个收敛于 p 点的子序列 $\{p_{i_k}\}$. 由于

$$d(p_i, p) \le d(p_i, p_{i_k}) + d(p_{i_k}, p),$$

而且 $\{p_i\}$ 是 Cauchy 序列，故不难知道，当 $i \to \infty$ 时

$$d(p_i, p) \to 0,$$

即点列 $\{p_i\}$ 本身也收敛于点 p. 因此 (M, g) 是完备的.

(4) $\Longrightarrow$ (1). 采用反证法. 假设存在某个点 $p \in M$ 以及单位切向量 $v \in T_pM$，使得测地线 $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ 在 $t_0 > 0$ 处没有定义. 不失一般性，可以假定 γ 在 $[0, t_0)$ 上处处有定义. 在区间 $[0, t_0)$ 内任意取一个收敛于 t_0 的单调上升序列 $\{t_i\}$. 则对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使当 $i \ge j > N$ 时，$0 \le t_i - t_j < \varepsilon$. 由于测地线 γ 以弧长为参数，故

$$d(\gamma(t_i), \gamma(t_j)) \le L(\gamma|_{[t_j, t_i]}) = t_i - t_j < \varepsilon.$$

所以，$\{\gamma(t_i)\}$ 是 M 中的一个 Cauchy 点列．由于 M 是完备的，$\{\gamma(t_i)\}$ 必收敛于一点 $q \in M$．对于任意的 $t \in [0, t_0)$，必有充分大的 N，使得当 $i > N$ 时，$t_i \in (t, t_0)$．由三角不等式得

$$\begin{aligned} d(\gamma(t), q) &\leq d(\gamma(t), \gamma(t_i)) + d(\gamma(t_i), q) \\ &\leq t_0 - t + d(\gamma(t_i), q), \quad \forall i > N. \end{aligned}$$

让 $i \to \infty$，得 $d(\gamma(t), q) \leq t_0 - t$，因而

$$\lim_{t \to t_0} \gamma(t) = q.$$

令 $\gamma(t_0) = q$，则测地线 γ 的定义可以延拓至 t_0，与 t_0 的取法相矛盾，定理得证．

作为 Hopf-Rinow 定理的直接应用有

推论 6.4 在完备黎曼流形上任意两点都可以用最短测地线互相连接．

由于紧致的度量空间都是完备的，故有

推论 6.5 紧致的连通黎曼流形是完备的．

等距把闭集映射为闭集，同时保持子集的有界性与紧致性不变．所以由定理 6.3(3)，得到

推论 6.6 等距保持黎曼流形的完备性不变．

定义 6.2 设 (M, g) 是一个黎曼流形，如果存在另一个连通的黎曼流形 (N, h)，使得 (M, g) 和 (N, h) 的一个真开子流形 $(\tilde{M}, h)$ 是等距的，则称 (M, g) 是**可延拓的黎曼流形**；否则就称它为**不可延拓的**．

整体微分几何所关心的主要是黎曼流形的整体性质，而对于整体性质的研究，则往往需要假定该黎曼流形是不可延拓的．下面的定理说明完备性是在整体微分几何的研究中自然的、必要的假设．

定理 6.7 完备黎曼流形是不可延拓的．

证明 设 (M, g) 是完备黎曼流形．假定 (M, g) 是可以延拓的，则 (M, g) 等距于另一个连通黎曼流形 (N, h) 的某个真开子流形 $(\tilde{M}, h)$．

因为等距保持完备性不变，所以，$(\tilde{M}, h)$ 也是完备的黎曼流形．注意到作为开子流形，$\tilde{M}$ 在 N 中的闭包 $\overline{\tilde{M}}$ 的每一个点都是 $\tilde{M}$ 的聚点，因而必是 $(\tilde{M}, h)$ 中一个 Cauchy 点列的极限点．再利用 $(\tilde{M}, h)$ 的完备性和点列极限的唯一性可知，$\overline{\tilde{M}} \subset \tilde{M}$．由此可见，$\tilde{M}$ 同时是 N 的闭子集．由于 (N, h) 是连通的，它没有既开且闭的非空真子集，故 $\tilde{M} = N$．这与 $\tilde{M}$ 是 N 的真开子集相矛盾，定理得证．

习 题 三

1. 试举例说明，测地线在等距浸入下的像未必是测地线．

2. 设 f 和 g 均为光滑函数，并且满足 $(f')^2 + (g')^2 \neq 0$，$f \neq 0$．令

$$\varphi(u, v) = \{f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)\},$$
$$u_0 < u < u_1, \quad v_0 < v < v_1,$$

则 φ 是浸入在 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面，其诱导度量的系数是

$$g_{11} = f^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = (f')^2 + (g')^2.$$

(1) 证明：在曲面 φ 上的测地线的微分方程是

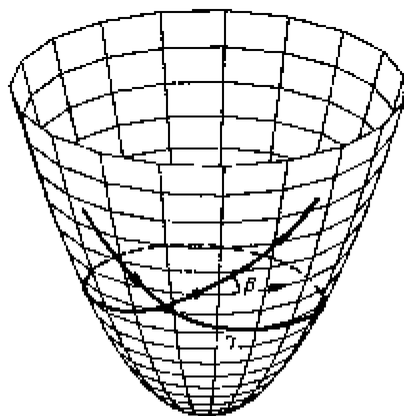
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\dfrac{ff'}{f^2}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \dfrac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 0. \end{cases}$$

(2) 说明上述方程组的几何意义：除了子午线和平行圆外，这两个方程意味着测地线 γ 的切向量 $\gamma'(t)$ 的长度是常数；第一个方程还表明，如果 $\beta(t) < \pi$ 是测地线 γ 与平行圆 P 在点 $\gamma(t)$ 处相交所成的有向角，则有

$$r\cos\beta = \mathrm{const},$$

其中 r 是平行圆 P 的半径．上述方程称为 **Clairaut 关系**．

(3) 设 M 是由函数 $f(v)=v,\ g(v)=v^2$ 确定的旋转椭圆抛物面，利用 Clairaut 关系式证明：如果 M 的测地线 γ 不是子午线，则它必有无穷多个自交点 (见图).



第 2(3) 题图

3. 设 M 是黎曼流形，它的切丛 TM 具有诱导的黎曼度量 $\tilde{g}$(参看第二章习题第 48 题). 证明：对于 M 上任意一条测地线 γ，曲线

$$\tilde{\gamma}(t)=(\gamma(t),\gamma'(t))$$

是在 TM 上的水平曲线 (参看第二章习题第 49 题)；并且相对于黎曼度量 $\tilde{g}$ 而言，$\tilde{\gamma}$ 是 TM 上的测地线.

4. 利用定理 1.6 和例 1.3 求 $H^2(c)(c<0)$ 上从任意一点出发、沿任意一个切方向引出的测地线，并作出几何解释.

5. 利用定理 1.6 把本章习题第 4 题的结论推广到一般的双曲空间 $H^n(c)(c<0)$.

6. 设 $\sigma: M\to M$ 是等距，且存在 $p\in M$，使得 $\sigma(p)=p$，并且 $\sigma_{*p}=-\mathrm{id}|_{T_pM}$. 又设 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是经过点 p 的一条测地线，$\gamma(0)=p$，X 是沿测地线 γ 的平行向量场. 证明：

$$\sigma_{*\gamma(t)}(X|_{\gamma(t)})=-X|_{\gamma(-t)},\quad \forall t\in(-\varepsilon,\varepsilon).$$

7. 设 G 是李群，$\mathfrak{g}$ 是它的李代数 (参看第一章习题第 44 题). 对于任意的 $X\in\mathfrak{g}$，即 X 是 G 上的左不变向量场，设

$$\varphi:(-\varepsilon,\varepsilon)\to G$$

是 X 在 G 上通过单位元 $e\in G$ 的积分曲线，即

$$\varphi(0)=e,\quad \varphi'(t)=X|_{\varphi(t)},\quad \forall t\in(-\varepsilon,\varepsilon).$$

证明：

(1) φ 对于任意的 $t\in\mathbb{R}$ 有定义，并且满足

$$\varphi(t+s)=\varphi(t)\cdot\varphi(s),\quad \forall t,s\in\mathbb{R},$$

因而映射 φ 是从加法群 $\mathbb{R}$ 到 G 的同态，即是李群 G 的一个单参数子群 (参看第一章习题第 45 题)；

(2) 如果 g 是 G 上的双不变黎曼度量 (参看第二章习题第 16 题)，则在黎曼流形 (G,g) 上从单位元 e 出发的光滑曲线 $\psi:\mathbb{R}\to G$ 是测地线当且仅当 ψ 是 G 的单参数子群.

8. 设 X 是连通黎曼流形 M 上的 Killing 向量场 (参看第二章习题第 23 题). 证明：如果存在点 $p\in M$，使得 $X(p)=0$，并且对于任意的 $v\in T_pM$，$D_vX=0$，则 $X\equiv 0$.

9. 设微分流形 M 满足第二可数公理，γ 是 M 上的一条分段光滑曲线，如果 $U=U(t)$ 是沿 γ 定义的分段光滑向量场，证明：存在 γ 的一个分段光滑变分 Φ，使得 U 是它的变分向量场.

10. 设 $\mathbb{R}^2_+$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的上半平面，即

$$\mathbb{R}^2_+=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+;\ y>0\}.$$

设 $\mathbb{R}^2_+$ 上的黎曼度量 g 由 $g_{11}=g_{22}=1/y^2,\ g_{12}=g_{21}=0$ 给出. 试求黎曼流形 $(\mathbb{R}^2_+,g)$ 上的所有测地线.

11. 在圆柱面

$$M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+z^2=1,\ -\infty<y<\infty\}$$

上令 $p=(0,0,1)$. 证明：对于任意的 $q=(x_0,y_0,z_0)\in M$, 如果

$$q\neq(0,0,-1),$$

则存在连接 p,q 的测地线，它不是最短线.

12. 设 M 是 m 维黎曼流形， $p\in M$. 证明：在点 p 的一个邻域 U 内存在光滑的单位正交标架场 $\{e_i\}$, 使得对于通过点 p 的任意测地线 $\gamma(t)$, 都有 $\mathrm{D}_{\gamma'(t)}e_i\equiv 0\ (\forall i)$; 特别地,

$$(\mathrm{D}_{e_i}e_j)(p)=0\quad \forall i,j.$$

这样的标架场 $\{e_i\}$ 称为 M 在点 p 的一个 **测地平行标架场**.

13. 利用本章习题第 12 题中的测地平行标架场重新证明第二章习题第 34 题.

14. 设 (M,g) 是黎曼流形， $p\in M$, $\delta>0$. 令

$$V_p(\delta)=\{q\in M;\ d(p,q)<\delta\},$$

证明：如果存在 p 点的一个法坐标邻域 U, 使得 $V_p(\delta)\subset U$, 则

$$V_p(\delta)=\mathscr{B}_p(\delta)$$

是 (M,g) 的一个测地球.

15. 试举例说明，在黎曼流形 (M,g) 中，在本章习题第 14 题中所定义的集合 $V_p(\delta)$ 未必是测地球.

16. 设 X 是黎曼流形 M 上的一个 Killing 向量场 (参看第二章习题第 23 题), $p\in M$, U 是 p 点的一个法坐标邻域. 证明：如果 p 是 X 在 U 中的唯一零点，则 X 和 U 中所有以 p 为中心的测地球面相切.

17. (**Liouville 定理**) 设 $\pi:TM\to M$ 是黎曼流形 (M,g) 的切丛， TM 上的一个光滑切向量场 G 称为 **测地向量场**, 如果它生成的局部单参数变换群 $(t,\bar{x})\to\varphi(t,\bar{x})$ 是一个 **测地流**, 即对于任意的 $\bar{x}\in TM$, 曲线 $\bar{\gamma}_{\bar{x}}(t)=\varphi(t,\bar{x})$ 在局部上可以表示为

$$\bar{\gamma}_{\bar{x}}(t)=(\gamma(t),\gamma'(t)),$$

其中 γ 是 M 中的测地线.

(1) 证明： TM 上每一个测地场 G 的散度 $\operatorname{div}_{\bar{g}}G=0$, 这里的 $\bar{g}$ 是切丛上的诱导度量 (参看第二章习题第 48 题);

(2) 由 (1) 的结论说明，测地流保持 TM 的体积元不变.

18. 设 M 是黎曼流形， $\varphi:M\to M$ 是光滑的满映射. 证明：如果对于任意的 $p,q\in M$,

$$d(\varphi(p),\varphi(q))=d(p,q),$$

则 φ 是第二章定义 2.2 意义下的等距.

19. 设 M,N 是完备单连通的实解析黎曼流形. 假定存在开子集 $U\subset M$, $V\subset N$, 以及等距 $\varphi:U\to V$, 证明： φ 可以延拓为从 M 到 N 的等距.

20. 设 M 是黎曼流形， $p\in M$, $\rho:M\to\mathbb{R}$ 是在 M 上相对于点 p 的距离函数. 证明：函数 ρ^2 在 p 点的一个充分小的邻域内是光滑的，并且 $\operatorname{Hess}(\rho^2)$ 是正定的.

21. 设 N 是完备的黎曼流形， $M\subset N$ 是 N 的闭子流形， $p_0\in N\backslash M$. 又设 $d(p_0,M)=\inf\{d(p_0,q);\ \forall q\in M\}$ 是从 p_0 到 M 的距离. 证明:

(1) 存在 $q_0\in M$, 使得 $d(p_0,q_0)=d(p_0,M)$;

(2) 连接 p_0, q_0 两点的最短测地线在 q_0 点处与 M 正交.

22. 设 N 是紧致的黎曼流形， M_1,M_2 是在 N 中的两个互不相交的闭子流形. 证明：存在与 M_1,M_2 分别正交的正规测地线 $\gamma:[0,l]\to N$, 使得 γ 的弧长

$$L(\gamma)=d(M_1,M_2)=\inf\{d(p,q);\ (p,q)\in M_1\times M_2\}.$$

23. 在黎曼流形 M 上的一条光滑曲线 $\gamma:[0,+\infty)\to M$ 称为**发散曲线**, 如果对于任意的紧致子集 $K\subset M$, 必存在 $t_0>0$, 使得 $\gamma(t_0)\notin K$. 发散曲线 γ 的长度定义为

$$\lim_{s\to+\infty}\int_0^s|\gamma'(t)|\mathrm{d}t.$$

证明: M 是完备的当且仅当 M 上的每一条发散曲线都有无限的长度.

24. 设 M 是黎曼流形, $p \in M$. 在 M 上一条以弧长 t 为参数的测地线 $\gamma : [0, +\infty) \to M$ 称为从 p 点出发的 **射线**, 如果

$$\gamma(0) = p,$$

并且对于任意的 $t \in (0, +\infty)$, $\gamma|_{[0,t]}$ 是连接 p 与 $\gamma(t)$ 两点的最短曲线, 因而 $d(p, \gamma(t)) = t$. 证明: 如果 M 是完备非紧的, 则对于任意的 $p \in M$, 在 M 上必存在从 p 点出发的射线.

25. 设 M 和 $\tilde{M}$ 是两个黎曼流形, $f : M \to \tilde{M}$ 是微分同胚. 证明: 如果 M 是完备的, 并且存在常数 $c > 0$ 使得对于任意的 $p \in M$ 有

$$|v| \leq c|f_*(v)|, \quad v \in T_pM,$$

则 $\tilde{M}$ 也是完备的.

26. 设 M 是完备的黎曼流形, $\tilde{M}$ 是连通的黎曼流形, $f : M \to \tilde{M}$ 是局部等距. 如果对于任意两点 $\tilde{p}, \tilde{q} \in \tilde{M}$, 在 $\tilde{M}$ 中存在唯一的一条测地线连接 $\tilde{p}, \tilde{q}$, 证明: f 既是单射, 又是满射, 因而是 (整体的) 等距.

27. 考虑上半平面

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}.$$

$\mathbb{R}^2_+$ 上的黎曼度量 $\tilde{g}$ 由下述的分量确定:

$$\tilde{g}_{11} = 1, \quad \tilde{g}_{12} = \tilde{g}_{21} = 0, \quad \tilde{g}_{22} = \frac{1}{y}.$$

证明: Oy 轴上的直线段

$$x = 0, \quad \varepsilon \leq y \leq 1, \quad \varepsilon > 0$$

的长度当 $\varepsilon \to 0$ 时趋于 2. 由此说明本题中的黎曼度量 $\tilde{g}$ 不是完备的.

28. 证明本章习题第 10 题中的黎曼流形 $(\mathbb{R}^2_+, g)$ 是完备的.

29. 设 X 是光滑流形 M 上的一个光滑切向量场, 如果它的每条积分曲线的定义域都可以延拓到整个 $\mathbb{R}$ 上, 则称 X 是完备的. 现设 M 是完备的黎曼流形, $X \in \mathfrak{X}(M)$. 证明: 如果存在正数 c, 使得

$$|X(p)| \leq c, \forall p \in M,$$

则 X 是完备的. 试问: 对 X 模长的有界性假设是否是必要的? 为什么?

30. 设 M 是黎曼流形, 如果对于任意的 $p, q \in M$, 存在等距 $\varphi : M \to M$ 使得 $\varphi(p) = q$, 则称 M 是 **黎曼齐性空间**. 因此, 黎曼齐性空间 M 的等距变换群在 M 上的作用是可迁的. 证明: 黎曼齐性空间是完备的.

第四章　曲率

曲率的概念是和微积分的发明同时产生的. 在欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线论里, 光滑曲线的曲率用于刻画曲线的弯曲程度, 即曲线在一点附近偏离其切线的程度. 进一步, 在 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面论里, 为了描述曲面的几何形状, 人们首先用所谓的法曲率 (即法截线的曲率) 来刻画曲面在各个点处沿各个方向的弯曲程度, 即曲面在一点附近偏离其切平面的程度; 继而发现, 对于正则曲面上的任意一点, 法曲率总是沿两个互相垂直的方向 (即主方向) 取到它的最大值和最小值, 而法曲率的这两个极值就是我们所熟悉的主曲率. Gauss 的一个 "惊人" 发现是: 曲面在每一点的两个主曲率的乘积 (称为 Gauss 曲率) 仅与曲面的第一基本形式有关, 而与曲面在 $\mathbb{R}^3$ 中所呈现出的具体形状无关. 特别地, 当一个曲面与平面在局部上等距时, 其 Gauss 曲率恒为零, 反之亦然. 因此, 在某种意义上, Gauss 曲率所刻画的是曲面的第一基本形式相对于欧氏度量 (即平坦度量) 的偏离程度. 如果把曲面本身 (把外围空间忽略掉) 看作我们所考虑的空间, 则 Gauss 曲率就是该空间的曲率, 或该空间本身的弯曲程度. Riemann 在把 Gauss 的曲面内蕴微分几何推广到高维流形的微分几何的过程中, 特别给出了具有非零 "曲率" 的黎曼度量的表达式. 在这一章中, 将讨论一般的仿射联络空间、特别是黎曼流形上的各种曲率及其性质.

§4.1　曲率张量

在一个仿射联络空间中, 曲率张量是引入各种曲率的基础, 自然也是黎曼几何最重要的概念. 在这一节, 将从仿射联络空间的曲率算子出发, 介绍黎曼流形上黎曼曲率张量的概念; 在下一节还要证明, 曲率张量恒等于零是一个黎曼流形在局部上等距于欧氏空间的特征.

定义 1.1 设 (M, D) 是 m 维仿射联络空间. 对于任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, 定义映射 $\mathcal{R}(X,Y): \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ 如下:

$$\mathcal{R}(X,Y)Z = \mathrm{D}_X\mathrm{D}_Y Z - \mathrm{D}_Y\mathrm{D}_X Z - \mathrm{D}_{[X,Y]}Z, \quad \forall Z \in \mathfrak{X}(M), \tag{1.1}$$

并称 $\mathcal{R}(X,Y)$ 为仿射联络空间 (M,D) 关于光滑切向量场 X, Y 的**曲率算子**.

定理 1.1 假设 (M, D) 是仿射联络空间, 则对于任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, 曲率算子 $\mathcal{R}(X,Y)$ 具有如下的性质, $\forall f \in C^\infty(M)$, $Z \in \mathfrak{X}(M)$,

(1) $\mathcal{R}(X,Y) = -\mathcal{R}(Y,X)$;

(2) $\mathcal{R}(fX,Y) = \mathcal{R}(X,fY) = f\mathcal{R}(X,Y)$;

(3) $\mathcal{R}(X,Y)(fZ) = f\mathcal{R}(X,Y)Z$;

(4) 当 D 的挠率 $T \equiv 0$ 时,

$$\mathcal{R}(X,Y)Z + \mathcal{R}(Y,Z)X + \mathcal{R}(Z,X)Y = 0.$$

性质 (4) 称为**第一 Bianchi 恒等式**.

证明 (1) 是显然的.

(2) 由曲率算子的定义以及 Poisson 括号积的性质, 对于任意的 $Z \in \mathfrak{X}(M)$ 有

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(fX,Y)Z =& \mathrm{D}_{fX}\mathrm{D}_Y Z - \mathrm{D}_Y\mathrm{D}_{fX}Z - \mathrm{D}_{[fX,Y]}Z\\ =& f\mathrm{D}_X\mathrm{D}_Y Z - \mathrm{D}_Y(f\mathrm{D}_X Z) - \mathrm{D}_{f[X,Y]-Y(f)X}Z\\ =& f\mathrm{D}_X\mathrm{D}_Y Z - Y(f)\mathrm{D}_X Z - f\mathrm{D}_Y\mathrm{D}_X Z\\ & - f\mathrm{D}_{[X,Y]}Z + Y(f)\mathrm{D}_X Z\\ =& f\mathcal{R}(X,Y)Z,\end{aligned}$$

即 $\mathcal{R}(fX,Y) = f\mathcal{R}(X,Y)$. 再由 (1) 得到

$$\mathcal{R}(X,fY) = -\mathcal{R}(fY,X) = -f\mathcal{R}(Y,X) = f\mathcal{R}(X,Y).$$

(3) 直接计算可得

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(X,Y)(fZ) =& \mathrm{D}_X\mathrm{D}_Y(fZ) - \mathrm{D}_Y\mathrm{D}_X(fZ) - \mathrm{D}_{[X,Y]}(fZ)\\ =& \mathrm{D}_X(Y(f)Z + f\mathrm{D}_Y Z) - \mathrm{D}_Y(X(f)Z + f\mathrm{D}_X Z)\\ & - ([X,Y](f))Z - f\mathrm{D}_{[X,Y]}Z\\ =& X(Y(f))Z + Y(f)\mathrm{D}_X Z + X(f)\mathrm{D}_Y Z\\ & + f\mathrm{D}_X\mathrm{D}_Y Z - Y(X(f))Z - X(f)\mathrm{D}_Y Z - Y(f)\mathrm{D}_X Z\\ & - f\mathrm{D}_Y\mathrm{D}_X Z - ([X,Y](f))Z - f\mathrm{D}_{[X,Y]}Z\\ =& f\mathcal{R}(X,Y)Z.\end{aligned}$$

(4) 挠率 $T \equiv 0$ 等价于 $\mathrm{D}_X Y - \mathrm{D}_Y X = [X,Y]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. 于是,

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}(X,Y)Z + \mathcal{R}(Y,Z)X + \mathcal{R}(Z,X)Y\\ =& \mathrm{D}_X\mathrm{D}_Y Z - \mathrm{D}_Y\mathrm{D}_X Z - \mathrm{D}_{[X,Y]}Z + \mathrm{D}_Y\mathrm{D}_Z X\\ & - \mathrm{D}_Z\mathrm{D}_Y X - \mathrm{D}_{[Y,Z]}X + \mathrm{D}_Z\mathrm{D}_X Y - \mathrm{D}_X\mathrm{D}_Z Y - \mathrm{D}_{[Z,X]}Y\\ =& \mathrm{D}_X(\mathrm{D}_Y Z - \mathrm{D}_Z Y) - \mathrm{D}_{[Y,Z]}X + \mathrm{D}_Y(\mathrm{D}_Z X - \mathrm{D}_X Z)\\ & - \mathrm{D}_{[Z,X]}Y + \mathrm{D}_Z(\mathrm{D}_X Y - \mathrm{D}_Y X) - \mathrm{D}_{[X,Y]}Z\\ =& \mathrm{D}_X[Y,Z] - \mathrm{D}_{[Y,Z]}X + \mathrm{D}_Y[Z,X] - \mathrm{D}_{[Z,X]}Y\\ & + \mathrm{D}_Z[X,Y] - \mathrm{D}_{[X,Y]}Z\\ =& [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0,\end{aligned}$$

其中最后一个等号是由于 Jacobi 恒等式. 证毕.

性质 (3) 说明, 映射

$$\mathcal{R}(X,Y): \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

是 $C^\infty(M)$-线性的, 因而是 M 上的一个 $(1,1)$ 型光滑张量场. 另外, 由于 $\mathcal{R}(X,Y)$ 对于 X, Y 也是 $C^\infty(M)$-线性的, 因此对于任意的 $v, w \in T_pM$,

可以定义线性变换

$$\mathcal{R}(v,w):T_pM\to T_pM.$$

进一步，由曲率算子可以定义如下的三重线性映射

$$\begin{aligned}\mathcal{R}:\ &\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M),\\ &(Z,X,Y)\to\mathcal{R}(X,Y)Z,\quad\forall X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M).\end{aligned}\tag{1.2}$$

由定理 1.1 得知 $\mathcal{R}$ 对于每一个自变量都是 $C^\infty(M)$-线性的，故 $\mathcal{R}$ 是 M 上的 (1,3) 型光滑张量场.

定义 1.2 由 (1.2) 式确定的 (1,3) 型光滑张量场 $\mathcal{R}$ 称为仿射联络空间 (M,D) 的 **曲率张量 (场)**.

作为张量场，$\mathcal{R}$ 在每一点 $p\in M$ 给出一个 (1,3) 型的张量

$$\mathcal{R}_p:T_pM\times T_pM\times T_pM\to T_pM,$$

使得 $(w,u,v)\mapsto\mathcal{R}(u,v)w,\ \forall u,v,w\in T_pM$. $\mathcal{R}_p$ 称为 (M,D) 在 p 点的曲率张量.

利用 D 在局部坐标系下的联络系数，可以算出曲率张量 $\mathcal{R}$ 的分量.

设 $(U;x^i)$ 是 M 的一个局部坐标系，则有 U 上的光滑函数

$$\Gamma^k_{ij}\in C^\infty(U),\quad 1\le i,j,k\le m,$$

使得

$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma^k_{ji}\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

于是，

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\\ &=\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k}-\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k}-\mathrm{D}_{[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}]}\frac{\partial}{\partial x^k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\Gamma^l_{kj}\frac{\partial}{\partial x^l}\right)-\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\Gamma^l_{ki}\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\\ &=\frac{\partial\Gamma^l_{kj}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^l}+\Gamma^l_{kj}\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^l_{ki}}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^l}-\Gamma^l_{ki}\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^l}\\ &=\left(\frac{\partial\Gamma^l_{kj}}{\partial x^i}-\frac{\partial\Gamma^l_{ki}}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^l}+\Gamma^l_{kj}\Gamma^h_{li}\frac{\partial}{\partial x^h}-\Gamma^l_{ki}\Gamma^h_{lj}\frac{\partial}{\partial x^h}\\ &=\left(\frac{\partial\Gamma^l_{kj}}{\partial x^i}-\frac{\partial\Gamma^l_{ki}}{\partial x^j}+\Gamma^h_{kj}\Gamma^l_{hi}-\Gamma^h_{ki}\Gamma^l_{hj}\right)\frac{\partial}{\partial x^l}.\end{aligned}$$

因此，如果令

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}=R^l_{kij}\frac{\partial}{\partial x^l},\tag{1.3}$$

则有

$$R^l_{kij}=\frac{\partial\Gamma^l_{kj}}{\partial x^i}-\frac{\partial\Gamma^l_{ki}}{\partial x^j}+\Gamma^h_{kj}\Gamma^l_{hi}-\Gamma^h_{ki}\Gamma^l_{hj}.\tag{1.4}$$

于是 (1,3) 型的曲率张量场 $\mathcal{R}$ 在局部上可以表示为

$$\mathcal{R}=R^l_{kij}\mathrm{d}x^k\otimes\frac{\partial}{\partial x^l}\otimes\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j.$$

因此，对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$，如果

$$X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad Y=Y^j\frac{\partial}{\partial x^j},$$

则作为 (1,1) 型张量场的曲率算子 $\mathcal{R}(X,Y)$ 有下述局部坐标表达式

$$\mathcal{R}(X,Y)=X^iY^jR^l_{kij}\mathrm{d}x^k\otimes\frac{\partial}{\partial x^l}.\tag{1.5}$$

特别地，对于黎曼流形 (M,g) 来说，它具有唯一确定的黎曼联络 D，它的曲率张量称为黎曼流形 (M,g) 或度量 g 的曲率张量. 在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下，黎曼流形 (M,g) 的曲率张量的分量仍然由 (1.4) 式给出，只是其中的联络系数 Γ^k_{ij} 是度量张量的分量

$$g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

的 Christoffel 记号，由第二章的 (3.6) 式给出.

例 1.1 欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 关于标准度量的曲率张量恒为零.

事实上， $\mathbb{R}^m$ 关于标准度量的协变微分 D 就是普通微分 d. 任意选取 $\mathbb{R}^m$ 的一个仿射坐标系 $(\mathbb{R}^m;x^i)$，则 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 是在 $\mathbb{R}^m$ 上整体定义的平行向量场 $(1\le i\le m)$. 因此，

$$\mathrm{D}\frac{\partial}{\partial x^i}=\mathrm{d}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\equiv 0.$$

由此得知，联络系数 $\Gamma_{ij}^k\equiv 0$. 再由 (1.4) 式， $R_{ijk}^l\equiv 0$.

设 (M,g) 是黎曼流形. 命

$$R(X,Y,Z,W)=g(\mathcal{R}(Z,W)X,Y),\quad \forall X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M),\tag{1.6}$$

则得到一个四重线性映射

$$R:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M).$$

显然 R 对每一个自变量是 $C^\infty(M)$-线性的，因此 R 是 M 上的四阶协变张量场.

定义 1.3 上面所定义的四阶协变张量场

$$R:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M)$$

称为黎曼流形 (M,g) 的 **黎曼曲率张量 (场)**.

对于黎曼流形而言，(1,3) 型的曲率张量场 $\mathcal{R}$ 与 (0,4) 型的黎曼曲率张量场 R 只不过是同一个对象的不同表现形式而已. 然而，作为 4 阶协变张量场的黎曼曲率张量具有更多的对称性和反对称性.

定理 1.2 黎曼流形 (M,g) 的黎曼曲率张量

$$R:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M)$$

具有下列性质：对于任意的 $X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M)$，

(1) 反对称性：

$$R(X,Y,Z,W)=-R(Y,X,Z,W),$$
$$R(X,Y,Z,W)=-R(X,Y,W,Z);$$

(2) 第一 Bianchi 恒等式：

$$R(X,Y,Z,W)+R(Z,Y,W,X)+R(W,Y,X,Z)=0;$$

(3) 对称性：$R(X,Y,Z,W)=R(Z,W,X,Y)$.

证明 (1) 的第二式与 (2) 分别是定理 1.1 的 (1) 和 (4) 的直接推论. 现在只需要证明 (1) 的第一式和 (3).

由于 D 是度量 g 的黎曼联络，通过直接计算得到

$$\begin{aligned}g(\mathrm{D}_Z\mathrm{D}_WX,Y)=&Z(g(\mathrm{D}_WX,Y))-g(\mathrm{D}_WX,\mathrm{D}_ZY)\\=&Z(W(g(X,Y)))-Z(g(X,\mathrm{D}_WY))\\&-W(g(X,\mathrm{D}_ZY))+g(X,\mathrm{D}_W\mathrm{D}_ZY).\end{aligned}\tag{1.7}$$

同理，

$$\begin{aligned}g(\mathrm{D}_W\mathrm{D}_ZX,Y)=&W(Z(g(X,Y)))-W(g(X,\mathrm{D}_ZY))\\&-Z(g(X,\mathrm{D}_WY))+g(X,\mathrm{D}_Z\mathrm{D}_WY).\end{aligned}\tag{1.8}$$

另外还有

$$g(\mathrm{D}_{[Z,W]}X,Y)=[Z,W](g(X,Y))-g(X,\mathrm{D}_{[Z,W]}Y).$$

把此式和 (1.7)、(1.8) 式一起代入黎曼曲率张量的定义式，得到

$$\begin{aligned}R(X,Y,Z,W)=&g(\mathrm{D}_Z\mathrm{D}_WX-\mathrm{D}_W\mathrm{D}_ZX-\mathrm{D}_{[Z,W]}X,Y)\\=&Z(W(g(X,Y)))-W(Z(g(X,Y)))\\&+g(X,\mathrm{D}_W\mathrm{D}_ZY-\mathrm{D}_Z\mathrm{D}_WY)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-[Z,W](g(X,Y))+g(X,\mathrm{D}_{[Z,W]}Y)\\
=&g(X,\mathrm{D}_W\mathrm{D}_ZY-\mathrm{D}_Z\mathrm{D}_WY+\mathrm{D}_{[Z,W]}Y)\\
=&-g(X,\mathcal{R}(Z,W)Y)=-g(\mathcal{R}(Z,W)Y,X)\\
=&-R(Y,X,Z,W).
\end{aligned}
$$

这就证明了 (1) 的第一式. 为了证明 (3), 首先利用 (2) 得到

$$
\begin{aligned}
&R(X,Y,Z,W)+R(Z,Y,W,X)+R(W,Y,X,Z)=0,\\
&R(Y,Z,W,X)+R(W,Z,X,Y)+R(X,Z,Y,W)=0.
\end{aligned}
$$

将两式相加并利用已经得到的反对称性 (1), 则得

$$
\begin{aligned}
R(X,Y,Z,W)&+R(W,Y,X,Z)+R(W,Z,X,Y)\\
&+R(X,Z,Y,W)=0,
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&R(X,Y,Z,W)-R(Z,W,X,Y)\\
&\quad=-(R(W,Y,X,Z)-R(X,Z,W,Y)),
\end{aligned}
$$

其中右边括号内的式子恰好是左边的式子中对变量 X,Z,W 作一次轮换的结果. 对 X,Z,W 继续作轮换得到

$$
\begin{aligned}
&R(W,Y,X,Z)-R(X,Z,W,Y)\\
&\quad=-(R(Z,Y,W,X)-R(W,X,Z,Y))\\
&\quad=R(X,Y,Z,W)-R(Z,W,X,Y).
\end{aligned}
$$

比较上面两式得到

$$
\begin{aligned}
&R(X,Y,Z,W)-R(Z,W,X,Y)\\
&\quad=-(R(X,Y,Z,W)-R(Z,W,X,Y)),
\end{aligned}
$$

因而, $R(X,Y,Z,W)-R(Z,W,X,Y)=0$. 证毕.

对于任意的固定点 $p\in M$, 黎曼曲率张量 R 在 p 点给出一个四重线性函数

$$R_p:T_pM\times T_pM\times T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}.$$

于是, 定理 1.2 可以改述为:

推论 1.3 对于任意的 $u,v,w,z\in T_pM$, 黎曼曲率张量

$$R_p:T_pM\times T_pM\times T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$$

具有下列性质:

(1) 反对称性:

$$R_p(u,v,w,z)=-R_p(v,u,w,z),\quad R_p(u,v,w,z)=-R_p(u,v,z,w);$$

(2) 第一 Bianchi 恒等式:

$$R_p(u,v,w,z)+R_p(w,v,z,u)+R_p(z,v,u,w)=0;$$

(3) 对称性: $R_p(u,v,w,z)=R_p(w,z,u,v)$.

下面来求黎曼曲率张量在局部坐标系下的分量. 设 $(U;x^i)$ 是黎曼流形 (M,g) 的一个局部坐标系, 令

$$g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right),$$

则由第二章的 (3.6) 式, g 的黎曼联络系数为

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right). \tag{1.9}$$

由此得到

$$\Gamma^l_{ij}g_{lk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right). \tag{1.10}$$

注意到

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}=R^h_{kij}\frac{\partial}{\partial x^h},$$

如果令

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right)=R_{ijkl},$$

则由黎曼曲率张量的定义，

$$R_{ijkl}=g\left(\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=R^h_{ikl}g_{hj}. \tag{1.11}$$

注记 1.1 在这里规定，在将 R^h_{kij} 的上指标 h 下降时，把它放在下指标的第二个位置. 此规定不是实质性的，不同的文献有不同的规定，要特别小心.

根据黎曼联络与度量的相容性，或者由 (1.10) 式，得到

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=\Gamma^l_{ik}g_{lj}+\Gamma^l_{jk}g_{il}. \tag{1.12}$$

把 (1.4) 式代入 (1.11) 式，并利用 (1.9)、(1.10) 和 (1.12) 三式，可得

$$\begin{aligned}
R_{klij}=&\left(\frac{\partial\Gamma^h_{kj}}{\partial x^i}-\frac{\partial\Gamma^h_{ki}}{\partial x^j}+\Gamma^p_{kj}\Gamma^h_{pi}-\Gamma^p_{ki}\Gamma^h_{pj}\right)g_{hl}\\
=&\frac{\partial}{\partial x^i}(\Gamma^h_{kj}g_{hl})-\Gamma^h_{kj}\frac{\partial g_{hl}}{\partial x^i}-\frac{\partial}{\partial x^j}(\Gamma^h_{ki}g_{hl})+\Gamma^h_{ki}\frac{\partial g_{hl}}{\partial x^j}\\
&+\Gamma^p_{kj}\Gamma^h_{pi}g_{hl}-\Gamma^p_{ki}\Gamma^h_{pj}g_{hl}\\
=&\frac{\partial}{\partial x^i}(\Gamma^h_{kj}g_{hl})-\frac{\partial}{\partial x^j}(\Gamma^h_{ki}g_{hl})-\Gamma^h_{kj}(\Gamma^p_{hi}g_{pl}+\Gamma^p_{li}g_{hp})\\
&+\Gamma^h_{ki}(\Gamma^p_{hj}g_{pl}+\Gamma^p_{lj}g_{hp})+\Gamma^p_{kj}\Gamma^h_{pi}g_{hl}-\Gamma^p_{ki}\Gamma^h_{pj}g_{hl}\\
=&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l}\right)\\
&-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^l}\right)\\
&+\Gamma^h_{ki}\Gamma^p_{lj}g_{ph}-\Gamma^h_{kj}\Gamma^p_{li}g_{ph}\\
=&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j\partial x^l}+\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i\partial x^k}-\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j\partial x^k}-\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i\partial x^l}\right)\\
&+\Gamma^p_{ik}\Gamma^h_{jl}g_{ph}-\Gamma^h_{il}\Gamma^p_{jk}g_{ph}.
\end{aligned}$$

这样，就得到了用度量系数 g_{ij} 表示的黎曼曲率张量计算公式：

$$R=R_{klij}dx^k\otimes dx^l\otimes dx^i\otimes dx^j, \tag{1.13}$$

其中的分量由下式给出：

$$\begin{aligned}
R_{klij}=&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j\partial x^l}+\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i\partial x^k}-\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j\partial x^k}-\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i\partial x^l}\right)\\
&+\Gamma^h_{ik}\Gamma^p_{jl}g_{ph}-\Gamma^p_{il}\Gamma^h_{jk}g_{ph}.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

最后需要指出，定理 1.2 可以用黎曼曲率张量的分量叙述为

定理 1.2′ 设 R_{ijkl} 为黎曼流形 (M,g) 的黎曼曲率张量在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下的分量，则有

(1) 反对称性：$R_{ijkl}=-R_{jikl}=-R_{ijlk}$；

(2) 第一 Bianchi 恒等式：$R_{ijkl}+R_{ljik}+R_{kjli}=0$；

(3) 对称性：$R_{ijkl}=R_{klij}$.

§4.2 曲率形式

在这一节，要用活动标架法来处理仿射联络空间和黎曼流形的曲率张量.

设 (M,D) 是仿射联络空间，$\{e_i\}$ 是定义在开子集 $U\subset M$ 上的局部切标架场，$\{\omega^i\}$ 是与其对偶的余切标架场. 令

$$\mathrm{D}_{e_j}e_i=\Gamma^k_{ij}e_k,\quad \omega^j_i=\Gamma^j_{ik}\omega^k,$$

则 $\mathrm{D}e_i=\omega^j_i e_j$.

定理 2.1 设 R^j_{ikl} 是联络 D 的曲率张量 $\mathcal{R}$ 在局部切标架场 $\{e_i\}$ 下的分量，即

$$\mathcal{R}(e_k,e_l)e_i=R^j_{ikl}e_j, \tag{2.1}$$

则有

$$d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \frac{1}{2} R^j_{ikl}\omega^k \wedge \omega^l. \tag{2.2}$$

证明 对于任意的 e_k, e_l 有

$$\begin{aligned}(d\omega_i^j - \omega_i^h \wedge \omega_h^j)(e_k, e_l) &= e_k(\omega_i^j(e_l)) - e_l(\omega_i^j(e_k)) \\ &\quad - \omega_i^j([e_k, e_l]) - \omega_i^h(e_k)\omega_h^j(e_l) + \omega_i^h(e_l)\omega_h^j(e_k) \\ &= e_k(\Gamma^j_{il}) - e_l(\Gamma^j_{ik}) - \omega^h([e_k, e_l])\Gamma^j_{ih} \\ &\quad - \Gamma^h_{ik}\Gamma^j_{hl} + \Gamma^h_{il}\Gamma^j_{hk}.\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(e_k, e_l)e_i &= D_{e_k}D_{e_l}e_i - D_{e_l}D_{e_k}e_i - D_{[e_k, e_l]}e_i \\ &= D_{e_k}(\Gamma^j_{il}e_j) - D_{e_l}(\Gamma^j_{ik}e_j) - \omega^h([e_k, e_l])\Gamma^j_{ih}e_j \\ &= (e_k(\Gamma^j_{il}) - e_l(\Gamma^j_{ik}) + \Gamma^h_{il}\Gamma^j_{hk} - \Gamma^h_{ik}\Gamma^j_{hl} \\ &\quad - \omega^h([e_k, e_l])\Gamma^j_{ih})e_j \\ &= (d\omega_i^j - \omega_i^h \wedge \omega_h^j)(e_k, e_l) \cdot e_j.\end{aligned}$$

与 (2.1) 式相比较得到

$$(d\omega_i^j - \omega_i^h \wedge \omega_h^j)(e_k, e_l) = R^j_{ikl},$$

因而

$$d\omega_i^j - \omega_i^h \wedge \omega_h^j = \frac{1}{2} R^j_{ikl}\omega^k \wedge \omega^l. \tag{2.3}$$

定理得证.

定义 2.1 2 次外微分式 $\Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j$ 称为仿射联络空间 (M, D) 在局部切标架场 $\{e_i\}$ 下的 **曲率形式**.

推论 2.2 设 (M, D) 是仿射联络空间, 则对于任意的局部切标架场 $\{e_i\}$, 曲率张量 $\mathcal{R}$ 可以用曲率形式 Ω_i^j 表示为

$$\mathcal{R} = \omega^i \otimes e_j \otimes \Omega_i^j. \tag{2.4}$$

即对于任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ 有

$$\mathcal{R}(X, Y) = \Omega_i^j(X, Y)\omega^i \otimes e_j; \tag{2.5}$$

特别地,

$$\mathcal{R}(X, Y)e_i = \Omega_i^j(X, Y)e_j. \tag{2.6}$$

由此可见, 曲率形式 Ω_i^j 在光滑向量场 X, Y 上的值 $\Omega_i^j(X, Y)$ 恰好构成线性变换 $\mathcal{R}(X, Y)$ 在基底 $\{e_i\}$ 下的矩阵.

在第二章 (§2.6 定义 6.1) 曾经引入了联络 D 的挠率形式 Ω^i. 结合刚刚定义的曲率形式 Ω_j^i, 便得到两个外微分公式:

$$\begin{cases} d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i + \Omega^i, \\ d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \Omega_j^i. \end{cases} \tag{2.7}$$

通常把 (2.7) 式称为仿射联络空间 (M, D) 的 **结构方程**.

定理 2.3 设 $\{e_i\}$ 是仿射联络空间 (M, D) 的一个局部切标架场, $\{\omega^i\}$ 是与其对偶的余切标架场. 则 D 的联络形式 ω_i^j, 挠率形式 Ω^i 和曲率形式 Ω_i^j 满足如下关系式:

$$d\Omega^i = \omega^j \wedge \Omega_j^i - \Omega^j \wedge \omega_j^i; \tag{2.8}$$

$$d\Omega_i^j = \omega_i^k \wedge \Omega_k^j - \Omega_i^k \wedge \omega_k^j. \tag{2.9}$$

证明 首先, 对等式 $\Omega^i = d\omega^i - \omega^j \wedge \omega_j^i$ 求外微分并利用结构方程 (2.7), 则得

$$\begin{aligned} d\Omega^i &= -d\omega^j \wedge \omega_j^i + \omega^j \wedge d\omega_j^i \\ &= -(\Omega^j + \omega^k \wedge \omega_k^j) \wedge \omega_j^i + \omega^j \wedge (\Omega_j^i + \omega_j^k \wedge \omega_k^i) \\ &= \omega^j \wedge \Omega_j^i - \Omega^j \wedge \omega_j^i. \end{aligned}$$

这就是 (2.8) 式. 类似地, 对等式 $\Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j$ 求外微分, 又可得到 (2.9) 式. 证毕.

注记 2.1 如果 D 是无挠联络，则 (2.8) 式成为

$$\omega^j\wedge\Omega^i_j=0. \tag{2.10}$$

可以证明，(2.10) 式等价于定理 1.1 中的第一 Bianchi 恒等式.

事实上，由定理 2.1 得到

$$\Omega^i_j=\frac{1}{2}R^i_{jkl}\omega^k\wedge\omega^l, \tag{2.11}$$

代入 (2.10) 式得

$$R^i_{jkl}\omega^j\wedge\omega^k\wedge\omega^l=0.$$

由于 $R^i_{jkl}+R^i_{jlk}=0$, 把上式的系数作反对称化得到

$$\frac{1}{3}(R^i_{jkl}+R^i_{klj}+R^i_{ljk})\omega^j\wedge\omega^k\wedge\omega^l=0.$$

此式等价于恒等式

$$R^i_{jkl}+R^i_{klj}+R^i_{ljk}=0, \tag{2.12}$$

即

$$\mathcal{R}(e_k,e_l)e_j+\mathcal{R}(e_l,e_j)e_k+\mathcal{R}(e_j,e_k)e_l=0,$$

这正是第一 Bianchi 恒等式.

注记 2.2 请读者采用类似的方法证明：在 D 是无挠联络的情形下，(2.9) 式等价于恒等式

$$R^j_{ikl,h}+R^j_{ilh,k}+R^j_{ihk,l}=0, \tag{2.13}$$

其中 (参看第二章的 (4.6) 式)

$$\begin{aligned}R^j_{ikl,h}=&e_h(R^j_{ikl})+R^p_{ikl}\Gamma^j_{ph}-R^j_{pkl}\Gamma^p_{ih}\\&-R^j_{ipl}\Gamma^p_{kh}-R^j_{ikp}\Gamma^p_{lh}\end{aligned} \tag{2.14}$$

是曲率张量的分量 R^j_{ikl} 的协变导数. (2.13) 式称为**第二 Bianchi 恒等式**.

现在假定 (M,g) 是黎曼流形，则根据第二章的讨论，它的黎曼联络在局部标架场 $\{e_i\}$ 下的联络形式 ω_i^j 满足条件

$$d\omega^i=\omega^j\wedge\omega^i_j,\quad dg_{ij}=\omega^k_i g_{kj}+\omega^k_j g_{ik}, \tag{2.15}$$

其中 $g_{ij}=g(e_i,e_j)$. 令 $\omega_i=\omega^j g_{ji}$, $\omega_{ij}=\omega_i^k g_{kj}$, 则条件 (2.15) 可以改写为

$$d\omega_i=\omega_i^j\wedge\omega_j,\quad dg_{ij}=\omega_{ij}+\omega_{ji}. \tag{2.16}$$

再令 $\Omega_{ij}=\Omega_i^k g_{kj}$, 则有下面的推论.

推论 2.4 设 (M,g) 是黎曼流形，则曲率形式 Ω_{ij} 适合下列公式：

(1) $\Omega_{ij}=\frac{1}{2}R_{ijkl}\omega^k\wedge\omega^l$, 其中

$$R_{ijkl}=g(\mathcal{R}(e_k,e_l)e_i,e_j)=\sum_h R^h_{ikl}g_{hj};$$

(2) $\Omega_{ij}+\Omega_{ji}=0$;

(3) $\omega^i\wedge\Omega_{ij}=0$;

(4) $d\Omega_{ij}=\omega_i^k\wedge\Omega_{kj}+\Omega_{ik}\wedge\omega_j^k=\omega_i^k\wedge\Omega_{kj}-\omega_j^k\wedge\Omega_{ki}$.

证明 (1) 由 (2.11) 式，

$$\Omega_{ij}=\Omega_i^k g_{kj}=\frac{1}{2}R^k_{ipq}g_{kj}\omega^p\wedge\omega^q=\frac{1}{2}R_{ijkl}\omega^k\wedge\omega^l.$$

(2) 利用 (1) 和 R_{ijkl} 关于 i,j 的反对称性得到

$$\Omega_{ij}+\Omega_{ji}=\frac{1}{2}(R_{ijkl}+R_{jikl})\omega^k\wedge\omega^l=0.$$

(3) 和 (4) 是定理 2.3 的直接推论. 证毕.

现在讨论曲率张量恒为零的几何意义. 下面将会看到黎曼曲率张量恒为零是黎曼流形在局部上等距于欧氏空间的特征性质.

先对仿射联络空间进行讨论.

定理 2.5 设 (M,D) 是 m 维仿射联络空间. 如果 D 的挠率张量和曲率张量恒为零，则对于任意一点 $p\in M$, 都存在 p 点的一个局部

坐标系 $(U;x^i)$, 使得自然标架场 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 是 U 上的平行标架场, 即

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}\equiv 0,\quad \forall i,j.$$

证明 对于任意的 $p\in M$, 取定义在 p 点的邻域 V 上的局部标架场 $\{e_i\}$, 相应的联络形式记为 ω_i^j. 若有 p 点附近的另一个局部标架场 $\{\delta_i\}$, 则有光滑的矩阵函数 $a=(a_j^i)$ 使得

$$\delta_j = a_j^i e_i. \tag{2.17}$$

假设 D 在 $\{\delta_i\}$ 下的联络形式为 θ_j^i, 则有 (看第二章的 (6.1) 式)

$$a_k^i\theta_j^k = \mathrm{d}a_j^i + \omega_k^i a_j^k. \tag{2.18}$$

我们的目标是在 p 点附近寻求一组适当的光滑函数 a_j^i, 使得

$$\det(a_j^i)\neq 0,$$

并且在标架场 (2.17) 下的联络形式 θ_j^i 恒为零, 这意味着 $\{\delta_i\}$ 是平行的标架场. 由此可见, 问题转化为求解关于 a_j^i 的 Pfaff 方程组

$$\sigma_j^i\equiv \mathrm{d}a_j^i+\omega_k^i a_j^k=0,\quad 1\le i,j\le m;\quad \det(a_j^i)\neq 0. \tag{2.19}$$

这是在空间 $V\times\mathbb{R}^{m^2}$ 上由 m^2 个 1 次微分式给出的 Pfaff 方程组, 它的秩是 m^2. 根据定理的假设, D 的曲率张量恒为零, 即它的曲率形式 $\Omega_j^i=0$. 故由结构方程 (2.7) 得到

$$\mathrm{d}\omega_j^i=\omega_j^k\wedge\omega_k^i.$$

所以,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma_j^i &= \mathrm{d}a_j^k\wedge\omega_k^i + a_j^k\mathrm{d}\omega_k^i\\ &= (\sigma_j^k - a_j^h\omega_h^k)\wedge\omega_k^i + a_j^k\omega_k^h\wedge\omega_h^i\\ &= \sigma_j^k\wedge\omega_k^i.\end{aligned}$$

于是, Pfaff 方程组 (2.19) 满足 Frobenius 条件. 根据 Frobenius 定理 (参看参考文献 [3, 第四章, 定理 3.2]), Pfaff 方程组 (2.19) 是完全可积的, 即存在 p 点的开邻域 $W\subset V$, 和 m^2 个函数 $a_j^i\in C^\infty(W)$ 满足方程组 (2.19) 和初值 $a_j^i(p)=\delta_j^i$. 在必要时适当缩小 W, 总是可以假定在 W 上 $\det(a_j^i)\neq 0$. 把这组函数代入 (2.17) 式, 便得到定义在 p 点的邻域 W 上的局部切标架场 $\{\delta_i\}$, 使得相应的联络形式 $\theta_i^j\equiv 0$, 即每一个标架向量 δ_i 在 W 上是平行的.

现在假设 $\{\theta^i\}$ 是与 $\{\delta_i\}$ 对偶的余切标架场. 由于 D 的挠率张量恒为零, 故

$$\mathrm{d}\theta^i=\theta^j\wedge\theta_j^i=0,$$

即每一个 θ^i 都是闭形式. 所以, 由 Poincaré 引理, 存在 p 点的邻域 $U\subset W$, 以及 U 上的光滑函数 x^i, 使得

$$\theta^i=\mathrm{d}x^i,\ 1\le i\le m;$$

或对偶地, $\delta_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$. 由此得到的 p 点的局部坐标系 $(U;x^i)$ 满足条件

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}\equiv 0,\quad 1\le i,j\le m.$$

证毕.

再看黎曼流形的情形. 为了叙述的方便起见, 在此引入下面的定义:

定义 2.2 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形. 如果在每一点 $p\in M$, 都存在 p 点的局部坐标系 $(U;x^i)$ 使得黎曼度量 g 的分量是

$$g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\delta_{ij}, \tag{2.20}$$

则称 (M,g) 是**局部欧氏空间**.

显然，局部欧氏空间是在局部上能够与欧氏空间的开子集建立等距对应的黎曼流形.

定义 2.3 黎曼曲率张量为零的黎曼流形称为 **平坦的** 黎曼流形，相应的黎曼度量称为平坦的黎曼度量.

推论 2.6 黎曼流形 (M,g) 是局部欧氏空间的充分必要条件是它的曲率张量恒为零，即 (M,g) 是平坦的黎曼流形.

证明 必要性是显然的，可以由黎曼曲率张量的计算公式 (1.4) 和 (1.9) 直接得到.

为了说明充分性，假定在定理 2.5 的证明中解 Pfaff 方程组 (2.19) 时要求初始值 $a_i^j(p)$ 满足条件

$$\sum_{k,l} a_i^k(p)a_j^l(p)g(e_k,e_l)(p)=\delta_{ij},\qquad 1\le i,j\le m.$$

设解函数是 a_i^j，命

$$f_{ij}=\sum_{k,l}a_i^k a_j^l g_{kl}-\delta_{ij},$$

其中 $g_{kl}=g(e_k,e_l)$. 则 $f_{ij}(p)=0$，并且

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f_{ij}&=\sum_{k,l}(\mathrm{d}a_i^k a_j^l g_{kl}+a_i^k\mathrm{d}a_j^l g_{kl}+a_i^k a_j^l\mathrm{d}g_{kl})\\&=\sum_{k,l}\left(-\sum_h\omega_h^k a_i^h a_j^l g_{kl}-\sum_h\omega_h^l a_i^k a_j^h g_{kl}+a_i^k a_j^l\mathrm{d}g_{kl}\right)\\&=a_i^k a_j^l(\mathrm{d}g_{kl}-g_{hl}\omega_k^h-g_{kh}\omega_l^h).\end{aligned}$$

由于黎曼联络 D 和黎曼度量 g 是相容的，所以

$$\mathrm{d}g_{kl}-g_{hl}\omega_k^h-g_{kh}\omega_l^h=0.$$

故

$$\mathrm{d}f_{ij}=0,\qquad f_{ij}=f_{ij}(p)=0,\qquad \forall i,j.$$

由此可见，

$$g(\delta_i,\delta_j)=\sum_{k,l}a_i^k a_j^l g_{kl}=\delta_{ij}.$$

因此，由 (2.17) 式给出的标架场 $\{\delta_i\}$ 是单位正交的. 定理 2.5 断言 $\{\delta_i\}$ 是由局部坐标系 $(U;x^i)$ 决定的自然标架场. 所以

$$g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\delta_{ij},$$

证毕.

另一个证法是：根据定理 2.5，在点 p 有局部坐标系 $(U;x^i)$ 使得

$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}\equiv 0,$$

则

$$g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

是 U 上的常值函数. 因此将坐标系 $(U;x^i)$ 作一个常系数线性变换 (把所得结果仍然记作 $(U;x^i)$) 可以使

$$g|_U=\sum_i \mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^i.$$

说起黎曼流形的曲率形式，不能不提到与之相关的著名定理——Gauss-Bonnet-Chern 定理.

Gauss-Bonnet-Chern 定理是黎曼几何中极为重要的定理，具有深刻的理论意义和应用价值. 陈省身在 1944 年发表的一篇脍炙人口的论文首次采用内蕴方法给出了 Gauss-Bonnet 定理的证明 (参看参考文献 [17])，构思巧妙，论证过程干净漂亮，蕴含着重要的思想，是大范围黎曼几何发展过程中的里程碑. 所以，现在常把高维情形的 Gauss-Bonnet 定理称为 Gauss-Bonnet-Chern 定理. 在本节先介绍 Gauss-Bonnet-Chern 定理的结果，证明的细节请参看陈省身的论文[17](或参考文献 [4] 的第四章).

设 (M,g) 是有向的 $2p$ 维黎曼流形，$\{e_i\}$ 是定义在 M 的开子集 U 上与定向相符的单位正交标架场，Ω_{ij} 是在该标架场下的曲率形式. 令

$$\Omega = \frac{(-1)^p}{2^{2p}\pi^p p!}\sum_{i_1,\cdots,i_{2p}} \delta^{i_1\cdots i_{2p}}_{1\cdots 2p}\Omega_{i_1i_2}\wedge\cdots\wedge\Omega_{i_{2p-1}i_{2p}},$$

其中

$$\delta^{i_1\cdots i_{2p}}_{1\cdots 2p} = \begin{cases} 1, & i_1\cdots i_{2p}\text{是 } 1\cdots 2p \text{ 的一个偶排列;} \\ -1, & i_1\cdots i_{2p}\text{是 } 1\cdots 2p \text{ 的一个奇排列;} \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases}$$

容易验证，Ω 与局部单位正交标架场 $\{e_i\}$ 的选取无关，因而是大范围地定义在 M 上的 $2p$ 次外微分式. 于是存在光滑函数 $\bar{K}\in C^\infty(M)$，使得

$$\Omega = \bar{K}\mathrm{d}V_M,$$

其中 $\mathrm{d}V_M$ 是 M 的体积元素. 特别地，在 $p=1$ 时 (即 M 是一个有向曲面)，则 $K=2\pi\bar{K}$ 是 M 的 Gauss 曲率.

Gauss-Bonnet-Chern 定理 设 (M,g) 是 $2p$ 维紧致有向黎曼流形，则有下列积分公式

$$\int_M \Omega = \chi(M), \tag{2.21}$$

其中 $\chi(M)$ 是 M 的 Euler-Poincare 示性数.

Euler-Poincare 示性数是一个拓扑的概念 (参看参考文献 [13, 第 193 页]). 而 Gauss-Bonnet-Chern 定理是用黎曼流形的曲率不变量 (局部不变量) 来刻画流形的拓扑不变量，因此这是一个十分重要的结论. 当 $p=1$ 时，

$$\chi(M) = 2(1-g(M)),$$

其中 $g(M)$ 是紧致有向曲面 M 的 **亏格**. 于是有如下的推论：

推论 2.7 设 M 是紧致有向的二维黎曼流形，K 是 M 的 Gauss 曲率，则有积分公式

$$\int_M K\mathrm{d}V_M = 4\pi(1-g(M)). \tag{2.22}$$

§4.3 截面曲率

在曲面论中 Gauss 曲率是数量. 与之相仿，在高维黎曼流形上可以借助于曲率张量来构造一些取值为数量的曲率. 在这一节和下一节中，将逐步引入这些曲率概念，并进行一些必要的讨论.

设 (M,g) 是 m 维黎曼流形，$p\in M$. 对于任意的 $u,v\in T_pM$，令

$$\|u\wedge v\|^2 = \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle - \langle u,v\rangle^2.$$

显然，u,v 共线的充分必要条件是 $\|u\wedge v\|^2=0$，并且当 u,v 不共线时，$\|u\wedge v\|^2$ 恰好是 u,v 张成的平行四边形的面积平方.

现设 $u,v\in T_pM$ 是两个不共线的切向量. 把 u,v 在 T_pM 中所张成的二维子空间记作 $[u\wedge v]$，称为黎曼流形 M 在 p 点的 **二维截面**.

如果 $\tilde{u},\tilde{v}$ 是 $[u\wedge v]$ 中任意两个不共线的切向量，则有

$$\tilde{u} = a_1^1u + a_1^2v,\quad \tilde{v} = a_2^1u + a_2^2v,\quad \det(a_j^i)\neq 0.$$

显然，

$$\|\tilde{u}\wedge\tilde{v}\|^2 = (\det(a_j^i))^2\|u\wedge v\|^2.$$

在另一方面，根据黎曼曲率张量 R 的对称性和反对称性 (参看推论 1.3) 不难得到

$$R(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{u},\tilde{v}) = (\det(a_j^i))^2R(u,v,u,v).$$

由此可见，由

$$K(u,v) = -\frac{R(u,v,u,v)}{\|u\wedge v\|^2} \tag{3.1}$$

定义的量 $K(u,v)$ 与二维截面 $[u\wedge v]$ 的基底 u,v 的选取无关，因而它是只依赖二维截面 $[u\wedge v]$ 的数量.

定义 3.1 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形， $p\in M$. 对于任意的 $u,v\in T_pM$, 如果 $\|u\wedge v\|^2\neq 0$, 则由 (3.1) 确定的数量 $K(u,v)$ 称为 (M,g) 在 p 点沿二维截面 $[u\wedge v]$ 的 **截面曲率**.

对于固定的 $p\in M$, 切空间 T_pM 的二维子空间 (二维截面) 的集合构成一个光滑流形，记作 $Gr_2(p)$, 它是一个 Grassmann 流形. 若令

$$Gr_2(M)=\bigcup_{p\in M}Gr_2(p),$$

则 $Gr_2(M)$ 是一个以 Grassmann 流形为纤维的微分纤维丛 (参看第十章 §10.3), 即所谓的 Grassmann 纤维丛；而截面曲率则是定义在这个纤维丛上的一个光滑函数.

上面引入的截面曲率是曲面论中的 Gauss 曲率在高维情形的推广.

设 (M,g) 是 m 维黎曼流形， $m\geq 2$, $p\in M$. 又设 $u,v\in T_pM$ 是任意两个彼此正交的单位切向量. 选取 p 点的一个法坐标系 $(U;x^i)$, 使得 $x^i(p)=0$, 并且

$$u=\frac{\partial}{\partial x^1},\quad v=\frac{\partial}{\partial x^2}.$$

在 p 点附近，考虑 M 的二维子流形

$$S=\{q\in U;\ x^\alpha=0,\ 3\leq\alpha\leq m\}.$$

根据法坐标系的定义， S 是由从 p 点出发、且与二维截面 $[u\wedge v]$ 相切的测地线构成的曲面；它的第一基本形式是

$$I=\sum_{i,j=1}^{2}\tilde g_{ij}(x^1,x^2)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j,$$

其中

$$\tilde g_{ij}(x^1,x^2)=g_{ij}(x^1,x^2,0,\cdots,0),\quad i,j=1,2.$$

为求曲面 S 在 p 点的 Gauss 曲率 $\tilde K(p)$, 由第三章定理 4.5 得知，

$$\Gamma^k_{ij}(p)=0,\quad i,j,k=1,2,\cdots,m.$$

因而对于 $i,j,k=1,2$, $\tilde\Gamma^k_{ij}(p)=0$, 这里的 $\tilde\Gamma^k_{ij}$ 是 $\tilde g_{ij}$ 的 Christoffel 记号. 根据曲面论中 Gauss 曲率的内蕴公式 (参看参考文献 [2, 第 139 页]) 以及 (1.14) 式可得

$$\begin{aligned}\tilde K(p)&=-\tilde R_{1212}(p)\\&=-\left\{\frac12\left(\frac{\partial^2\tilde g_{22}}{\partial x^1\partial x^1}+\frac{\partial^2\tilde g_{11}}{\partial x^2\partial x^2}-2\frac{\partial^2\tilde g_{12}}{\partial x^1\partial x^2}\right)\right.\\&\qquad\left.+\sum_{1\leq k,h\leq 2}(\tilde\Gamma^h_{11}\tilde\Gamma^k_{22}\tilde g_{kh}-\tilde\Gamma^h_{12}\tilde\Gamma^k_{12}\tilde g_{kh})\right\}\Bigg|_{x^1=x^2=0}\\&=-\left\{\frac12\left(\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1\partial x^1}+\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2\partial x^2}-2\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1\partial x^2}\right)\right.\\&\qquad\left.+\sum_{1\leq k,h\leq m}(\Gamma^h_{11}\Gamma^k_{22}g_{kh}-\Gamma^h_{12}\Gamma^k_{12}g_{kh})\right\}\Bigg|_{x^1=\cdots=x^m=0}\\&=-R_{1212}(p)=-\frac{R(u,v,u,v)}{\|u\wedge v\|^2}(p)\\&=K(u,v).\end{aligned}$$

由此可见，在 p 点由二维截面 $[u\wedge v]$ 确定的截面曲率 $K(u,v)$ 恰好是在 M 中与 $[u\wedge v]$ 相切的曲面 S 在 p 点的 Gauss 曲率；这也正是在截面曲率的定义式 (3.1) 中取负号的原因.

定义 3.2 设 V 是一个 m 维向量空间， $R: V\times V\times V\times V\to\mathbb{R}$ 是 V 上的四阶协变张量，如果它满足下列三个条件，则称它为 **曲率型张量**：

(1) 反对称性：

$$R(u,v,w,z)=-R(v,u,w,z)=-R(u,v,z,w);$$

(2) 第一 Bianchi 恒等式:

$$R(u,v,w,z)+R(w,v,z,u)+R(z,v,u,w)=0;$$

(3) 对称性: $R(u,v,w,z)=R(w,z,u,v)$,

其中 $u,v,w,z\in V$.

引理 3.1 设 R,R' 是向量空间 V 上的两个曲率型四阶协变张量. 如果对于任意的 $u,v\in V$, 都有

$$R'(u,v,u,v)=R(u,v,u,v),$$

则 $R'\equiv R$.

证明 令 $R_0=R'-R$, 则 R_0 也是 V 上的曲率型四阶协变张量, 并且对于任意的 $u,v\in V$ 有 $R_0(u,v,u,v)=0$. 现在只需证明 $R_0\equiv 0$ 即可.

对于任意的 $u,v,z\in V$, 利用 R_0 的多重线性性质和对称性, 有

$$\begin{aligned}0&=R_0(u,v+z,u,v+z)\\&=R_0(u,v,u,v)+R_0(u,v,u,z)+R_0(u,z,u,v)+R_0(u,z,u,z)\\&=R_0(u,v,u,z)+R_0(u,z,u,v)\\&=2R_0(u,v,u,z),\end{aligned}$$

所以 $R_0(u,v,u,z)=0$.

对于任意的 $u,v,w,z\in V$, 展开 $R_0(u+v,w,u+v,z)=0$ 得到

$$\begin{aligned}0&=R_0(u+v,w,u+v,z)\\&=R_0(u,w,u,z)+R_0(u,w,v,z)+R_0(v,w,u,z)+R_0(v,w,v,z)\\&=R_0(u,w,v,z)+R_0(v,w,u,z)\\&=R_0(u,w,v,z)-R_0(v,w,z,u).\end{aligned}$$

由此可见, $R_0(u,w,v,z)$ 在变量 u,v,z 的轮换下保持不变, 即

$$R_0(u,w,v,z)=R_0(v,w,z,u)=R_0(z,w,u,v).$$

于是, 根据第一 Bianchi 恒等式得知, 对于任意的 $u,v,w,z\in V$ 有

$$\begin{aligned}0&=R_0(u,v,w,z)+R_0(w,v,z,u)+R_0(z,v,u,w)\\&=3R_0(u,v,w,z).\end{aligned}$$

故 $R_0=0$.

定理 3.2 设 p 是黎曼流形 (M,g) 上的任意一点. 如果 M 在 p 点沿所有的二维截面的截面曲率是常数 K_0, 则对于任意的 $u,v,w,z\in T_pM$, 有

$$R(u,v,w,z)=-K_0(\langle u,w\rangle\langle v,z\rangle-\langle u,z\rangle\langle v,w\rangle); \tag{3.2}$$

反过来, 如果存在常数 K_0, 使得 (3.2) 式成立, 则 M 在 p 点沿各个二维截面的截面曲率均为常数 K_0.

证明 对于任意的 $u,v,w,z\in T_pM$, 令

$$R'(u,v,w,z)=\langle u,w\rangle\langle v,z\rangle-\langle u,z\rangle\langle v,w\rangle,$$

经直接验证可知, R' 是 T_pM 上的一个曲率型四阶协变张量. 由假设, 对于任意的不共线的 $u,v\in T_pM$ 有

$$-\frac{R(u,v,u,v)}{R'(u,v,u,v)}=K_0,$$

即

$$R(u,v,u,v)=-K_0R'(u,v,u,v).$$

显然, 上式对于 T_pM 中任意两个共线向量 u,v 也是对的. 于是由引理 3.1, (3.2) 式对于任意的 $u,v,w,z\in T_pM$ 恒成立.

定理的另一部分是显而易见的. 证毕.

定义 3.3 设 (M,g) 是黎曼流形. 如果 M 在任意一点 p、沿着任意一个二维截面 $\Pi\subset T_pM$ 的截面曲率都等于常数 c, 则称 (M,g) 是有常截面曲率 c 的黎曼流形, 简称为**常曲率空间**.

下述结论是定理 3.2 的直接推论.

推论 3.3 设 (M,g) 是截面曲率为 c 的常曲率空间, 则在任意一个局部标架场 $\{e_i\}$ 下, 黎曼曲率张量的分量是

$$R_{ijkl} = -c(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \quad 1 \le i,j,k,l \le m, \tag{3.3}$$

其中 $R_{ijkl} = \langle \mathcal{R}(e_k,e_l)e_i, e_j\rangle$, $g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$.

反之, 如果对于某个常数 c, 黎曼流形 (M,g) 的黎曼曲率张量在任意一个局部标架场 $\{e_i\}$ 下具有分量 (3.3), 则它是以 c 为截面曲率的常曲率空间.

推论 3.4 设 (M,g) 是截面曲率为 c 的常曲率空间, 则在任意一个局部标架场 $\{e_i\}$ 下, 曲率形式 Ω_{ij} 是

$$\Omega_{ij} = -c\omega_i \wedge \omega_j, \tag{3.4}$$

反之亦然.

证明 由推论 2.4 和推论 3.3,

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}R_{ijkl}\omega^k \wedge \omega^l = -\frac{c}{2}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})\omega^k \wedge \omega^l = -c\omega_i \wedge \omega_j.$$

推论得证.

定理 3.5 (F. Schur) 设 (M,g) 是 $m(\ge 3)$ 维连通黎曼流形. 如果对于任意一点 $p \in M$, M 在点 p 沿任意的二维截面的截面曲率是常数 $K(p)$, 即截面曲率只是光滑流形 M 上的光滑函数 $K = K(p)$, 则 $K(p)$ 必定是常值函数, 因而 M 是常曲率空间.

证明 设 $\{e_i\}$ 是 M 上的任意一个局部标架场, 则由定理 3.2 得到

$$\Omega_{ij} = -K\omega_i \wedge \omega_j, \quad 1 \le i,j \le m,$$

其中 K 是 M 上的光滑函数. 对此式求外微分, 并利用 (2.16) 式得到

$$\mathrm{d}\Omega_{ij} = -\mathrm{d}K \wedge \omega_i \wedge \omega_j - K\mathrm{d}\omega_i \wedge \omega_j + K\omega_i \wedge \mathrm{d}\omega_j$$

$$= -\mathrm{d}K \wedge \omega_i \wedge \omega_j - K\omega_i^k \wedge \omega_k \wedge \omega_j + K\omega_i \wedge \omega_j^k \wedge \omega_k.$$

在另一方面, 由推论 2.4(4) 得到

$$\mathrm{d}\Omega_{ij} = \omega_i^k \wedge \Omega_{kj} + \Omega_{ik} \wedge \omega_j^k = -K\omega_i^k \wedge \omega_k \wedge \omega_j - K\omega_i \wedge \omega_k \wedge \omega_j^k.$$

比较上面两式得知, 对于任意的 i,j 有 $\mathrm{d}K \wedge \omega_i \wedge \omega_j = 0$. 若令

$$\mathrm{d}K = \sum_k K_k \omega_k,$$

其中 $K_k = e_k(K)$, 则

$$\sum_k K_k \omega_k \wedge \omega_i \wedge \omega_j = 0, \quad \forall i,j. \tag{3.5}$$

取 $i = 1, j = 2$. 从 (3.5) 式得知 $K_k = 0 (k \ge 3)$. 再取 $i = 2, j = 3$ 和 $i = 1, j = 3$, 则得 $K_1 = K_2 = 0$. 因此 $\mathrm{d}K = 0$, 故 K 是一个常数, 定理得证.

例 3.1 对于任意的常数 c, 定义

$$\rho(c) = \begin{cases} +\infty, & c \ge 0; \\ -\dfrac{1}{c}, & c < 0. \end{cases}$$

再令

$$U = \left\{(x^1, \cdots, x^m) \in \mathbb{R}^m;\ \sum_{i=1}^m (x^i)^2 < \rho(c)\right\}.$$

在 U 上引入黎曼度量

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{4\sum_i (\mathrm{d}x^i)^2}{(1 + c\sum_i (x^i)^2)^2}.$$

求黎曼流形 $(U, \mathrm{d}s^2)$ 的截面曲率.

解 设 $A = 1 + c\sum_i (x^i)^2$, 并设 $\omega^i = \dfrac{2}{A}\mathrm{d}x^i$, 则 $\mathrm{d}s^2 = \sum_i (\omega^i)^2$, 因而 $\{\omega^i\}$ 是 $(U, \mathrm{d}s^2)$ 上的单位正交余切标架场. 求 ω^i 的外微分, 得到

$$\mathrm{d}\omega^i = 2\frac{\mathrm{d}x^i}{A^2} \wedge \mathrm{d}A = \frac{4c}{A^2}\sum_j x^j \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = c\sum_j x^j \omega^i \wedge \omega^j$$

$$= \sum_j \omega^j \wedge c(x^i\omega^j - x^j\omega^i).$$

若令 $\omega_j^i = c(x^i\omega^j - x^j\omega^i)$，则有

$$\mathrm{d}\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad \omega_j^i + \omega_i^j = 0.$$

根据黎曼联络的存在唯一性定理 (参看第二章的定理 4.5 或定理 6.3)，ω_j^i 是黎曼联络在余切标架场 $\{\omega^i\}$ 下的联络形式. 由此可以计算黎曼度量 $\mathrm{d}s^2$ 的曲率形式 $\Omega_j^i = \Omega_{ji}$ 如下：

$$\begin{aligned}
\Omega_{ji} =& \Omega_j^i = \mathrm{d}\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i \\
=& c(\mathrm{d}x^i \wedge \omega^j + x^i \mathrm{d}\omega^j - \mathrm{d}x^j \wedge \omega^i - x^j \mathrm{d}\omega^i) \\
& - c^2 \sum_{k=1}^m (x^k\omega^j - x^j\omega^k) \wedge (x^i\omega^k - x^k\omega^i) \\
=& c\left(A\omega^i \wedge \omega^j + c\sum_{k=1}^m x^i x^k \omega^j \wedge \omega^k - c\sum_{k=1}^m x^j x^k \omega^i \wedge \omega^k\right) \\
& - c^2 \sum_{k=1}^m (x^i x^k \omega^j \wedge \omega^k + x^j x^k \omega^k \wedge \omega^i + (x^k)^2 \omega^i \wedge \omega^j) \\
=& \left(Ac - c^2 \sum_{k=1}^m (x^k)^2\right) \omega^i \wedge \omega^j = c\omega^i \wedge \omega^j = -c\omega^j \wedge \omega^i \\
=& -c\omega_j \wedge \omega_i,
\end{aligned}$$

其中最后一个等号是因为 $\{\omega^i\}$ 是单位正交余切标架场. 所以，$(U, \mathrm{d}s^2)$ 是截面曲率为 c 的常曲率空间.

§4.4 Ricci 曲率和数量曲率

在上一节，已经用黎曼曲率张量定义了截面曲率. 除此之外，还可以引入另外两个重要的曲率，即这一节要讨论的 Ricci 曲率和数量曲率.

设 (M,g) 是 m 维黎曼流形，$p \in M$. 对于任意的 $u, v \in T_pM$，借助于曲率张量 $\mathcal{R}$ 可以定义线性变换 $A_{u,v} : T_pM \to T_pM$，使得

$$A_{u,v}(w) = \mathcal{R}(w,u)v, \quad \forall w \in T_pM.$$

显然，$A_{u,v}$ 是 T_pM 上的 (1,1) 型张量. 线性变换 $A_{u,v}$ 的迹就是它作为 (1,1) 型张量的缩并，记作 $\mathrm{Ric}(u,v)$. 于是对于 M 上任意的局部标架场 $\{e_i\}$ 及其对偶余标架场 $\{\omega^i\}$ 有

$$\mathrm{Ric}(u,v) = \sum_{i=1}^m \omega^i(\mathcal{R}(e_i,u)v). \tag{4.1}$$

这样定义的 $\mathrm{Ric}(u,v)$ 在 M 上给出一个二阶协变张量场

$$\mathrm{Ric} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M).$$

定义 4.1 黎曼流形 (M,g) 上的二阶协变张量场 Ric 称为 M 上的 **Ricci 曲率张量 (场)**.

定理 4.1 Ricci 曲率张量是一个对称的二阶协变张量场.

证明 对于任意的标架场 $\{e_i\}$ 及其对偶余标架场 $\{\omega^i\}$，显然有

$$\omega^i = g^{ij}(e_j, \cdot).$$

因此，由黎曼曲率张量的对称性得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(u,v) &= \sum_{i,j} g^{ij}(e_j, \mathcal{R}(e_i,u)v) = \sum_{i,j} g^{ij} R(v, e_j, e_i, u) \\
&= \sum_{i,j} g^{ji} R(u, e_i, e_j, v) = \mathrm{Ric}(v,u).
\end{aligned}$$

证毕.

按照习惯记法，把 Ricci 曲率张量 Ric 的分量记为 R_{ij}，即 $R_{ij} = \mathrm{Ric}(e_i, e_j)$. 于是有

$$\mathrm{Ric} = R_{ij}\omega^i \otimes \omega^j,$$

其中

$$R_{ij} = g^{kl}R(e_i, e_k, e_l, e_j) = g^{kl}R_{iklj} = R^k_{ikj}. \tag{4.2}$$

至此，在黎曼流形 (M,g) 上有两个对称的二阶协变张量场：一个是度量张量 g，另一个是 Ricci 曲率张量 Ric.

定义 4.2 设 $p \in M$, $u \in T_pM$, $u \neq 0$. 令

$$\mathrm{Ric}(u) = \frac{\mathrm{Ric}(u,u)}{g(u,u)} = \mathrm{Ric}\left(\frac{u}{|u|}, \frac{u}{|u|}\right), \tag{4.3}$$

则 $\mathrm{Ric}(u)$ 是切方向 u 的函数，称为黎曼流形 (M,g) 在 p 点沿切方向 u 的 **Ricci 曲率.**

根据二次型的一般理论，在任意一点 $p \in M$ 有 T_pM 中的单位正交基底 $\{e_i\}$，使得 Ricci 曲率张量化为标准型，即有

$$\mathrm{Ric} = \sum_{i=1}^{m} \kappa_i \omega^i \otimes \omega^i, \tag{4.4}$$

其中 $\{\omega^i\}$ 是 T_p^*M 中与 $\{e_i\}$ 对偶的基底，$\kappa_i = \mathrm{Ric}(e_i)$. 从而对于任意的 $u \in T_pM$ 有

$$\mathrm{Ric}(u) = \sum_i \kappa_i \cos^2\theta_i, \quad \cos\theta_i = \left\langle \frac{u}{|u|}, e_i \right\rangle. \tag{4.5}$$

此时，e_i 称为 M 在 p 点的 **Ricci 主方向**，κ_i 称为对应于主方向 e_i 的 **Ricci 主曲率.**

Ricci 曲率与截面曲率之间的关系由下述定理给出：

定理 4.2 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形，$p \in M$，u 是 M 在 p 点的一个非零切向量. 如果 $\{e_i\}$ 是 T_pM 中任意一个单位正交基底，使得 $e_m = u/|u|$，则

$$\mathrm{Ric}(u) = \sum_{i=1}^{m-1} K(e_i, e_m). \tag{4.6}$$

证明 根据 Ricci 曲率的定义，

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(u) &= \mathrm{Ric}(e_m, e_m) = \sum_{i=1}^{m-1} R(e_m, e_i, e_i, e_m) \\ &= -\sum_{i=1}^{m-1} \frac{R(e_i, e_m, e_i, e_m)}{|e_i \wedge e_m|^2} = \sum_{i=1}^{m-1} K(e_i, e_m).\end{aligned}$$

定理 4.2 告诉我们，沿某个切方向的 Ricci 曲率是含有该切方向的 $m-1$ 个彼此正交的二维截面所对应的截面曲率之和. 由此可知，加在 Ricci 曲率上的条件一般说来要弱于加在截面曲率上的条件. 比如，Ricci 曲率的非负性并不能保证截面曲率的非负性.

定义 4.3 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形，如果存在常数 λ 使得 $\mathrm{Ric} = \lambda g$，则称 (M,g) 是 **Einstein 流形.**

很明显，(M,g) 是 Einstein 流形当且仅当 M 的 Ricci 曲率是常数.

现在来定义数量曲率，首先证明一个定理.

定理 4.3 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形，$p \in M$，则对于 T_pM 中任意一个单位正交基底 $\{e_i\}$，数量 $\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Ric}(e_i)$ 与基底 $\{e_i\}$ 的选取无关.

证明 根据 Ricci 曲率的定义，

$$\sum_i \mathrm{Ric}(e_i) = \sum_i \mathrm{Ric}(e_i, e_i).$$

我们要说明，上式右端与单位正交基底 $\{e_i\}$ 的选取无关. 事实上，如果 $\{\delta_i\}$ 是在 p 点的另一个单位正交基底，则有正交矩阵 (a_i^j)，使得 $\delta_i = a_i^j e_j$. 因此，

$$\sum_i \mathrm{Ric}(\delta_i, \delta_i) = \sum_{i,j,k} a_i^j a_i^k \mathrm{Ric}(e_j, e_k) = \sum_i \mathrm{Ric}(e_i, e_i).$$

证毕.

根据上面的定理，可以引入下述定义.

定义 4.4 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形，$p\in M$. 对于在 p 点的任意一个单位正交标架 $\{e_i\}$, 数值

$$S=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Ric}(e_i)$$

称为黎曼流形 (M,g) 在 p 点的 **数量曲率**.

由定理 4.2, 数量曲率可以用截面曲率和黎曼曲率张量分别表示为

$$S=\sum_{i,j}K(e_i,e_j)=\sum_{i,j}R(e_i,e_j,e_j,e_i). \tag{4.7}$$

在任意一个局部坐标系 $(U;x^i)$ 下，数量曲率的表达式是

$$S=g^{ij}R_{ij}=g^{ij}R^k_{ikj}=g^{ij}g^{kl}R_{ilkj}. \tag{4.8}$$

推论 4.4 设 M 是截面曲率为 c 的常曲率空间，则 M 的 Ricci 曲率和数量曲率分别是 $(m-1)c$ 和 $m(m-1)c$.

§4.5 Ricci 恒等式

在前面各节，依次介绍了黎曼流形 (M,g) 上的曲率算子、黎曼曲率张量、截面曲率、Ricci 曲率和数量曲率等概念；同时还证明了，黎曼曲率张量恒为零是局部欧氏空间的特征. 根据定义，曲率算子刻画了协变导数算子的两次作用在作用的次序交换时所产生的差别. 事实上，如果 $(U;x^i)$ 是 M 的一个局部坐标系，则对于任意的 $X\in\mathfrak{X}(M)$, 有

$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^j}}X-\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}X=\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)X.$$

特别地，当曲率算子 $\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=0$ 时，

$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^j}}X=\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}X,$$

即在局部欧氏空间中协变导数算子 $\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}$ 与 $\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^j}}$ 在光滑向量场 X 上作用是可以交换的.

另一方面，第二章的 §2.4 告诉我们，对于任意的 $X\in\mathfrak{X}(M)$, 协变导数算子 D_X 可以作用于任意的光滑张量场，即可以求任意一个光滑张量场的协变导数. 因此，两个协变导数算子在光滑张量场上的作用，也有作用次序的交换问题. 本节要讨论的 Ricci 恒等式，实际上就是协变导数算子在光滑张量场上两次作用的次序交换公式. 为完全起见，从最简单的情形着手讨论.

设 (M,g) 是 m 维黎曼流形，$(U;x^i)$ 是 M 的任意一个局部坐标系.

(1) (0,0) 型张量场 (即光滑函数): 对于任意的 $f\in C^\infty(M)$ 有

$$\mathrm{d}f|_U=f_i\mathrm{d}x^i=f_{,i}\mathrm{d}x^i,$$

其中 $f_{,i}=f_i=\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$. 因此，

$$\mathrm{D}(\mathrm{d}f)|_U=f_{,ij}\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j,$$

这里 $f_{,ij}=(f_{,i})_{,j}$. 根据 §2.4 的 (4.6) 式，

$$f_{,ij}=\frac{\partial f_{,i}}{\partial x^j}-f_{,l}\Gamma^l_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial f}{\partial x^l}\Gamma^l_{ij}.$$

由于黎曼联络的无挠性，$\Gamma^l_{ij}=\Gamma^l_{ji}$, 故有

$$f_{,ij}=f_{,ji}. \tag{5.1}$$

(2) (1,0) 型张量场 (即光滑切向量场): 对于任意的 $X\in\mathfrak{X}(M)$, 可设 $X|_U=X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$. 于是

$$\mathrm{D}X|_U=X^i_{,j}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\mathrm{d}x^j,\quad X^i_{,j}=\frac{\partial X^i}{\partial x^j}+X^l\Gamma^i_{lj}. \tag{5.2}$$

对 $\mathrm{D}X$ 再求协变微分有

$$\mathrm{D}(\mathrm{D}X)|_U=X^i_{,jk}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\mathrm{d}x^j\otimes\mathrm{d}x^k,$$

其中 $X^i_{,jk} = (X^i_{,j})_{,k}$. 利用 (5.2) 式以及 §2.4 的 (4.6) 式可得

$$\begin{aligned}X^i_{,jk} &= \frac{\partial X^i_{,j}}{\partial x^k} + X^l_{,j}\Gamma^i_{lk} - X^i_{,l}\Gamma^l_{jk}\\
&= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + X^l\Gamma^i_{lj}\right) + \left(\frac{\partial X^l}{\partial x^j} + X^h\Gamma^l_{hj}\right)\Gamma^i_{lk} - X^i_{,l}\Gamma^l_{jk}\\
&= \frac{\partial^2 X^i}{\partial x^j\partial x^k} + \frac{\partial X^l}{\partial x^k}\Gamma^i_{lj} + \frac{\partial X^l}{\partial x^j}\Gamma^i_{lk} - X^i_{,l}\Gamma^l_{jk}\\
&\quad + X^l\left(\frac{\partial\Gamma^i_{lj}}{\partial x^k} + \Gamma^h_{lj}\Gamma^i_{hk}\right).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}X^i_{,jk} - X^i_{,kj} &= X^l\left(\frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^i_{lk}}{\partial x^j} + \Gamma^h_{lj}\Gamma^i_{hk} - \Gamma^h_{lk}\Gamma^i_{hj}\right)\\
&= X^l R^i_{lkj},\end{aligned}$$

即

$$X^i_{,jk} - X^i_{,kj} = -X^l R^i_{ljk}. \tag{5.3}$$

(3) (0,1) 型张量场 (即 1 次微分式): 对于任意的 $\alpha\in A^1(M)$, 可设 $\alpha|_U = \alpha_i \mathrm{d}x^i$. 类似于情形 (2), 则有

$$\mathrm{D}\alpha|_U = \alpha_{i,j}\mathrm{d}x^i\otimes \mathrm{d}x^j,\quad \alpha_{i,j} = \frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j} - \alpha_l\Gamma^l_{ij},$$
$$\mathrm{D}(\mathrm{D}\alpha)|_U = \alpha_{i,jk}\mathrm{d}x^i\otimes \mathrm{d}x^j\otimes \mathrm{d}x^k,$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha_{i,jk} &= (\alpha_{i,j})_{,k} = \frac{\partial\alpha_{i,j}}{\partial x^k} - \alpha_{l,j}\Gamma^l_{ik} - \alpha_{i,l}\Gamma^l_{jk}\\
&= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j} - \alpha_l\Gamma^l_{ij}\right) - \left(\frac{\partial\alpha_l}{\partial x^j} - \alpha_h\Gamma^h_{lj}\right)\Gamma^l_{ik} - \alpha_{i,l}\Gamma^l_{jk}\\
&= \frac{\partial^2\alpha_i}{\partial x^j\partial x^k} - \frac{\partial\alpha_l}{\partial x^k}\Gamma^l_{ij} - \frac{\partial\alpha_l}{\partial x^j}\Gamma^l_{ik} - \alpha_{i,l}\Gamma^l_{jk}\\
&\quad - \alpha_l\left(\frac{\partial\Gamma^l_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^h_{ik}\Gamma^l_{hj}\right).\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\alpha_{i,jk} - \alpha_{i,kj} &= -\alpha_l\left(\frac{\partial\Gamma^l_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^h_{ij}\Gamma^l_{hk} - \Gamma^h_{ik}\Gamma^l_{hj}\right)\\
&= -\alpha_l R^l_{ikj},\end{aligned}$$

即

$$\alpha_{i,jk}-\alpha_{i,kj} = \alpha_l R^l_{ijk}. \tag{5.4}$$

对公式 (5.3) 和 (5.4) 的推导过程进行分析, 不难得到下面的一般公式.

定理 5.1 设 $\tau\in\mathscr{T}^r_s(M)$, 它在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下的表达式为

$$\tau|_U = \tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes \mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{j_s}.$$

如果令

$$\mathrm{D}\tau|_U = \tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,k}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes \mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{j_s}\otimes \mathrm{d}x^k,$$
$$\begin{aligned}\mathrm{D}(\mathrm{D}\tau)|_U = \tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,kl}&\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes \mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{j_s}\otimes\\
&\otimes \mathrm{d}x^k\otimes \mathrm{d}x^l,\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}&\tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,kl} - \tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,lk}\\
&= -\sum_{a=1}^r \tau^{i_1\cdots i_{a-1} i i_{a+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} R^{i_a}_{ikl}+\sum_{b=1}^r \tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{b-1} j j_{b+1}\cdots j_s}R^j_{j_b kl}.\end{aligned} \tag{5.5}$$

上式称为 **Ricci 恒等式**.

证明留给读者作为练习.

现在, 换一种方式来讨论 Ricci 恒等式.

对于任意的 $X\in\mathfrak{X}(M)$, 以及 $\tau\in\mathscr{T}^r_s(M)$, τ 沿 X 的协变导数 $\mathrm{D}_X\tau$ 仍然是 $\mathscr{T}^r_s$ 中的元素. 因此, 协变导数算子 D_X 在光滑张量场上

的作用是一个线性映射

$$\mathrm{D}_X : \mathscr{T}^r_s(M) \to \mathscr{T}^r_s(M),$$
$$\tau \mapsto \mathrm{D}_X \tau,$$

它在张量积 (包括函数与张量场的乘积) 上的作用满足 Leibniz 法则，并且与张量的缩并运算可交换. 仿照 §4.1 曲率算子的定义，对于任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, 以及任意的 $\tau \in \mathscr{T}^r_s(M)$, 令

$$\mathcal{R}(X,Y)\tau = \mathrm{D}_X\mathrm{D}_Y\tau - \mathrm{D}_Y\mathrm{D}_X\tau - \mathrm{D}_{[X,Y]}\tau, \tag{5.6}$$

则 $\mathcal{R}(X,Y)\tau \in \mathscr{T}^r_s(M)$. 因此得到映射

$$\mathcal{R}(X,Y) : \mathscr{T}^r_s(M) \to \mathscr{T}^r_s(M),$$

称为作用在 $\mathscr{T}^r_s(M)$ 上的 **曲率算子**. 不难看出，这个算子具有下列性质:

(1) $\mathcal{R}(X,Y)\tau = -\mathcal{R}(Y,X)\tau$,

(2) $\mathcal{R}(fX,Y)\tau = \mathcal{R}(X,fY)\tau = \mathcal{R}(X,Y)(f\tau) = f\mathcal{R}(X,Y)\tau$,

其中 $\tau \in \mathscr{T}^r_s(M)$, $f \in C^\infty(M)$.

另外， $\mathcal{R}(X,Y)$ 关于张量积满足 Leibniz 法则，并且与张量场的缩并运算可交换.

由 $\mathcal{R}(X,Y)$ 的定义式 (5.6) 可知，对于任意的 $f \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(X,Y)f &= \mathrm{D}_X\mathrm{D}_Yf - \mathrm{D}_Y\mathrm{D}_Xf - \mathrm{D}_{[X,Y]}f \\ &= X(Yf) - Y(Xf) - [X,Y]f = 0.\end{aligned} \tag{5.7}$$

当 $r+s>0$ 时, 对于 $\tau \in \mathscr{T}^r_s(M)$ 以及任意的 $\alpha^1, \cdots, \alpha^r \in A^1(M)$, $X_1, \cdots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$ 有

$$\begin{aligned}(\mathcal{R}(X,Y)\tau)&(\alpha^1,\cdots,\alpha^r,X_1,\cdots,X_s) \\ =&\mathcal{R}(X,Y)(\tau(\alpha^1,\cdots,\alpha^r,X_1,\cdots,X_s)) \\ &-\sum_{a=1}^r \tau(\alpha^1,\cdots,\alpha^{a-1},\mathcal{R}(X,Y)\alpha^a,\alpha^{a+1},\cdots,\alpha^r, \\ &\qquad X_1,\cdots,X_s) \\ &-\sum_{b=1}^s \tau(\alpha^1,\cdots,\alpha^r,X_1,\cdots,X_{b-1},\mathcal{R}(X,Y)X_b, \\ &\qquad X_{b+1},\cdots,X_s).\end{aligned} \tag{5.8}$$

于是证明了

定理 5.2 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形， $r+s>0$, $\tau \in \mathscr{T}^r_s(M)$. 则对于任意的 $\alpha^1,\cdots,\alpha^r \in A^1(M)$ 以及任意的 $X_1,\cdots,X_s \in \mathfrak{X}(M)$, (5.8) 式成立.

需要指出的是，(5.8) 式实际上是 Ricci 恒等式 (5.5) 的等价形式. 为说明这一点，只需在任意的局部坐标系 $(U;x^i)$ 下，把 (5.8) 式表示出来即可.

不失一般性，设 $X = \dfrac{\partial}{\partial x^k}$, $Y = \dfrac{\partial}{\partial x^l}$. 因为

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} = R^j_{ikl}\frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{5.9}$$

所以，由 (5.8) 和 (5.7) 两式得到，

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\mathrm{d}x^j\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) &= -\mathrm{d}x^j\left(\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\ &= -R^j_{ikl},\end{aligned} \tag{5.10}$$

因而

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\mathrm{d}x^j = -R^j_{ikl}\mathrm{d}x^i. \tag{5.11}$$

于是对于任意的 $\tau \in \mathscr{T}^r_s(M)$, $r+s>0$, 如果

$$\tau|_U = \tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes\mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{j_s},$$

$$\mathrm{D}\tau|_U = \tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,k}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes \mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{j_s}\otimes \mathrm{d}x^k,$$

$$\mathrm{D}(\mathrm{D}\tau)|_U = \tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,kl}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes \mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{j_s}\otimes \mathrm{d}x^k\otimes \mathrm{d}x^l,$$

则由 (5.8), (5.9),(5.11) 和 (5.7) 各式得到

$$\begin{aligned}
&\left(\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\tau\right)\left(\mathrm{d}x^{i_1},\cdots,\mathrm{d}x^{i_r},\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)\\
&=\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\left(\tau\left(\mathrm{d}x^{i_1},\cdots,\mathrm{d}x^{i_r},\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)\right)\\
&\quad-\sum_{a=1}^{r}\tau\left(\mathrm{d}x^{i_1},\cdots,\mathrm{d}x^{i_{a-1}},\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\mathrm{d}x^{i_a},\mathrm{d}x^{i_{a+1}},\cdots,\mathrm{d}x^{i_r},\right.\\
&\qquad\left.\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)\\
&\quad-\sum_{b=1}^{s}\tau\left(\mathrm{d}x^{i_1},\cdots,\mathrm{d}x^{i_r},\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_{b-1}}},\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\frac{\partial}{\partial x^{j_b}},\right.\\
&\qquad\left.\frac{\partial}{\partial x^{j_{b+1}}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)\\
&=\sum_{a=1}^{r}R^{i_a}_{ikl}\tau\left(\mathrm{d}x^{i_1},\cdots,\mathrm{d}x^{i_{a-1}},\mathrm{d}x^{i},\mathrm{d}x^{i_{a+1}},\cdots,\mathrm{d}x^{i_r},\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\right.\\
&\qquad\left.\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)\\
&\quad-\sum_{b=1}^{s}R^{j}_{j_bkl}\tau\left(\mathrm{d}x^{i_1},\cdots,\mathrm{d}x^{i_r},\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_{b-1}}},\frac{\partial}{\partial x^{j}},\right.\\
&\qquad\left.\frac{\partial}{\partial x^{j_{b+1}}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)\\
&=\sum_{a=1}^{r}R^{i_a}_{ikl}\tau^{i_1\cdots i_{a-1}ii_{a+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}-\sum_{b=1}^{s}R^{j}_{j_bkl}\tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{b-1}jj_{b-1}\cdots j_s}.
\end{aligned}\tag{5.12}$$

另一方面，根据定义式 (5.6) 直接计算得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\tau &=\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^l}}\tau-\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^l}}\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\tau\\
&=\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\left(\tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,l}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\right.\\
&\qquad\left.\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes \mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{j_s}\right)\\
&\quad-\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^l}}\left(\tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,k}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\right.\\
&\qquad\left.\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes \mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{j_s}\right)\\
&=(\tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,lk}-\tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,kl})\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\\
&\qquad\otimes \mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{j_s}.
\end{aligned}$$

将此式与 (5.12) 式相比较得到

$$\begin{aligned}
\tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,kl}-\tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,lk}=&-\sum_{a=1}^{r}R^{i_a}_{ikl}\tau^{i_1\cdots i_{a-1}ii_{a+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\\
&+\sum_{b=1}^{s}R^{j}_{j_bkl}\tau^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{b-1}jj_{b+1}\cdots j_s}.
\end{aligned}$$

此即 Ricci 恒等式 (5.5).

习 题 四

1. 设 (M,D) 是以 T 为挠率张量的仿射联络空间， $\mathcal{R}$ 是它的曲率算子. 证明：对于任意的 $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}(X,Y)Z+\mathcal{R}(Y,Z)X+\mathcal{R}(Z,X)Y\\
&=(\mathrm{D}_XT)(Y,Z)+(\mathrm{D}_YT)(Z,X)+(\mathrm{D}_ZT)(X,Y)\\
&\quad+T(T(X,Y),Z)+T(T(Y,Z),X)+T(T(Z,X),Y).
\end{aligned}$$

2. 设 $\pi:E\to M$ 是光滑流形 M 上的向量丛， D 是该向量丛上的联络. 定义映射 $\mathcal{R}:\Gamma(E)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\Gamma(E)$ 如下：

$$\mathcal{R}(X,Y)\xi=\mathrm{D}_X\mathrm{D}_Y\xi-\mathrm{D}_Y\mathrm{D}_X\xi-\mathrm{D}_{[X,Y]}\xi.$$

$$\forall X,Y\in\mathfrak{X}(M),\ \xi\in\Gamma(E).$$

证明：对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, $\xi\in\Gamma(E)$, 以及任意的 $f\in C^\infty(M)$, 下列关系式成立：

(1) $\mathcal{R}(X,Y)\xi=-\mathcal{R}(Y,X)\xi$;

(2) $\mathcal{R}(fX,Y)\xi=\mathcal{R}(X,fY)\xi=f\mathcal{R}(X,Y)\xi$;

(3) $\mathcal{R}(X,Y)(f\xi)=f\mathcal{R}(X,Y)\xi$.

映射 $\mathcal{R}$ 称为向量丛 E 关于联络 D 的 **曲率张量**.

3. 设 $f:M\to N$ 是光滑流形之间的光滑映射, D 是 N 上的一个联络, $\pi:f^*TN\to M$ 是切丛 TN 通过映射 f 在 M 上的拉回丛 (参看第一章例题 9.2). 由第二章的例 8.2, 向量丛 f^*TN 具有诱导联络 $\tilde{\mathrm{D}}$, 其曲率张量 (见本章习题第 2 题) 记为 $\tilde{\mathcal{R}}$. 对于 M 上的任意的局部坐标系 $(U;x^i)$, 以及任意的 $V\in\Gamma(TN)$, 令 $\xi=V\circ f$, 则 $\xi\in\Gamma(f^*TN)$. 证明:

$$\tilde{\mathcal{R}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\xi=\mathcal{R}\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right),f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)V\Big|_{f(M)},$$

即有

$$\tilde{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\tilde{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\xi=\tilde{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\tilde{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\xi+\overline{\mathcal{R}}\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right),f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)V\Big|_{f(M)},$$

其中 $\overline{\mathcal{R}}$ 是 TN 上的曲率张量.

4. 设 X 是黎曼流形 M 上的一个 Killing 向量场 (参看第二章习题第 23 题). 定义映射

$$A_X:\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M),$$

使得对于任意的 $Z\in\mathfrak{X}(M)$, $A_XZ=\mathrm{D}_ZX$. 考虑函数

$$f:M\to\mathbb{R}:f(p)=|X(p)|^2,\quad\forall p\in M.$$

如果 $p_0\in M$ 是 f 的一个临界点 (即 $\mathrm{d}f|_{p_0}=0$), 证明：对于任意的 $Z\in\mathfrak{X}(M)$, 下述等式在 p_0 点成立：

(1) $\langle A_X(Z),X\rangle=0$, $\langle\mathrm{D}_XX,Z\rangle=0$;

(2) $\langle A_X(Z),A_X(Z)\rangle=\dfrac{1}{2}Z(Z(f))-\langle\mathcal{R}(X,Z)X,Z\rangle$, 其中 $\mathcal{R}$ 是 M 的曲率张量.

5. 设 $\gamma:[0,b]\to M$ 是黎曼流形 M 上一条光滑曲线, $X\in\mathfrak{X}(M)$ 且 $X|_{\gamma(0)}=0$. 令 $X'=\mathrm{D}_{\gamma'}X$, 证明：

$$\mathrm{D}_{\gamma'(0)}(\mathcal{R}(\gamma',X)\gamma')=(\mathcal{R}(\gamma',X')\gamma')(0).$$

6. 设 $\varphi:M\to N$ 是黎曼流形之间的局部等距. 证明： φ 保持曲率张量和黎曼曲率张量不变，即对于任意的 $p\in M$, 以及任意的 $u,v,w,z\in T_pM$ 有

$$\varphi_*(\mathcal{R}^M(u,v)w)=\mathcal{R}^N(\varphi_*(u),\varphi_*(v))\varphi_*(w),$$

$$R^M(u,v,w,z)=R^N(\varphi_*(u),\varphi_*(v),\varphi_*(w),\varphi_*(z)).$$

由此可见，黎曼流形的截面曲率在局部等距下保持不变.

7. 设 $\{e_i\}$ 是无挠仿射联络空间 (M,D) 上的一个局部标架场，与其对偶的余切标架场记为 $\{\omega^i\}$; D 的联络形式和曲率形式分别是 ω_i^j 和 Ω_i^j. 证明下面两个等式互相等价：

(1) $\mathrm{d}\Omega_i^j=\omega_i^k\wedge\Omega_k^j-\Omega_i^k\wedge\omega_k^j$;

(2) $R^j_{ikl,h}+R^j_{ilh,k}+R^j_{ihk,l}=0$, 其中的 $R^j_{ikl,h}$ 由 (2.14) 定义.

8. 设 G 是李群， g 是 G 上的一个双不变黎曼度量 (参看第二章习题第 16 题), D 是相应的黎曼联络， $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(G)$ 是 G 上的左不变向量场. 证明：

(1) $\mathcal{R}(X,Y)Z=[Z,[X,Y]]/4$.

(2) 如果 X,Y 是互相正交的左不变单位向量场，则由 X,Y 决定的二维截面的截面曲率为

$$K(X,Y)=\frac{1}{4}|[X,Y]|^2.$$

因此， $K(X,Y)\geq0$, 等号成立当且仅当 $[X,Y]=0$. 由此可见李群上双不变黎曼度量具有非负的截面曲率.

9. 设 M 是一个偶数维的紧致黎曼流形，具有正的截面曲率. 证明：在 M 上的每一个 Killing 向量场 X 都有奇异点，即存在点 $p_0 \in M$，使得 $X(p_0) = 0$.

10. 设 M 是黎曼流形. 证明：如果对于任意的 $p, q \in M$，在 M 中从点 p 到点 q 的平行移动与连接 p 和 q 的曲线段无关，则 M 的曲率张量恒为零，即对于任意的 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$，$\mathcal{R}(X,Y)Z = 0$.

11. 设 M 是黎曼流形，$\mathcal{R}$ 是 M 的曲率张量. 如果 $D\mathcal{R} = 0$，则称 M 为**黎曼局部对称空间**.

(1) 设 M 是黎曼局部对称空间，$\gamma : [0,b] \to M$ 是 M 上的测地线，X, Y, Z 是沿 γ 的平行向量场. 证明：$\mathcal{R}(X,Y)Z$ 沿 γ 也是平行的.

(2) 设 M 是连通的黎曼局部对称空间，并且 $\dim M = 2$. 证明 M 是常曲率空间.

12. 设 $f : \tilde{M} \to M$ 是黎曼淹没，$X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$，$\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{W} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ 是相应的水平提升 (参看第二章习题第 25 题). 假定 $\mathcal{R}$ 和 $\tilde{\mathcal{R}}$ 分别是 M 和 $\tilde{M}$ 的曲率张量，$(\cdots)^v$ 表示向量 $(\cdots)$ 的铅垂分量. 证明：

(1) $\langle \tilde{\mathcal{R}}(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z},\overline{W}\rangle = \langle \mathcal{R}(X,Y)Z,W\rangle + \langle [\overline{X},\overline{Z}]^v,[\overline{Y},\overline{W}]^v\rangle/4$
$\quad - \langle [\overline{Y},\overline{Z}]^v,[\overline{X},\overline{W}]^v\rangle/4 + \langle [\overline{Z},\overline{W}]^v,[\overline{X},\overline{Y}]^v\rangle/2$;

(2) $K(X,Y) = \tilde{K}(\overline{X},\overline{Y}) + 3|[\overline{X},\overline{Y}]^v|^2/4 \geq \tilde{K}(\overline{X},\overline{Y})$.

13. (**复射影空间的曲率**) 用 $(\cdot,\cdot)$ 表示 $n+1$ 维复数空间 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的**标准 Hermite 内积**，即

$$(z,w) = z^1\overline{w}^1 + \cdots + z^{n+1}\overline{w}^{n+1},$$
$$\forall z = (z^1,\cdots,z^{n+1}),\ w = (w^1,\cdots,w^{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}.$$

在 $\mathbb{C}^{n+1}_* = \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ 上定义如下的黎曼度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$：对于任意的 $z \in \mathbb{C}^{n+1}_*$，

$$\langle V,W\rangle_z = \frac{\mathrm{Re}(V,W)}{(z,z)},\ \forall V,W \in T_z(\mathbb{C}^{n+1}_*) = \mathbb{C}^{n+1}.$$

易知，度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 限制在 $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}_*$ 与 S^{2n+1} 上的标准黎曼度量相同.

(1) 证明：对于所有的 $0 \leq \theta \leq 2\pi$，数乘运算 $e^{\sqrt{-1}\theta} : S^{2n+1} \to S^{2n+1}$ 是一个等距；由此进一步说明，可以在 CP^n 上引入一个黎曼度量 g，使得在第一章习题第 6 题中定义的映射 $f : S^{2n+1} \to CP^n$ 是黎曼淹没.

(2) 证明：关于上面所定义的黎曼度量 g，CP^n 的截面曲率由下式给出：对于任意两个互相垂直的单位切向量场 $X, Y \in \mathfrak{X}(CP^n)$，

$$K(X,Y) = 1 + 3\cos^2\varphi,$$

其中 $\cos\varphi = \langle \overline{X}, \sqrt{-1}\,\overline{Y}\rangle$，$\overline{X}, \overline{Y}$ 分别是 X, Y 在 $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}_*$ 上的水平提升.

14. 设 $\{e_i\}$ 是黎曼流形 (M,g) 上的一个局部标架场，D 是 M 上的黎曼联络，$g_{ij} = g(e_i,e_j)$，矩阵 $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$. 定义映射

$$\mathrm{tr}\,D^2 : A^r(M) \to A^r(M),\quad r \geq 0$$

如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,D^2(\alpha) &= g^{ij}(D_{e_i}D_{e_j} - D_{D_{e_i}e_j})\alpha\\ &= g^{ij}(D_{e_i}D_{e_j}\alpha - D_{D_{e_i}e_j}\alpha),\quad \forall \alpha \in A^r(M).\end{aligned}$$

映射 $\mathrm{tr}\,D^2$ 称为 $A^r(M)$ 上的**迹 Laplace 算子**. 又设 $\tilde{\Delta}$ 是 M 上的 Hodge-Laplace 算子.

(1) 设 $\alpha \in A^1(M)$，切向量场 X 由

$$g(X,Y) = \alpha(Y),\quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M))$$

确定，证明：

$$(\tilde{\Delta}\alpha)(Y) = -(\mathrm{tr}\,D^2\alpha)(Y) + \mathrm{Ric}(X,Y),\quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$$

(2) 证明如下的 **Weitzenböck 公式**：

$$(\tilde{\Delta}\alpha)(X_1,\cdots,X_r) = -(\mathrm{tr}\,\mathrm{D}^2\alpha)(X_1,\cdots,X_r) + \sum_{a=1}^{r}(-1)^{a+1}g^{ij}(\mathcal{R}(e_i,X_a)\alpha)(e_j,X_1,\cdots,\widehat{X_a},\cdots,X_r),$$
$$\forall\alpha\in A^r(M),\quad \forall X_1,\cdots,X_r\in\mathfrak{X}(M),$$

其中的曲率算子 $\mathcal{R}$ 由 (5.6) 式定义. 试说明, (1) 的结论是 Weitzenböck 公式的特例;

(3) 设 $i(e_j)\alpha$ 是向量 e_j 与外微分式 α 的内乘 (参看第一章习题第 54 题), 证明 Weitzenböck 公式的如下形式:

$$\tilde{\Delta}\alpha = -(\mathrm{tr}\,\mathrm{D}^2)\alpha + g^{ij}\omega^k\wedge i(e_j)(\mathcal{R}(e_i,e_k)\alpha),\quad \forall\alpha\in A^r(M).$$

15. 设 S^m 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的单位球面, 具有诱导度量.

(1) 证明: 对于任意的 $p,q\in S^m$, 以及任意两个二维子空间 $\pi\subset T_pS^m$、$\pi'\subset T_qS^m$, 存在一个等距 $\varphi: S^m\to S^m$, 使得

$$\varphi(p)=q,\quad \varphi_*(\pi)=\pi';$$

(2) 利用结论 (1) 证明: S^m 具有常截面曲率.

16. 设 M 是一个黎曼流形. 证明: M 是黎曼局部对称空间当且仅当对于任意一条分段光滑曲线 $\gamma:[0,1]\to M$ 以及任意的单位正交切向量 $e_1,e_2\in T_{\gamma(0)}M$, 截面曲率

$$K(e_1,e_2)=K(P_\gamma(e_1),P_\gamma(e_2)),$$

其中 P_γ 是 M 中沿 γ 的平行移动.

17. 设 (M,g) 是 $m(\geq 3)$ 维黎曼流形, R 是 M 的黎曼曲率张量. 证明: 如果对于任意的 $X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M)$ 满足下列恒等式:

$$R(X,Y,Z,W)=\frac{1}{m-1}\{\mathrm{Ric}(X,W)g(Y,Z)-\mathrm{Ric}(X,Z)g(Y,W)\},$$

则 M 是常曲率空间.

18. 设 M 是黎曼流形, $p\in M$. 证明: M 在点 p 的数量曲率 $S(p)$ 可表示为

$$S(p)=\frac{m}{\omega_{m-1}}\int_{S^{m-1}}\mathrm{Ric}_p(v)\mathrm{d}V_{S^{m-1}},$$

其中 ω_{m-1} 是切空间 T_pM 中的单位球面 S^{m-1} 的体积.

19. 假设 g 与 $\tilde{g}$ 是 m 维光滑流形 M 上的两个共形的黎曼度量, 即有光滑函数 $\rho\in C^\infty(M)$, 使得 $\tilde{g}=e^{2\rho}g$(参看第二章习题第 20 题和第 21 题). 又设在 M 的局部坐标系 $(U;x^i)$ 下, 黎曼度量 g 和 $\tilde{g}$ 的曲率张量、黎曼曲率张量、Ricci 曲率张量的分量和数量曲率分别为

$$R^l_{kij},\ R_{ijkl},\ R_{ij},\ S;\quad \tilde{R}^l_{kij},\ \tilde{R}_{ijkl},\ \tilde{R}_{ij},\ \tilde{S}.$$

(1) 证明下列关系式成立:

(a) $\tilde{R}^l_{kij}=R^l_{kij}+\rho_{ki}\delta^l_j-\rho_{kj}\delta^l_i+g_{ki}g^{lp}\rho_{pj}-g_{kj}g^{lp}\rho_{pi}$;

(b) $\tilde{R}_{ijkl}=e^{2\rho}(R_{ijkl}+g_{jl}\rho_{ik}-g_{jk}\rho_{il}-g_{ik}\rho_{jl}+g_{il}\rho_{jk})$;

(c) $\tilde{R}_{ij}=R_{ij}-(m-2)\rho_{ij}-g_{ij}g^{kl}\rho_{kl}$;

(d) $\tilde{S}=e^{-2\rho}(S-2(m-1)g^{ij}\rho_{ij})$,

其中

$$\rho_{ij}=\frac{\partial^2\rho}{\partial x^i\partial x^j}-\Gamma^k_{ij}\frac{\partial\rho}{\partial x^k}-\frac{\partial\rho}{\partial x^i}\frac{\partial\rho}{\partial x^j}+\frac{1}{2}g_{ij}g^{kl}\frac{\partial\rho}{\partial x^k}\frac{\partial\rho}{\partial x^l}.$$

(2) 设 $(U;x,y)$ 是二维黎曼流形 (M,g) 的一个局部坐标系, 黎曼度量 g 的局部表示是 $g=F^2(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)$, 其中 F 是定义在 U 上且处处不为零的光滑函数. 利用 (1) 证明: M 的 Gauss 曲率

$$K=-\frac{1}{F^2}\Delta_0\ln F,$$

这里 $\Delta_0=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

20. 设 $m>2$, $U\subset\mathbb{R}^m$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的连通开子集, F 是定义在 U 上且处处不为零的光滑函数. 假定 $\mathbb{R}^m$ 上的坐标系为 $(x^1,\cdots,x^m)$, 令

$$g_{ij}=\frac{\delta_{ij}}{F^2},$$

则 $g=g_{ij}dx^idx^j$ 是 U 上的一个黎曼度量. 记

$$F_i=\frac{\partial F}{\partial x^i},\ F_{ij}=\frac{\partial^2 F}{\partial x^i\partial x^j},\quad i,j=1,\cdots,m.$$

(1) 证明: 度量 g 具有常截面曲率 c 的充分必要条件是对于任意的 $i\neq j$

$$F_{ij}=0,\qquad F(F_{jj}+F_{ii})=c+\sum_k(F_k)^2.$$

(2) 利用 (1) 的结论证明: 度量 g 具有常截面曲率 c 的充分必要条件是存在常数 $a,b_i,c_i,\ i=1,\cdots,m$, 使得

$$\sum_i(4c_ia-b_i^2)=c,\quad F=G_1(x^1)+\cdots+G_m(x^m),$$

其中的函数 $G_i(x)=ax^2+b_ix+c_i$.

(3) 在 (2) 中令 $a=c/4,\ b_i=0,\ c_i=1/m$, 便得到 Riemann 所给出的公式:

$$g_{ij}=\frac{\delta_{ij}}{\left(1+\frac{c}{4}\sum_k(x^k)^2\right)^2}.$$

此时, 度量 g 具有常截面曲率 c. 试说明, 当 $c<0$ 时, 度量 g 在一个以原点为中心, 以 $2/\sqrt{-c}$ 为半径的开球 $B(2/\sqrt{-c})$ 内有定义, 并且是完备的.

(4) 如果 $c>0$, 证明: 在 (3) 中给出的黎曼度量 g 在整个 $\mathbb{R}^m$ 上有定义, 但不是完备的.

21. 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形, $(U;x^i)$ 是 M 的局部坐标系. 定义

$$C^l_{kij}=R^l_{kij}+\delta^l_j\varphi_{ki}-\delta^l_i\varphi_{kj}+g_{ki}g^{lp}\varphi_{pj}-g_{kj}g^{lp}\varphi_{pi},$$

其中

$$\varphi_{ij}=\frac{1}{m-2}R_{ij}-\frac{S}{2(m-1)(m-2)}g_{ij},$$

R^l_{kij}, R_{ij} 和 S 分别是 (M,g) 的曲率张量、Ricci 曲率张量和数量曲率. 显然, C^l_{kij} 给出了 M 上的一个 (1,3) 型张量场 C, 即

$$C(Z,X,Y)=X^iY^jZ^kC^l_{kij}\frac{\partial}{\partial x^l},$$
$$\forall X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i},\ Y=Y^i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad Z^i=Z^i\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

张量 C 称为黎曼流形 (M,g) 的 **Weyl 共形曲率张量**. 证明:

(1) Weyl 共形曲率张量 C 在共形变换 (参看第二章的定义 2.3) 下保持不变, 即 C 仅与度量 g 的共形等价类有关;

(2) 当 $C\equiv 0$ 时, M 的曲率张量可以用它的 Ricci 曲率张量和数量曲率表示如下:

$$R^l_{kij}=\frac{1}{m-2}(\delta^l_iR_{kj}-\delta^l_jR_{ki}+g_{kj}g^{lp}R_{pi}-g_{ki}g^{lp}R_{pj})$$
$$+\frac{S}{(m-1)(m-2)}(\delta^l_jg_{ki}-\delta^l_ig_{kj}).$$

22. 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形, Ric 和 S 分别是 M 的 Ricci 曲率张量和数量曲率, $m\geq 3$. 在 M 上引入如下的 2 阶协变张量场:

$$\varphi(X,Y)=\frac{1}{m-2}\mathrm{Ric}(X,Y)-\frac{S}{2(m-1)(m-2)}g(X,Y).$$

证明:

(1) 共形曲率张量 C 可以用 φ 确定如下:

$$g(C(Z,X,Y),W)=R(Z,W,X,Y)+\varphi(X,Z)g(Y,W)$$
$$-\varphi(Y,Z)g(X,W)+g(X,Z)\varphi(Y,W)-g(Y,Z)\varphi(X,W),$$
$$\forall X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M);$$

(2) 当 $m=3$ 时, $C\equiv 0$;

(3) 定义 (0,3) 型张量场 D, 使得

$$D(X,Y,Z)=(m-2)((D_Z\varphi)(X,Y)-(D_Y\varphi)(X,Z)),$$

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M),$$

则 D 关于 Y, Z 是反对称的，且有

$$\sum_i g((\mathrm{D}_{e_i}C)(X,Y,Z), e_i) = \frac{m-3}{m-2}D(X,Y,Z), \quad X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M),$$

其中 $\{e_i\}$ 是 M 上的单位正交标架场，$\mathrm{D}_{e_i}C$ 是共形曲率张量 C 的协变导数；

(4) 当 $m=3$ 时，张量场 D 是共形不变的. 当 $m>3$, 并且 $C \equiv 0$ 时，$D \equiv 0$.

23. 一个 m 维黎曼流形 (M,g) 称为**局部共形平坦**的，如果 g 在局部上共形等价于平坦的黎曼度量，即对于任意的 $p \in M$, 都存在 p 点的一个邻域 U 以及 U 上的光滑函数 ρ, 使得 $\tilde{g} = e^{2\rho}g$ 是平坦的黎曼度量. 证明：

(1) 当 $m \geq 3$ 时，M 为局部共形平坦的充分必要条件是：

(a) 当 $m=3$ 时，本章习题第 22 题中定义的张量场 $D \equiv 0$;

(b) 当 $m>3$ 时，共形曲率张量 $C \equiv 0$;

(2) 常曲率空间是局部共形平坦的；

(3) 如果 M 是局部共形平坦的 $m(\geq 3)$ 维 Einstein 流形，则 M 是常曲率空间.

24. 设 (M,g) 为连通的 $m(\geq 3)$ 维黎曼流形，它的 Ricci 曲率张量 Ric 与黎曼度量 g 处处成比例，即存在 $\lambda \in C^\infty(M)$, 使得 $\mathrm{Ric} = \lambda g$. 证明：

(1) (M,g) 是 Einstein 流形，因而其数量曲率 $S = m\lambda$ 为常数；

(2) 若 M 的数量曲率 $S \neq 0$, 则在 M 上不存在非零的平行切向量场；

(3) 如果 $m=3$, 则 (M,g) 是常曲率空间.

25. 证明定理 5.1

第五章 Jacobi 场和共轭点

在第三章已经详细地讨论了黎曼流形上测地线的局部性状. 很明显，测地线的这种局部性状与黎曼度量的曲率无关. 然而，黎曼流形的曲率显著地影响着测地线的大范围性状. 考虑最简单的黎曼流形的例子，就能够对此有一个大致的感性认识.

例如，在欧氏平面 E^2 中，Gauss 曲率恒为零，其中的测地线都是直线. 显然，从一点出发的任意两条测地线上的点会离得越来越远，或形象地说，它们是“发散”的. 而在 Gauss 曲率为正常数 1 的单位球面 S^2 上，情况则截然相反. 此时，测地线是 S^2 上的大圆周，因而从一点出发的任意两条测地线都会在该点的对径点处相交. 这样，从一点出发的所有测地线都会在某处交汇在一起，或者说，它们是“收敛”的.

要对黎曼流形上从一点出发的测地线的这种“发散性”或“收敛性”进行研究，通常的做法是把测地线 γ 嵌入到一族具有公共出发点的测地线中去，即选取该测地线 γ 的一个有固定起点的“测地变分”，并考虑相应的变分向量场 U. 如果这个变分向量场 U 的模长是测地线 γ 弧长 s 的增函数，则这族测地线是发散的；如果变分向量场 U 除了起点外有另外的零点 (即本章将要讨论的共轭点)，则这一族测地线就会在该零点附近收敛.

在这一章里，首先讨论由一族测地线构成的测地变分，它的变分向量场将满足一个二阶常微分方程 (即 Jacobi 方程)，因而称为 Jacobi(向量) 场. 下面将会看到，Jacobi 方程含有曲率项，所以 Jacobi 场的性态与黎曼流形的曲率性质有密切关系. 因此，Jacobi 场是黎曼几何学中重要的研究工具.

在本章中，我们还将利用 Jacobi 场来证明几个属于大范围黎曼几何的定理.

§5.1 Jacobi 场

设 (M,g) 是一个 m 维黎曼流形，$\gamma:[a,b]\to M$ 是 M 上的一条测地线．假定 $\Phi:[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是 γ 的一个变分，并且对于每一个固定的 $u\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, 曲线 $\gamma_u=\Phi(\cdot,u):[a,b]\to M$ 是测地线．这样的变分称为 γ 的一个**测地变分**．

令

$$\tilde{T}(t,u)=\Phi_{*(t,u)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),\quad \tilde{U}(t,u)=\Phi_{*(t,u)}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right),\tag{1.1}$$

则 $\tilde{T}$ 是变分曲线 $\gamma_u=\Phi(\cdot,u)$ 的切向量；$\tilde{U}$ 是横截曲线 $\sigma_t=\Phi(t,\cdot)$ 的切向量，它在曲线 γ 上的限制

$$U(t)=\tilde{U}(t,0)$$

是 γ 的变分 Φ 的变分向量场 (参看第三章的 §3.3).

设 $\mathcal{R}$ 是 (M,g) 上的曲率张量，D 表示 M 上的黎曼联络或它在拉回从 Φ^*TM 上的诱导联络．当 D 表示 Φ^*TM 上的诱导联络时，如果变量 u 固定，则 D 化为拉回向量丛 $(\gamma_u)^*TM$ 上的诱导联络．根据第四章习题第 3 题的结论，

$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{U}=\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u}}\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{T}+\mathcal{R}(\tilde{T},\tilde{U})\tilde{T}.\tag{1.2}$$

由于 Φ 是测地变分，即对于每一个 $u\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, γ_u 是测地线，故 (参看第二章的注记 8.1)

$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{T}=\mathrm{D}_{\gamma_u'}\gamma_u'=0,$$

其中第一个等号后边的 D 是 M 上的黎曼联络．于是

$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{U}=\mathcal{R}(\tilde{T},\tilde{U})\tilde{T}.\tag{1.3}$$

上式左端实际上是将向量场 $\tilde{U}$ 关于 $\dfrac{\partial}{\partial t}$ 求两次协变导数，而右端的 $\mathcal{R}$ 则是一个曲率张量．在 (1.3) 式中令 $u=0$, 便得

$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}U=\mathcal{R}(\gamma',U)\gamma'.$$

记

$$U'(t)=\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}U=\mathrm{D}_{\gamma'}U=\frac{\mathrm{D}U(t)}{\mathrm{d}t},$$
$$U''(t)=\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}U=\mathrm{D}_{\gamma'}\mathrm{D}_{\gamma'}U=\frac{\mathrm{D}^2U(t)}{\mathrm{d}t^2}.$$

则上面的方程成为

$$U''(t)=\mathcal{R}(\gamma'(t),U(t))\gamma'(t).\tag{1.4}$$

这个方程称为 **Jacobi 方程**.

定义 1.1 设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是 m 维黎曼流形 (M,g) 上的一条测地线，$U=U(t)$ 是在 M 上沿 γ 定义的一个光滑切向量场．如果 U 满足 Jacobi 方程 (1.4), 则称 U 是沿测地线 γ 的一个 **Jacobi 向量场**，简称为 **Jacobi 场**.

于是，前面的讨论给出了下面的命题：

命题 1.1 设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是黎曼流形 (M,g) 上的一条测地线，则 γ 的测地变分的变分向量场是沿 γ 的 Jacobi 场.

为了证明这个命题的逆命题，需要对 Jacobi 场有更深入的了解.

首先对 Jacobi 方程作一些讨论，把它表示为向量场的分量函数所满足的常微分方程组．为此，假设 $t\in[a,b]$ 是测地线 γ 的弧长参数，并且沿 γ 取一个平行的单位正交标架场 $\{e_i(t)\}$, 使得 $e_m(t)=\gamma'(t)$. 则

$$e_i'(t)=\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}e_i(t)=0,$$

其中 D 是 γ^*TM 上的诱导联络.

再设 $U = U(t)$ 是沿 γ 定义的光滑切向量场，把它表示为

$$U(t) = \sum_{i=1}^{m} U^i(t) e_i(t). \tag{1.5}$$

于是有

$$U'(t) = \sum_i U^{i\prime}(t) e_i(t), \quad U''(t) = \sum_i U^{i\prime\prime}(t) e_i(t),$$

$$U''(t) - \mathcal{R}(\gamma'(t), U(t))\gamma'(t) = \sum_i \{U^{i\prime\prime}(t) - \sum_j U^j(t) R^i_{mmj}(\gamma(t))\} e_i(t).$$

因此，Jacobi 方程 (1.4) 等价于方程组

$$U^{i\prime\prime}(t) = \sum_j U^j(t) R^i_{mmj}(\gamma(t)), \quad 1 \le i \le m.$$

注意到 $g_{ij} = g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$，上式可以改写为

$$U^{i\prime\prime}(t) = \sum_j U^j(t) R_{mimj}, \quad 1 \le i \le m, \tag{1.6}$$

其中 $R_{mimj} = \langle \mathcal{R}(e_m, e_j)e_m, e_i \rangle$. 由此可见，Jacobi 方程 (1.4) 实际上是关于向量场 $U = U(t)$ 的分量函数 $U^i(t)$ 的线性齐次二阶常微分方程组.

根据常微分方程的理论，有

定理 1.2 设 $\gamma : [a, b] \to M$ 是黎曼流形 (M, g) 上的一条测地线，则对于任意的 $v, w \in T_{\gamma(a)}M$，沿 γ 存在唯一的一个 Jacobi 场 $J(t)$ 满足

$$J(a) = v, \quad J'(a) = w.$$

根据定理 1.2，下面的推论是显然的：

推论 1.3 沿测地线 $\gamma : [a, b] \to M$ 的 Jacobi 场 $J(t)$ 由它的初始值 $J(a), J'(a) \in T_{\gamma(a)}M$ 唯一确定；并且，沿 γ 的 Jacobi 场的集合 $\mathscr{J}(\gamma)$ 是同构于 $T_{\gamma(a)}M \oplus T_{\gamma(a)}M$ 的 $2m$ 维向量空间.

推论 1.4 设 $J(t)$ 是沿测地线 γ 的 Jacobi 场，如果 $J \neq 0$，则它的零点是孤立的.

推论 1.3 和推论 1.4 的证明留给读者作为练习.

设 J 是沿 γ 的 Jacobi 场. 在方程组 (1.6) 中，令 $U = J$，并取 $i = m$，则有 $J^{m\prime\prime}(t) = 0$. 所以 $J^m(t)$ 是 t 的线性函数，即有常数 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$，使得

$$J^m(t) = \lambda t + \mu. \tag{1.7}$$

对 t 求导可得

$$\langle J'(t), e_m(t) \rangle = J^{m\prime}(t) = \lambda,$$

在上式和 (1.7) 式中令 $t = a$，则有

$$\lambda = \langle J'(a), e_m(a) \rangle, \quad a\lambda + \mu = J^m(a) = \langle J(a), e_m(a) \rangle.$$

因此

$$\mu = \langle J(a), e_m(a) \rangle - a \langle J'(a), e_m(a) \rangle.$$

代入 (1.7) 式得到

$$\langle J(t), e_m(t) \rangle = J^m(t) = (t - a)\langle J'(a), e_m(a) \rangle + \langle J(a), e_m(a) \rangle.$$

综合上面的讨论，则有下面的定理：

定理 1.5 设 $\gamma : [a, b] \to M$ 是黎曼流形 (M, g) 上的一条测地线，$J = J(t)$ 是沿 γ 的 Jacobi 场，则

$$\langle J(t), \gamma'(t) \rangle = (t - a)\langle J'(a), \gamma'(a) \rangle + \langle J(a), \gamma'(a) \rangle.$$

因此，J 与 γ 处处正交的充分必要条件是

$$J(a) \perp \gamma'(a), \quad J'(a) \perp \gamma'(a).$$

定义 1.2 设 $J = J(t)$ 是黎曼流形 (M, g) 上沿测地线 γ 的 Jacobi 场，如果 J 与 γ 处处正交，则称 J 是沿 γ 的**法 Jacobi 场**.

关于法 Jacobi 场，有下面的结论：

推论 1.6 假定 $\gamma:[a,b]\to M$ 是黎曼流形 (M,g) 中的一条测地线.

(1) 设 $J=J(t)$ 是沿测地线 γ 的一个 Jacobi 场. 如果存在两个不同点 $t_1,t_2\in[a,b]$, 使得

$$J(t_1)\perp\gamma'(t_1),\quad J(t_2)\perp\gamma'(t_2),$$

则 J 是法 Jacobi 场.

(2) 如果用 $\mathscr{J}^{\perp}(\gamma)$ 表示在 M 上沿测地线 γ 的法 Jacobi 场的集合，则 $\mathscr{J}^{\perp}(\gamma)$ 是一个 $2(m-1)$ 维向量空间.

证明 结论 (1) 是 (1.7) 式的直接推论；结论 (2) 可由推论 1.3 和定理 1.5 导出. 细节留给读者自己完成.

下面，给出在常曲率空间中的 Jacobi 场的表达式.

例 1.1 常曲率空间中的 Jacobi 场.

设 (M,g) 是 m 维常曲率空间，其截面曲率是常数 c. 由第四章的定理 3.2, 对于任意的 $X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M)$, M 的黎曼曲率张量是

$$\begin{aligned}R(Z,W,X,Y)=&\langle\mathcal{R}(X,Y)Z,W\rangle\\=&-c(\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle-\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle),\end{aligned}$$

或等价地，其曲率张量是

$$\mathcal{R}(X,Y)Z=-c(\langle X,Z\rangle Y-\langle Y,Z\rangle X).\tag{1.8}$$

现在假定 $\gamma:[0,l]\to M$ 是一条正规测地线，则

$$|\gamma'(t)|^2=\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle=1.$$

设 $J=J(t)$ 是沿 γ 的法 Jacobi 场，则由 (1.8) 式

$$\mathcal{R}(\gamma',J)\gamma'=-c(\langle\gamma',\gamma'\rangle J-\langle\gamma',J\rangle\gamma')=-cJ,$$

因而 J 所满足的 Jacobi 方程成为 $J''(t)=-cJ(t)$, 即

$$J''(t)+cJ(t)=0.\tag{1.9}$$

沿 γ 取平行的单位正交标架场 $\{e_i(t)\}$, 使得 $e_m(t)=\gamma'(t)$. 令

$$J(t)=\sum_i J^i(t)e_i(t).$$

则 $J^m=0$, 并且 $J^i(t)$ 满足常系数线性齐次常微分方程组

$$J^{i\prime\prime}(t)+cJ^i(t)=0,\quad 1\le i\le m-1.\tag{1.10}$$

此方程的通解为

$$J^i(t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^i}{\sqrt{c}}\sin(\sqrt{c}t)+\mu^i\cos(\sqrt{c}t), & \text{如果}\ c>0,\\ \lambda^i t+\mu^i, & \text{如果}\ c=0,\\ \dfrac{\lambda^i}{\sqrt{-c}}\sinh(\sqrt{-c}t)+\mu^i\cosh(\sqrt{-c}t), & \text{如果}\ c<0,\end{cases}$$

其中 λ^i,μ^i, $1\le i\le m-1$, 是任意常数. 记

$$S_c(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin\sqrt{c}t}{\sqrt{c}}, & c>0,\\ t, & c=0,\\ \dfrac{\sinh\sqrt{-c}t}{\sqrt{-c}}, & c<0.\end{cases}$$

则沿测地线 γ 的法 Jacobi 场的一般表达式是

$$J(t)=S_c'(t)A(t)+S_c(t)B(t),\tag{1.11}$$

其中 $A(t),B(t)$ 是任意两个沿 γ 平行、且与 γ 正交的向量场. 特别地,

$$J(0)=A(0),\quad J'(0)=B(0).$$

现在证明命题 1.1 的逆命题成立.

定理 1.7 设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是完备黎曼流形 (M,g) 中的一条测地线，$J=J(t)$ 是沿 γ 的一个 Jacobi 场．则 J 必是 γ 的某个测地变分的变分向量场．

证明 不妨假设 $a=0$，并记 $p=\gamma(0)$．对于任意固定的 $v,w\in T_pM$，在 M 中取一条光滑曲线 $\sigma=\sigma(u)$, $u\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，使得

$$\sigma(0)=p,\quad \sigma'(0)=v;$$

同时，把切向量 w 和 $\gamma'(0)$ 沿曲线 σ 作平行移动，得到两个沿 σ 平行的向量场 $W(u)$ 和 $T(u)$, $u\in(-\varepsilon,\varepsilon)$．对于任意的 $(t,u)\in[0,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)$，令

$$\Phi(t,u)=\exp_{\sigma(u)}t(T(u)+uW(u)),$$

则对于每一个固定的 $u\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，曲线 $\gamma_u=\Phi(\cdot,u)$ 是测地线，并且 $\gamma_0=\gamma$．所以 Φ 是测地线 γ 的测地变分；其变分曲线和横截曲线的切向量场分别是

$$\tilde{T}=\Phi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),\quad \tilde{U}=\Phi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right).$$

根据命题 1.1, $U=\tilde{U}|_{u=0}$ 是沿 γ 的 Jacobi 场，且有

$$U(0)=\Phi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)\Big|_{t=0,u=0}=\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{u=0}(\Phi(0,u))=\sigma'(0)=v;$$

再由 (1.2) 式，

$$U'(0)=\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{U}|_{t=0,u=0}=\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u}}\tilde{T}|_{t=0,u=0}=\mathrm{D}_{\sigma'(0)}\tilde{T}(0,u).$$

然而，

$$\begin{aligned}\tilde{T}(0,u)=&\Phi_{*(0,u)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=(\exp_{\sigma(u)})_{*0}(T(u)+uW(u))\\=&T(u)+uW(u).\end{aligned}$$

因此

$$U'(0)=\mathrm{D}_{\sigma'(0)}(T(u)+uW(u))=W(0)=w,$$

其中利用了 $T(u)$ 和 $W(u)$ 沿 σ 的平行性．上面的讨论说明，$U=U(t)$ 是 γ 上满足初值条件 $U(0)=v$, $U'(0)=w$ 的 Jocobi 场．

现在，取 $v=J(0)$, $w=J'(0)$．则 U 和 J 都是在 γ 上由 $v,w\in T_pM$ 确定的 Jacobi 场，从而由定理 1.2 的唯一性得知

$$J(t)=U(t),$$

故 $J(t)$ 是曲线 γ 的测地变分 Φ 的变分向量场．证毕．

上面的论证过程实际上给出了定理 1.2 的存在性部分的几何证明．同时，还得到如下的推论：

推论 1.8 设 $\gamma:[0,a]\to M$ 是完备黎曼流形 (M,g) 上的一条测地线，$J=J(t)$ 是 γ 上满足 $J(0)=0$ 的 Jacobi 场．则 J 是测地变分

$$\Phi(t,u)=\exp_{\gamma(0)}t(\gamma'(0)+uJ'(0))\tag{1.12}$$

的变分向量场．

根据变分向量场的定义和 (1.12) 式则得

$$\begin{aligned}J(t)=&\Phi_{*(t,0)}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)=(\exp_{\gamma(0)})_{*t\gamma'(0)}(tJ'(0))\\=&t(\exp_{\gamma(0)})_{*t\gamma'(0)}(J'(0)).\end{aligned}\tag{1.13}$$

(1.13) 式的重要性在于：它把满足条件 $J(0)=0$ 的 Jacobi 场 $J(t)$ 用指数映射的切映射表示了出来．如果把 $T_{\gamma(0)}M$ 和它在 $t\gamma'(0)$ 处的切空间 $T_{t\gamma'(0)}(T_{\gamma(0)}M)$ 等同起来看，则 $tJ'(0)$ 是在 $T_{\gamma(0)}M$ 中沿射线

$$l(t)=t\gamma'(0)$$

定义的切向量场，线性地依赖于参数 t，因而称它为 $T_{\gamma(0)}M$ 中沿射线 $l(t)$ 定义的一个"线性"向量场．在另一方面，$T_{\gamma(0)}M$ 作为欧氏空间是截面曲率恒等于零的常曲率空间，因而射线 $l(t)$ 是 $T_{\gamma(0)}M$ 中的测地线．根据例 1.1，线性向量场 $tJ'(0)$ 是 $T_{\gamma(0)}M$ 中沿测地线 $l(t)$ 的

Jacobi 场. 上面的讨论说明， M 中满足条件 $J(0)=0$ 的 Jacobi 场 $J(t)$ 是 $T_{\gamma(0)}M$ 中的沿射线定义的 "线性" Jacobi 场在指数映射 $\exp_{\gamma(0)}$ 的切映射下的像. 正是 Jacobi 场与指数映射之间的这种密切联系，使得 Jacobi 场成为研究黎曼几何学的一种重要手段.

第三章讲过的 Gauss 引理 (即第三章的定理 4.1) 告诉我们：指数映射保持与径向测地线的正交性不变；同时沿径向测地线的方向是保长的. 而正交于径向测地线的切向量的长度在指数映射下的变化情况可以归结为关于 Jacobi 场的模长的计算. 比如，当 t 充分小时，有如下结论：

定理 1.9 设 $\gamma:[0,a]\to M$ 是黎曼流形 (M,g) 上的一条测地线，

$$p=\gamma(0),\quad v=\gamma'(0).$$

则对于任意的 $w\in T_pM=T_v(T_pM)$, 沿 γ 的 Jacobi 场

$$J(t)=(\exp_p)_{*tv}(tw)$$

的长度满足

$$|J(t)|^2=|w|^2t^2+\frac{1}{3}\langle\mathcal{R}(v,w)v,w\rangle t^4+o(t^4),\tag{1.14}$$

其中，

$$\lim_{t\to 0}\frac{o(t^4)}{t^4}=0.$$

证明 显然 $J(0)=0$, $J'(0)=w$. 令

$$f(t)=\langle J(t),J(t)\rangle=|J(t)|^2,$$

则有

$$f'(t)=2\langle J'(t),J(t)\rangle,\quad f''(t)=2\langle J''(t),J(t)\rangle+2\langle J'(t),J'(t)\rangle.$$

因此

$$f(0)=0,\quad f'(0)=0,\quad f''(0)=2|w|^2.$$

对 $f''(t)$ 继续求导得到

$$\begin{aligned}f'''(t)=&6\langle J''(t),J'(t)\rangle+2\langle J'''(t),J(t)\rangle,\\ f^{(4)}(t)=&8\langle J'''(t),J'(t)\rangle+6\langle J''(t),J''(t)\rangle+2\langle J^{(4)}(t),J(t)\rangle.\end{aligned}$$

利用 Jacobi 方程 $J''(t)=\mathcal{R}(\gamma',J)\gamma'$ 得到

$$f'''(0)=6\langle\mathcal{R}(\gamma',J)\gamma',J'\rangle|_{t=0}=0,\quad f^{(4)}(0)=8\langle J'''(t),J'(t)\rangle|_{t=0},$$

并且

$$\begin{aligned}\langle J'''(t),J'(t)\rangle=&\langle D_{\gamma'}(\mathcal{R}(\gamma',J)\gamma'),J'\rangle\\ =&\gamma'(\langle\mathcal{R}(\gamma',J)\gamma',J'\rangle)-\langle\mathcal{R}(\gamma',J)\gamma',J''\rangle\\ =&\gamma'(\langle\mathcal{R}(\gamma',J')\gamma',J\rangle)-\langle\mathcal{R}(\gamma',J)\gamma',J''\rangle\\ =&\langle D_{\gamma'}(\mathcal{R}(\gamma',J')\gamma'),J\rangle+\langle\mathcal{R}(\gamma',J')\gamma',J'\rangle\\ &-\langle\mathcal{R}(\gamma',J)\gamma',J''\rangle.\end{aligned}$$

所以 $f^{(4)}(0)=8\langle\mathcal{R}(v,w)v,w\rangle$.

由 Taylor 展开式得到

$$\begin{aligned}f(t)=&f(0)+tf'(0)+\frac{t^2}{2!}f''(0)+\frac{t^3}{3!}f'''(0)+\frac{t^4}{4!}f^{(4)}(0)+o(t^4)\\ =&|w|^2t^2+\frac{1}{3}\langle\mathcal{R}(v,w)v,w\rangle t^4+o(t^4),\end{aligned}$$

其中

$$\frac{o(t^4)}{t^4}\to 0,\quad t\to 0.$$

推论 1.10 设 $\gamma:[0,l]\to M$ 是黎曼流形 (M,g) 上的一条正规测地线， $p=\gamma(0)$, $v=\gamma'(0)(|v|=1)$. 如果

$$w\in T_pM,\quad |w|=1,\quad w\perp v,$$

并且 $J(t)=(\exp_p)_{*tv}(tw)$, 则有

$$|J(t)|^2=t^2-\frac{1}{3}K(v,w)t^4+o(t^4),\tag{1.15}$$

其中 $K(v,w)$ 是指 (M,g) 在点 p 沿二维截面 $[v\wedge w]$ 的截面曲率. 进而, 有

$$|J(t)| = t - \frac{1}{6}K(v,w)t^3 + o(t^3), \quad \lim_{t\to 0}\frac{o(t^3)}{t^3} = 0. \tag{1.16}$$

证明 由于 $v\perp w$, $|v| = |w| = 1$, $\langle \mathcal{R}(v,w)v,w\rangle = -K(v,w)$. 此时 (1.14) 式就化为 (1.15) 式. 于是

$$|J(t)| = t\sqrt{1-\frac{1}{3}K(v,w)t^2 + o(t^2)}.$$

再利用 Taylor 展开式

$$\sqrt{1-x} = 1-\frac{1}{2}x + o(x),$$

即可得到 (1.16) 式. 证毕.

§5.2 共轭点

设 (M,g) 是完备的 m 维黎曼流形. 由 Hopf-Rinow 定理, 对于任意的 $p\in M$, 指数映射 $\exp_p$ 在切空间 T_pM 上处处有定义. 因为 $\exp_p$ 在零向量 0 处的切映射 $(\exp_p)_{*0}$ 等同于 $T_pM = T_0(T_pM)$ 上的恒等映射, 因而是非退化的, 所以 $(\exp_p)_*$ 在 $0\subset T_pM$ 的某个邻域内是处处非退化的. 但是在一般情况下, $(\exp_p)_*$ 在 T_pM 中却未必是处处非退化的. 下面, 以 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的单位球面为例来说明这一点.

设 M 是单位球面

$$S^n = \left\{x\in\mathbb{R}^{n+1};\ \sum_{\alpha=1}^{n+1}(x^\alpha)^2 = 1\right\},$$

则 (M,g) 是常曲率空间, 截面曲率为 1. 我们知道, 对于任意的 $p\in S^n$, 从 p 出发的所有测地线都汇集到 p 的对径点 $q = -p$, 并且这些测地线介于 p,q 之间的长度 (即弧长) 均为 π. 因此, 在 T_pM 中以零向量 0 为中心、以 π 为半径的球面 $S^{n-1}(\pi)$ 在指数映射 $\exp_p$ 下的像是单点集 $\{q\}$. 特别地, 对于 T_pM 中落在 $S^{n-1}(\pi)$ 上的任意一条光滑曲线 $\sigma(t)$ 有

$$\exp_p(\sigma(t)) = q,$$

因而,

$$(\exp_p)_{*\sigma(t)}(\sigma'(t)) = 0.$$

这就说明, 指数映射 $\exp_p$ 在 $S^{n-1}(\pi)\subset T_pM$ 上是处处退化的.

受指数映射在单位球面 S^n 上的这种退化现象的启发, 可以引入下面的定义:

定义 2.1 设 (M,g) 是完备的 m 维黎曼流形, $p\in M$, $v\in T_pM$. 如果指数映射 $\exp_p$ 在 v 处是退化的, 即存在非零切向量

$$w\in T_pM = T_v(T_pM),$$

使得

$$(\exp_p)_{*v}(w) = 0,$$

则称 $q = \exp_p(v)\in M$ 是 p 点 (沿测地线 $\gamma(t) = \exp_p(tv)$) 的**共轭点**.

根据上一节的讨论, 对于以 $p\in M$ 为始点的测地线

$$\gamma(t) = \exp_p(tv), \quad t\in[0,b],$$

可以把 γ 上满足条件 $J(0) = 0$ 的 Jacobi 场 $J(t)$ 表示为 T_pM 中沿射线 $t\mapsto tv$ 定义的一个线性向量场在切映射 $(\exp_p)_*$ 下的像. 因此, 可以用 Jacobi 场来刻画 p 点的共轭点.

定理 2.1 设 $\gamma:[0,b]\to M$ 是完备黎曼流形 (M,g) 上的一条测地线, $p = \gamma(0)$, $q = \gamma(b)$. 则 q 是 p 点沿 γ 的共轭点, 当且仅当存在沿 γ 的非零 Jacobi 场 $J = J(t)$, 满足

$$J(0) = J(b) = 0.$$

证明 首先，对于任意的 $t \in [0,b]$ 有

$$\gamma(t) = \exp_p(t\gamma'(0)).$$

设 $J = J(t)$ 是沿 γ 且满足 $J(0) = J(b) = 0$ 的非零 Jacobi 场. 则由定理 1.2, $J'(0) \neq 0$. 根据推论 1.8 以及 (1.13) 式,

$$J(t) = t(\exp_p)_{*t\gamma'(0)}(J'(0)).$$

由于 $J(b) = 0$, 有

$$(\exp_p)_{*b\gamma'(0)}(J'(0)) = 0.$$

所以根据定义 2.1, $q = \gamma(b) = \exp_p(b\gamma'(0))$ 是 p 沿 γ 的共轭点，充分性得证.

为证必要性，设 q 是 p 点沿测地线 γ 的共轭点，则存在非零向量 $w \in T_pM$, 使得

$$(\exp_p)_{*b\gamma'(0)}(w) = 0.$$

对于任意的 $t \in [0,b]$, 令

$$J(t) = t(\exp_p)_{*t\gamma'(0)}(w),$$

则 $J = J(t)$ 是沿 γ 的 Jacobi 场，且有 $J(0) = J(b) = 0$. 证毕.

推论 2.2 设 $p, q \in M$. 如果 $q = \gamma(b)$ 是 $p = \gamma(0)$ 沿测地线 $\gamma(t), t \in [0,b]$ 的共轭点，则 p 点是 q 点沿测地线 $\bar{\gamma}(t) = \gamma(b-t)$ 的共轭点.

定理 2.3 设 $\gamma(t), t \in [0,b]$, 是完备黎曼流形 (M,g) 上的一条测地线， $p = \gamma(0)$, $q = \gamma(b)$. 如果 q 不是 p 点沿 γ 的共轭点，则对于任意的 $v \in T_pM$, $w \in T_qM$, 在 γ 上存在唯一的一个 Jacobi 场 $J = J(t)$ 使得

$$J(0) = v, \quad J(b) = w.$$

证明 由假设得知切映射 $(\exp_p)_{*b\gamma'(0)}$ 非退化，因而是线性同构. 因此，存在唯一的一个 $\tilde{w} \in T_pM = T_{b\gamma'(0)}(T_pM)$, 使得

$$w = (\exp_p)_{*b\gamma'(0)}(\tilde{w}).$$

对于任意的 $t \in [0,b]$, 令

$$J_1(t) = \frac{t}{b}(\exp_p)_{*t\gamma'(0)}(\tilde{w}),$$

则 J_1 是沿 γ 的 Jacobi 场，满足条件

$$J_1(0) = 0, \quad J_1(b) = (\exp_p)_{*b\gamma'(0)}(\tilde{w}) = w.$$

另一方面，根据推论 2.2, p 也不是 q 点的共轭点. 因此，又可以得到沿 γ 的 Jacobi 场 J_2, 满足 $J_2(0) = v$, $J_2(b) = 0$. 令

$$J(t) = J_1(t) + J_2(t), \quad \forall t \in [0,b],$$

则 J 是沿 γ 的 Jacobi 场，并且满足 $J(0) = v$, $J(b) = w$.

现在证明这样的 Jacobi 场的唯一性. 假定 $\bar{J} \neq J$ 是另一个满足定理要求的 Jacobi 场，则 $\tilde{J} = \bar{J} - J$ 是 γ 上满足

$$\tilde{J}(0) = \tilde{J}(b) = 0$$

的非零 Jacobi 场. 这说明 $p = \gamma(0)$ 和 $q = \gamma(b)$ 沿 γ 互为共轭点，与定理的假设矛盾. 因而唯一性成立. 证毕.

例 2.1 常曲率空间中的共轭点.

设 (M,g) 是完备的常曲率空间，其截面曲率为常数 c; $\gamma = \gamma(t)$ $(t \in [0,+\infty))$ 是 M 上的一条正规测地线，即有 $\langle\gamma',\gamma'\rangle = 1$. 由例 1.1, 在 γ 上满足 $J(0) = 0$ 且与 γ 正交的 Jacobi 场 J 具有表达式

$$J(t) = S_c(t) \cdot B(t), \tag{2.1}$$

其中 $B(t)$ 是沿 γ、且与 γ 正交的任意一个平行向量场，易知

$$J \neq 0 \Longleftrightarrow B(0) \neq 0.$$

当 $c \leq 0$ 时，函数 S_c 只有一个零点 $t=0$；当 $c>0$ 时，S_c 的零点为

$$t=\frac{k\pi}{\sqrt{c}},\quad k \text{ 为非负整数}.$$

由此可见，当 $c \leq 0$ 时，(M,g) 上的每一个点都没有共轭点；而当 $c>0$ 时，点 $p=\gamma(0)$ 沿 γ 的共轭点为

$$q_k=\gamma\left(\frac{k\pi}{\sqrt{c}}\right),\quad k \text{ 为自然数}. \tag{2.2}$$

特别地，若取 M 为 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中半径是 $1/\sqrt{c}$ 的标准球面 $S^m(1/\sqrt{c})$，则上述共轭点中的 q_{2k-1} 都是 p 的对径点，而 q_{2k} 都与 p 点重合.

对于测地线 $\gamma:[0,b]\to M$，记

$$\mathscr{J}_0^b(\gamma)=\{J;\ J\text{是沿}\gamma\text{的 Jacobi 场，并且 } J(0)=J(b)=0\}. \tag{2.3}$$

则 $\mathscr{J}_0^b(\gamma)$ 显然是一个向量空间. 根据定理 2.1 的证明，不难看出 $\mathscr{J}_0^b(\gamma)$ 与映射 $\exp_p$ 在 $b\gamma'(0)$ 处的切映射的核 $\ker((\exp_p)_{*b\gamma'(0)})$ 同构 (参看本章习题第 7 题)，且有 $\mathscr{J}_0^b(\gamma)\subset\mathscr{J}^\perp(\gamma)$.

于是，可以引入如下的概念：

定义 2.2 设 $\gamma(t)$, $t\in[0,b]$ 是黎曼流形 (M,g) 上的一条测地线，$p=\gamma(0)$，$q=\gamma(b)$. 非负整数 $\dim\mathscr{J}_0^b(\gamma)$ 称为点 q 关于 p 点 (沿测地线 γ) 的**共轭重数**.

于是，点 q 是 p 点沿测地线 γ 的共轭点当且仅当 q 关于 p 的共轭重数大于零.

关于共轭重数，还有如下的一般结果：

定理 2.4 设 (M,g) 是完备的 m 维黎曼流形，则对于 M 上的任意一条测地线 $\gamma:[0,b]\to M$，都有

$$\dim\mathscr{J}_0^b(\gamma)\leq m-1.$$

证明 根据推论 1.3 沿测地线 γ 在 $t=0$ 处为零的 Jacobi 场构成一个 m 维向量空间. 再由推论 1.6 和定理 1.5 得知

$$\begin{aligned}\mathscr{J}_0^b(\gamma)&\subset\{J\in\mathscr{J}^\perp(\gamma);J(0)=0\}\\&=\{J\in\mathscr{J}(\gamma);J(0)=0,\ J'(0)\perp\gamma'(0)\};\end{aligned}\tag{2.4}$$

故

$$\dim\mathscr{J}_0^b(\gamma)\leq\dim\{J\in\mathscr{J}(\gamma);J(0)=0,\ J'(0)\perp\gamma'(0)\}\leq m-1.$$

证毕.

另外，根据例 1.1，在一个具有常截面曲率 $c>0$ 的 m 维完备黎曼流形上，如果 q 点是 p 点沿测地线 γ 的第一共轭点，则相应的共轭重数一定是 $m-1$. 事实上，由 (2.1) 式可知在 p,q 两点取零值的 Jacobi 场 J 与切向量 $B(0)\in T_pM$ 成一一对应，而当 J 限定为法 Jacobi 场时，$B(0)$ 可以取遍 T_pM 中所有与 $\gamma'(0)$ 正交的切向量. 由此得知

$$\dim\mathscr{J}_0^{t_1}(\gamma)=m-1,$$

其中 $t_1=\pi/\sqrt{c}$.

§5.3 Cartan-Hadamard 定理

从上一节知道，在一个具有非正截面曲率的常曲率空间中，任何一点沿着从该点出发的任意一条测地线都没有共轭点. 这个事实可以推广到任意的具有非正截面曲率的完备黎曼流形，并用于证明 Cartan-Hadamard 定理.

为了叙述的方便，用 K_M 表示黎曼流形 (M,g) 的截面曲率. 如果在 M 的任意一点、沿着任意一个二维截面的截面曲率都是非正的，就说 (M,g) 满足条件 $K_M\leq 0$.

引理 3.1 设 (M,g) 是完备的黎曼流形. 如果 $K_M \le 0$, 则对于任意的 $p\in M$, 以及从 p 点出发的任意一条测地线 γ, p 都没有沿 γ 的共轭点. 特别地, 指数映射 $\exp_p: T_pM\to M$ 是一个局部微分同胚.

证明 $\forall p\in M$, 设 $\gamma(t)$, $t\in[0,+\infty)$, 是 M 上从 p 点出发的一条正规测地线. 对于沿 γ 的任意一个法 Jacobi 场 J, 令

$$f(t)=|J(t)|^2,\quad \forall t\in[0,+\infty).$$

则有

$$\begin{aligned}
f'(t)&=2\langle J'(t),J(t)\rangle,\\
f''(t)&=2(\langle J'(t),J'(t)\rangle+\langle J''(t),J(t)\rangle)\\
&=2(|J'(t)|^2+\langle R(\gamma'(t),J(t))\gamma'(t),J(t)\rangle)\\
&=2(|J'(t)|^2-K(\gamma'(t),J(t))|\gamma'(t)\wedge J(t)|^2)\ge 0,
\end{aligned}$$

其中 $K(\gamma'(t),J(t))$ 是沿着由 $\gamma'(t)$ 和 $J(t)$ 确定的二维截面的截面曲率, 并且

$$|\gamma'(t)\wedge J(t)|^2=\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle\langle J(t),J(t)\rangle-\langle\gamma'(t),J(t)\rangle^2.$$

如果 p 点沿 γ 有共轭点 $q=\gamma(t_0)$, $t_0>0$. 则存在沿 γ 的非零 Jacobi 场 $J(t)$, 使得

$$J(0)=J(t_0)=0,$$

于是有 $f(t_0)=f(0)=0$. 由于 $f''(t)\ge 0$, 函数 $f'(t)$ 单调递增, 从而

$$f'(t)\ge f'(0)=0.$$

所以, 函数 $f(t)$ 也是单调递增的. 因此, 当 $0\le t\le t_0$ 时,

$$0=f(t_0)\ge f(t)\ge f(0)=0.$$

即 $f|_{[0,t_0]}=0$. 于是 $J|_{[0,t_0]}=0$. 特别地, $J'(0)=0$. 由定理 1.2, J 是零 Jacobi 场, 与假设矛盾. 所以, p 点没有共轭点.

由于 (M,g) 是完备的, 指数映射 $\exp_p$ 在整个切空间 T_pM 上有定义. 现在 p 点无共轭点, 这意味着映射 $\exp_p$ 在 T_pM 上无退化点, 因而 $\exp_p$ 是浸入. 由于

$$\dim T_pM=\dim M,$$

故对于任意的 $v\in T_pM$, 都有 v 在 T_pM 中的一个开邻域 U, 使得

$$\exp_p: U\to\exp_p(U)\subset M$$

是微分同胚; 换句话说, $\exp_p: T_pM\to M$ 是局部微分同胚. 证毕.

定义 3.1 设 M,N 是两个光滑流形, $f: M\to N$ 是光滑映射. 如果对于每一点 $\bar q\in N$, 都有点 $\bar q$ 的一个开邻域 $\hat U$ 以及 M 的子集 U_α, $\alpha\in I$, 使得

$$f^{-1}(\hat U)=\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha,$$

并满足下列条件:

(1) 对于任意的 $\alpha\in I$, U_α 是 M 中的非空开集;

(2) 对于任意的不同指标 $\alpha,\beta\in I$,

$$U_\alpha\cap U_\beta=\emptyset;$$

(3) 对于任意的 $\alpha\in I$, $f|_{U_\alpha}: U_\alpha\to\hat U$ 是微分同胚,

则称 $f: M\to N$ 是**覆叠映射**, 且称 M 是 N 的**覆叠流形**.

为了方便起见, 定义 3.1 中的开集 $\hat U$ 称为点 $\bar q\in N$(关于覆叠映射 f) 的**容许邻域**. 另外, 由定义得知覆叠映射是满射.

引理 3.2 设 (M,g) 和 (N,h) 是两个黎曼流形, $f: M\to N$ 是一个局部微分同胚. 如果 (M,g) 是完备的, 并且对于任意的 $p\in M$ 以及任意的 $v\in T_pM$, 都有

$$|f_{*p}(v)|_h\ge|v|_g,$$

则 f 是覆叠映射；此时，(N,h) 也是完备的.

证明　由于 f 是局部微分同胚，故 $\bar{g}=f^*h$ 是 M 上的一个黎曼度量，从而 $f:(M,\bar{g})\to(N,h)$ 是局部等距. 另一方面，由假设

$$|v|_{\bar{g}}=|f_{*p}(v)|_h\geq|v|_g,\quad \forall p\in M,\quad \forall v\in T_pM, \tag{3.1}$$

以及 (M,g) 的完备性，不难看出 $(M,\bar{g})$ 也是完备的. 事实上，由 (3.1) 式，

$$d^{\bar{g}}(x,y)\geq d^g(x,y),\quad \forall x,y\in M.$$

因此，如果 B 是 $(M,\bar{g})$ 中任意一个有界闭集，则 B 也是 (M,g) 中的有界闭集. 根据 Hopf-Rinow 定理，B 是 M 的紧致子集. 这就证明了 $(M,\bar{g})$ 的完备性. 以下用 M 表示黎曼流形 $(M,\bar{g})$，同时设 f 是局部等距.

为了证明映射 $f:M\to N$ 是覆叠映射，首先需要证明 f 是一个满射. 由于 f 是局部等距，其像集 $f(M)$ 必是 N 的一个开子集；并且对于 $f(M)$ 中任意一条测地线 $\tilde{\gamma}:[0,a]\to f(M)$，必有 $(M,\bar{g})$ 中的测地线 $\gamma(t)$，$t\in[0,a]$，使得 (参看本章习题第 9 题)

$$\tilde{\gamma}=f\circ\gamma.$$

根据 M 的完备性，γ 的定义域可以延拓到 $[0,+\infty)$，因而 $\tilde{\gamma}$ 也可以延拓到 $[0,+\infty)$. 这就说明 $(f(M),h)$ 是完备黎曼流形. 根据第三章的定理 6.7，$(f(M),h)$ 作为黎曼流形是不可延拓的. 所以

$$f(M)=N,$$

即 f 是满射. 特别地，(N,h) 也是完备的黎曼流形.

现在来证明映射 $f:M\to N$ 满足定义 3.1 的条件.

$\forall\bar{q}\in N$，取充分小的正数 δ，使得 $\bar{U}=\mathscr{B}_{\bar{q}}(\delta)$ 是 N 中以 $\bar{q}$ 为中心、以 δ 为半径的法坐标球邻域. 由于 f 是满射，可设

$$f^{-1}(\bar{q})=\{q_\alpha\}_{\alpha\in I}.$$

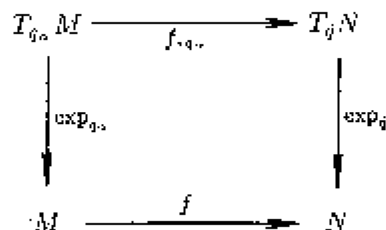


图　2

对于每一个 $\alpha\in I$，令 $U_\alpha=\mathscr{B}_{q_\alpha}(\delta)$ 是 M 中以 q_α 为中心、以 δ 为半径的测地球. 下面将依次证明：

(1) $f|_{U_\alpha}:U_\alpha\to\bar{U}$ 是微分同胚；

(2) $f^{-1}(\bar{U})=\bigcup\limits_{\alpha\in I}U_\alpha$；

(3) U_α 互不相交.

首先断言：图 2 中的图表是可交换的，即有

$$\exp_{\bar{q}}\circ f_{*q_\alpha}=f\circ\exp_{q_\alpha}:T_{q_\alpha}M\to N.$$

事实上，对于任意的 $v\in T_{q_\alpha}M$，$\gamma(t)=\exp_{q_\alpha}(tv)$ 是 M 中从 q_α 点出发、并且与 v 相切的测地线. 因为 f 是局部等距，所以

$$f\circ\gamma(t)=f\circ\exp_{q_\alpha}(tv)$$

是 N 中的测地线. 另一方面，

$$\tilde{\gamma}(t)=\exp_{\bar{q}}(tf_{*q_\alpha}(v))$$

也是 N 中的一条测地线，并且

$$\tilde{\gamma}(0)=\bar{q}=f(q_\alpha)=f\circ\gamma(0),\quad \tilde{\gamma}'(0)=f_{*q_\alpha}(v)=(f\circ\gamma)'(0).$$

从而由测地线的唯一性得到

$$f\circ\exp_{q_\alpha}(tv)=\exp_{\bar{q}}(tf_{*q_\alpha}(v)).$$

令 $t=1$ 便得 $f\circ\exp_{q_\alpha}(v)=\exp_{\bar q}\circ f_{*q_\alpha}(v)$. 断言得证.

为证明 (1), 用 $B_{\bar q}(\delta)$ 和 $B_{q_\alpha}(\delta)$ 分别表示 $T_{\bar q}N$ 和 $T_{q_\alpha}M$ 中以原点为中心、以 δ 为半径的开球; 再把上面得到的交换图限制在 $B_{q_\alpha}(\delta)$ 上, 则得

$$\exp_{\bar q}\circ f_{*q_\alpha}=f\circ\exp_{q_\alpha}:B_{q_\alpha}(\delta)\to\tilde U.$$

显然,

$$\exp_{\bar q}\circ f_{*q_\alpha}:B_{q_\alpha}(\delta)\to\tilde U$$

是微分同胚. 因此, $\exp_{q_\alpha}:B_{q_\alpha}(\delta)\to U_\alpha$ 及其切映射 $(\exp_{q_\alpha})_*$ 都是单射. 所以映射 $\exp_{q_\alpha}$ 是微分同胚. 由此便知, 测地球 $\mathscr{B}_{q_\alpha}(\delta)$ 落在点 q_α 的法坐标域内. 于是

$$f|_{U_\alpha}:U_\alpha\to\tilde U$$

也是微分同胚, 故而是等距.

再证明 (2). 因为

$$f\left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right)=\bigcup_\alpha f(U_\alpha)=\tilde U,$$

所以

$$\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha\subset f^{-1}(\tilde U).$$

另一方面, 对于任意的 $p\in f^{-1}(\tilde U)$, 令 $\bar p=f(p)\in\tilde U$, $l=d(\bar p,\bar q)<\delta$. 设 $\tilde U$ 中从 $\bar p$ 到 $\bar q$ 的最短正规测地线为 $\bar\gamma(t),t\in[0,l]$. 由于 f 是局部微分同胚, 可取 $v\in T_pM$, 使得 $f_{*p}(v)=\bar\gamma'(0)$. 把 M 中从 p 点出发、并且与 v 相切的测地线记为 $\gamma(t)$, $t\in[0,+\infty)$. 利用 f 是局部等距的事实, 得知 $f\circ\gamma$ 是 N 中从 $\bar p$ 出发、而且与 $\bar\gamma'(0)$ 相切的测地线, 从而由测地线的唯一性, $\bar\gamma=f\circ\gamma|_{[0,l]}$. 由此可知,

$$f(\gamma(l))=\bar\gamma(l)=\bar q,$$

从而 $\gamma(l)\in f^{-1}(\bar q)$. 所以, 存在 $\alpha\in I$, 使得 $\gamma(l)=q_\alpha$. 注意到

$$d(q_\alpha,p)\le L(\gamma|_{[0,l]})=L(\bar\gamma)=l=d(\bar q,\bar p)<\delta,$$

故有 $p\in U_\alpha\subset\bigcup\limits_\alpha U_\alpha$. 由 p 点的任意性得到

$$f^{-1}(\tilde U)\subset\bigcup_\alpha U_\alpha.$$

最后证明 (3). 设 $\alpha,\beta\in I$, $\alpha\ne\beta$. 假定 γ 是在 M 中连接 q_α 和 q_β 的一条最短测地线. 由于

$$f(q_\alpha)=f(q_\beta)=\bar q,$$

$f\circ\gamma$ 是 N 中以 $\bar q$ 为基点的一条测地线环路. 因为 $\mathscr{B}_{\bar q}(\delta)$ 是 $\bar q$ 点的一个法坐标球邻域, 所以对于其中的任意一点 $\bar p$, 在 $\mathscr{B}_{\bar q}(\delta)$ 中连接 $\bar p,\bar q$ 的测地线只有一条. 因此 $f\circ\gamma$ 不能全部落在 $\mathscr{B}_{\bar q}(\delta)$ 之中. 所以

$$d(q_\alpha,q_\beta)=L(\gamma)=L(f\circ\gamma)>2\delta.$$

这就说明 $U_\alpha\cap U_\beta=\emptyset$. 引理证毕.

引理 3.2 是一个十分有用的命题. 其中 (M,g) 的完备性是必要的条件, 它不能用 (N,h) 的完备性来代替.

有了上面的准备工作, 现在可以证明下面的 Cartan-Hadamard 定理.

定理 3.3 (Cartan-Hadamard) 设 (M,g) 是完备的 m 维黎曼流形, 如果其截面曲率 $K_M\le 0$, 则对于每一点 $p\in M$, 指数映射

$$\exp_p:T_pM\to M$$

是覆叠映射; 特别地, 如果 M 是单连通的, 则

$$\exp_p:\mathbb{R}^m=T_pM\to M$$

是微分同胚.

证明 由引理 3.1, $\exp_p : T_pM \to M$ 是局部微分同胚. 记 $\bar{g} = (\exp_p)^*(g)$, 则 $\bar{g}$ 是 T_pM 上的黎曼度量, 并且

$$\exp_p : (T_pM, \bar{g}) \to M$$

是局部等距. 注意到对于任意的 $v \in T_pM$,

$$\gamma(t) = \exp_p(tv)$$

是 M 中的测地线, 所以 $\gamma(t) = tv$ 是 $(T_pM, \bar{g})$ 中的测地线, 并且可以无限地延伸. 这意味着, $(T_pM, \bar{g})$ 作为黎曼流形是完备的. 再由引理 3.2,

$$\exp_p : T_pM \to M$$

是覆叠映射. 又因为 $\mathbb{R}^m = T_pM$ 是单连通的, 所以

$$\exp_p : T_pM \to M$$

是通用覆叠映射.

特别地, 如果 M 是单连通的, 则 $\exp_p : \mathbb{R}^m = T_pM \to M$ 必是微分同胚. 证毕.

§5.4 Cartan 等距定理

设 $f : M \to \tilde{M}$ 是 m 维黎曼流形之间的等距, 则对于任意的 $p \in M$, 以及任意的 $v, w \in T_pM$, 当 $\|v \wedge w\|^2 \neq 0$ 时, 有关系式

$$K_M(v,w) = K_{\tilde{M}}(f_*(v), f_*(w)).$$

现在考虑反问题: 设 M 和 $\tilde{M}$ 是两个 m 维黎曼流形, 如果存在微分同胚 $f : M \to \tilde{M}$, 使得对于任意的 $p \in M$ 以及 $v, w \in T_pM$, 当 $\|v \wedge w\|^2 \neq 0$ 时, 总是成立

$$K_M(v,w) = K_{\tilde{M}}(f_*(v), f_*(w)),$$

那么, 映射 f 是否是等距呢? 在回答这个问题之前, 先考虑一个例子.

例 4.1 设有 $\mathbb{R}^3$ 中两张曲面:

$$S : \vec{r} = \{au, bv, au^2 + bv^2\}, \quad \overline{S} : \vec{r} = \{\bar{a}u, \bar{b}v, \bar{a}u^2 + \bar{b}v^2\},$$

其中 $ab = \bar{a}\bar{b} \neq 0$. 设 $f : S \to \overline{S}$ 是这两张曲面上具有相同参数值 (u,v) 的点之间的对应, 则 f 显然是微分同胚, 并且 S 与 $\overline{S}$ 在对应点有相同的 Gauss 曲率 (即截面曲率). 但是, 当 $(a^2, b^2) \neq (\bar{a}^2, \bar{b}^2)$, 且 $(a^2, b^2) \neq (\bar{b}^2, \bar{a}^2)$ 时, 在曲面 S 与 $\overline{S}$ 之间根本就不存在光滑等距 (参看参考文献 [2, 第 149 页]). 所以, 映射 f 不可能是等距.

例 4.1 说明, 上面提出的反问题的答案是否定的. 但是, 如果在更为精细的构造下假设对应的截面曲率相等, 则可以断言, 相应的微分同胚是等距. 这就是本节所要介绍的 Cartan 等距定理以及它在大范围的推广 — Cartan-Ambrose-Hicks 定理. Cartan 定理是 Jacobi 场理论的一个应用.

设 $M, \tilde{M}$ 是两个 m 维黎曼流形, $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$. 取定一个等距的线性同构 $\sigma : T_pM \to T_{\tilde{p}}\tilde{M}$. 假定 $U \subset M$ 是 p 点的一个法坐标邻域, 使得 $\exp_{\tilde{p}}$ 在 $\sigma \circ (\exp_p)^{-1}(U)$ 上有定义. 对于任意的 $q \in U$, 令 (参看图 3)

$$f(q) = \exp_{\tilde{p}} \circ \sigma \circ (\exp_p)^{-1}(q). \tag{4.1}$$

另一方面, 对于在 U 内从 p 点出发的任意一条正规测地线 $\gamma : [0, l] \to M$, 用

$$P_t : T_pM \to T_{\gamma(t)}M$$

表示沿 γ 从 $t = 0$ 到 t 的平行移动. 对应地, 我们假定 $\tilde{\gamma}$ 是在 $\tilde{M}$ 中满足条件

$$\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}, \quad \tilde{\gamma}'(0) = \sigma(\gamma'(0))$$

的测地线, 则 $|\tilde{\gamma}'(0)| = 1$, 因而 $\tilde{\gamma}$ 也是正规测地线. 用

$$\tilde{P}_t : T_{\tilde{p}}\tilde{M} \to T_{\tilde{\gamma}(t)}\tilde{M}$$

表示沿 $\bar\gamma$ 从 $t=0$ 到 t 的平行移动. 对于任意的 $t\in[0,l]$, 定义映射

$$\varphi_t: T_{\gamma(t)}M \to T_{\bar\gamma(t)}\bar M,$$

使得

$$\varphi_t(v)=\bar P_t\circ\sigma\circ P_t^{-1}(v),\quad \forall v\in T_{\gamma(t)}M \tag{4.2}$$

(参看图 4), 则 φ_t 是等距线性同构.

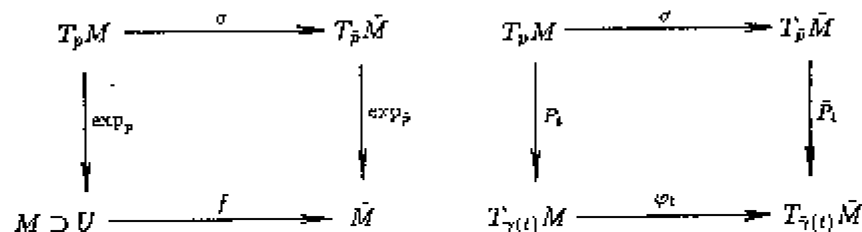


图 3　　　　图 4

定理 4.1 (Cartan 等距定理) 假设 R 与 $\bar R$ 分别是 m 维黎曼流形 M 与 $\bar M$ 的黎曼曲率张量, $p\in M$, $\bar p\in\bar M$; $\sigma: T_pM\to T_{\bar p}\bar M$ 是一个等距的线性同构, U 是 p 点处的一个法坐标邻域使得 $\exp_{\bar p}$ 在 $\sigma((\exp_p)^{-1}(U))$ 上处处有定义. 如果对于 U 中从 p 点出发的任意一条正规测地线

$$\gamma:[0,l]\to M,$$

由 (4.2) 式确定的映射 $\varphi_t: T_{\gamma(t)}M\to T_{\bar\gamma(t)}\bar M$ 满足条件

$$\begin{aligned}R(u,v,w,z)&=(\varphi_t^*\bar R)(u,v,w,z)\\&=\bar R(\varphi_t(u),\varphi_t(v),\varphi_t(w),\varphi_t(z)),\quad \forall u,v,w,z\in T_{\gamma(t)}M,\end{aligned} \tag{4.3}$$

则由 (4.1) 式定义的映射

$$f:U\to f(U)\subset\bar M$$

是局部等距, 并且 $f_{*p}=\sigma$.

证明 首先指出, 由定义式 (4.1) 得到

$$f_{*p}=(\exp_{\bar p})_{*0}\circ\sigma\circ(\exp_p)_{*0}^{-1}=\sigma.$$

因此, 只需要证明 f 是局部等距; 换句话说, 只要证明: 对于任意的 $q\in U$, $f_{*q}:T_qM\to T_{f(q)}\bar M$ 保持切向量的长度不变. 为此, 设测地线 $\gamma:[0,l]\to M$ 是 U 中连接 p,q 两点的最短正规测地线, $p=\gamma(0)$, $q=\gamma(l)$. 由于 U 是 p 点的法坐标邻域, 对于任意的 $v\in T_qM$, 必有沿 γ 的 Jacobi 场 $J=J(t)$, 使得

$$J(0)=0,\quad J(l)=v.$$

在 T_pM 中选定一个单位正交基 $\{e_i\}$, 使得 $e_m=\gamma'(0)$. 用 $e_i(t)$ 表示由 e_i 沿 γ 平行移动产生的向量场, 即 $e_i(t)=P_t(e_i)$. 于是 Jacobi 场 $J(t)$ 可以表示为

$$J(t)=\sum_{i=1}^m J^i(t)e_i(t),\quad J^i(0)=0,\quad 1\le i\le m. \tag{4.4}$$

这样, J 所满足的 Jacobi 方程是

$$J^{i\prime\prime}(t)-\sum_j J^j(t)R(e_m(t),e_j(t),e_m(t),e_i(t))=0,\quad 1\le i\le m. \tag{4.5}$$

相应地, 在 $\bar M$ 中考虑由 γ 和 σ 确定的测地线

$$\bar\gamma:[0,l]\to\bar M,$$

它满足条件 $\bar\gamma(0)=\bar p$, $\bar\gamma'(0)=\sigma(\gamma'(0))$. 由于 σ 是等距的线性同构, $\bar\gamma$ 是正规测地线. 定义

$$\bar e_i(t)=\varphi_t(e_i(t)),\quad 1\le i\le m.$$

根据 φ_t 的定义，$\tilde{e}_i(t)$ 构成沿 $\tilde{\gamma}$ 平行的单位正交标架场，并且

$$\tilde{e}_m(0)=\tilde{\gamma}'(0).$$

对于任意的 $t\in[0,l]$，令

$$\tilde{J}(t)=J^i(t)\tilde{e}_i(t)=\varphi_t(J(t)),$$

则 $\tilde{J}=\tilde{J}(t)$ 是沿 $\tilde{\gamma}$ 的向量场. 根据定理的假设 (4.3),

$$R(e_m(t),e_j(t),e_m(t),e_i(t))=\tilde{R}(\tilde{e}_m(t),\tilde{e}_j(t),\tilde{e}_m(t),\tilde{e}_i(t)),$$

所以方程组 (4.5) 可以改写为

$$J^{i''}(t)-\sum_j J^j(t)\tilde{R}(\tilde{e}_m(t),\tilde{e}_j(t),\tilde{e}_m(t),\tilde{e}_i(t))=0,\quad 1\le i\le m. \qquad (4.5')$$

这意味着向量场 $\tilde{J}$ 是沿测地线 $\tilde{\gamma}$ 的 Jacobi 场，并且满足

$$\tilde{J}(0)=0,\quad |\tilde{J}(t)|^2=\sum_i (J^i(t))^2=|J(t)|^2;$$

另外还有

$$\tilde{J}'(0)=J^{i'}(0)\tilde{e}_i(0)=J^{i'}(0)\sigma(e_i)=\sigma(J'(0)).$$

记 $w=J'(0)$, 则由推论 1.8 和 (1.13) 式得知

$$J(t)=(\exp_p)_{*t\gamma'(0)}(tw),\quad \tilde{J}(t)=(\exp_{\tilde{p}})_{*t\tilde{\gamma}'(0)}(t\sigma(w)).$$

于是，$v=J(l)=(\exp_p)_{*l\gamma'(0)}(lw)$, 并且

$$\begin{aligned} f_{*q}(v)&=(\exp_{\tilde{p}})_{*l\tilde{\gamma}'(0)}\circ\sigma\circ((\exp_p)_{*l\gamma'(0)})^{-1}(v)\\ &=(\exp_{\tilde{p}})_{*l\tilde{\gamma}'(0)}(l\sigma(w))=\tilde{J}(l). \end{aligned} \qquad (4.6)$$

故

$$|f_{*q}(v)|^2=|\tilde{J}(l)|^2=|J(l)|^2=|v|^2.$$

证毕.

分析上面的证明过程可以看出，实际上已经证明了如下的推论:

推论 4.2 假设 $p\in M,\tilde{p}\in\tilde{M}$, 并且对于等距的线性同构

$$\sigma:T_pM\to T_{\tilde{p}}\tilde{M},$$

以及从 p 点出发的任意一条正规测地线 $\gamma(t)$, 由 (4.1) 和 (4.2) 两式定义映射 f 和 φ_t.

(1) 如果 f 是局部等距，则有

$$f_{*\gamma(t)}=\varphi_t:T_{\gamma(t)}M\to T_{f\circ\gamma(t)}\tilde{M};$$

(2) 如果指数映射

$$\exp_p:T_pM\to M \text{ 和 } \exp_{\tilde{p}}:T_{\tilde{p}}\tilde{M}\to\tilde{M}$$

都是微分同胚，则在定理 4.1 的条件 (4.3) 下，映射

$$f=\exp_{\tilde{p}}\circ\sigma\circ(\exp_p)^{-1}:M\to\tilde{M}$$

是等距.

容易看出，对于具有相同截面曲率 c 的常曲率空间，定理 4.1 的条件 (4.3) 恒成立. 因此得到如下的结论:

推论 4.3 设 $M,\tilde{M}$ 是两个具有相同截面曲率 c 的 m 维常曲率空间. 则对于任意的 $p\in M,\tilde{p}\in\tilde{M}$, 以及 T_pM 和 $T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ 的任意两个单位正交基 $\{e_i\}$ 和 $\{\tilde{e}_i\}$, 必存在 $p,\tilde{p}$ 的开邻域 $U,\tilde{U}$, 以及等距 $f:U\to\tilde{U}$, 使得

$$f(p)=\tilde{p},\quad f_{*p}(e_i)=\tilde{e}_i,\quad 1\le i\le m.$$

推论 4.4 设 M 是具有截面曲率 c 的 m 维常曲率空间. 则对于任意的 $p,q\in M$, 以及 T_pM 和 T_qM 的任意两个单位正交基 $\{e_i\}$ 和 $\{\tilde{e}_i\}$, 必存在 p,q 的开邻域 U,V, 以及等距 $f:U\to V$, 使得

$$f(p)=q,\quad f_{*p}(e_i)=\tilde{e}_i,\quad 1\le i\le m.$$

在指数映射 $\exp_p: T_pM \to M$ 不是微分同胚的情况下，要像定理 4.1 那样构造出从 M 到 $\tilde{M}$ 的映射是不可能的．因此，在大范围的情形，采用如下的做法：

设 $M, \tilde{M}$ 是两个完备的 m 维黎曼流形，$p \in M$，$\gamma(t)$，$t \in [0,l]$ 是 M 中任意一条分段光滑的正规测地线，且有 $\gamma(0) = p$．取区间 $[0,l]$ 的一个划分 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = l$，使得每一段曲线 $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ 都是最短测地线 $(0 \le i \le r-1)$．记 $\gamma_i = \gamma|_{[0,t_i]}$，并用 P_t 表示沿 γ 从 $t=0$ 到 t 的平行移动．

假定 $\sigma: T_pM \to T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ 是一个等距的线性同构，则在 $\tilde{M}$ 上可以逐步构造曲线 $\tilde{\gamma}_i$ 如下：首先令

$$\tilde{\gamma}_1(t) = \exp_{\tilde{p}}(t\sigma(\gamma'(0))), \quad 0 \le t \le t_1.$$

则 $\tilde{\gamma}_2: [0,t_2] \to \tilde{M}$ 的定义是

$$\tilde{\gamma}_2(t) = \begin{cases} \tilde{\gamma}_1(t), & 0 \le t \le t_1, \\ \exp_{\tilde{\gamma}_1(t_1)}((t-t_1)\tilde{P}_{t_1} \circ \sigma \circ P_{t_1}^{-1}(\gamma'(t_1^+))), & t_1 \le t \le t_2. \end{cases}$$

其中 $\tilde{P}_{t_1}$ 是沿 $\tilde{\gamma}_1$ 从 $t=0$ 到 t_1 的平行移动．

一般地，若 $\tilde{\gamma}_{i-1}: [0,t_{i-1}] \to \tilde{M}$ 已经造出，则定义

$$\tilde{\gamma}_i: [0,t_i] \to \tilde{M}$$

为

$$\tilde{\gamma}_i(t) = \begin{cases} \tilde{\gamma}_{i-1}(t), & 0 \le t \le t_{i-1}, \\ \exp_{\tilde{\gamma}_{i-1}(t_{i-1})}((t-t_{i-1})\tilde{P}_{t_{i-1}} \circ \sigma \\ \qquad \circ P_{t_{i-1}}^{-1}(\gamma'(t_{i-1}^+))), & t_{i-1} \le t \le t_i. \end{cases}$$

其中 $\tilde{P}_{t_{i-1}}$ 是沿 $\tilde{\gamma}_{i-1}$ 从 $t=0$ 到 t_{i-1} 的平行移动．最后令

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_r: [0,l] \to \tilde{M}.$$

则 $\tilde{\gamma}$ 是在 $\tilde{M}$ 上的一条分段光滑的正规测地线，并且由测地线 γ 唯一确定．

现在叙述大范围的 Cartan 等距定理．对于任意的 $p, q \in M$，用 $\mathscr{C}_p^q(M)$ 表示在 M 中从 p 到 q 的所有分段光滑的正规测地线的集合．

定理 4.5 (Cartan-Ambrose-Hicks) 设 $M, \tilde{M}$ 是完备的 m 维黎曼流形，且 M 是单连通流形，$p \in M$，$\tilde{p} \in \tilde{M}$．假定 $R, \tilde{R}$ 分别是 $M, \tilde{M}$ 的黎曼曲率张量，

$$\sigma: T_pM \to T_{\tilde{p}}(\tilde{M})$$

是等距的线性同构．如果对于 M 中任意的以 p 为始点且分段光滑的正规测地线 $\gamma: [0,l] \to M$，以及任意的 $t \in [0,l]$，都有

$$R = \varphi_t^* \tilde{R},$$

其中映射 φ_t 的意义同 (4.2) 式，则对于任意的 $q \in M$，以及任意的 $\gamma \in \mathscr{C}_p^q(M)$，在 $\tilde{M}$ 上与 γ 相对应的测地线 $\tilde{\gamma}$ 的终点 $\tilde{\gamma}(l)$ 与 γ 的选取无关．此外，由

$$q = \gamma(l) \mapsto f(q) = \tilde{\gamma}(l)$$

确定的映射 $f: M \to \tilde{M}$ 是局部等距的覆盖映射．

定理 4.5 的证明要点如下：根据 M 的单连通性，对于任意的 $q \in M$ 以及任意的 $\gamma, \bar{\gamma} \in \mathscr{C}_p^q(M)$，$\gamma$ 与 $\bar{\gamma}$ 都是同伦的．借助于相应的伦移 h_s，可以在 γ 与 $\bar{\gamma}$ 之间插入一系列分段光滑的测地线 β_{s_j}，$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$，使得

$$\beta_0 = \gamma, \quad \beta_1 = \bar{\gamma},$$

并且在相邻测地线上对应于 t_i, t_{i+1} 的点都落在某点的一个法坐标邻域内．这样就把问题化为定理 4.1 已经处理过的情形．限于篇幅，细节不再赘述；有兴趣的读者可以参看参考文献 [15, 第 39 页]．

§5.5 空间形式

首先给出空间形式的定义:

定义 5.1 完备、单连通的常曲率空间称为**空间形式.**

以后, 用 $M^n(c)$ 表示以 c 为截面曲率的 n 维空间形式. 下面是我们已经熟悉的例子.

例 5.1 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是截曲率为 $c=0$ 的 n 维空间形式.

事实上, 由第四章的例 1.1 或例 3.1, $\mathbb{R}^n$ 具有常截面曲率 0; 它的完备性正是数学分析中的 Cauchy 收敛准则, 其单连通性是显然的.

例 5.2 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中半径为 $r>0$ 的标准球面 $S^n(r)(n\geq 2)$ 是截曲率为 $c=1/r^2$ 的 n 维空间形式.

事实上, $S^n(r)(n\geq 2)$ 显然是单连通的, 紧致的, 因而又是完备的. 另一方面, 根据第二章例 2.2, 在由

$$U=S^n(r)\backslash\{N\} \text{ 和 } V=S^n(r)\backslash\{S\}$$

到 $\mathbb{R}^n$ 的球极投影给出的局部坐标覆盖 $\{(U;\xi^i),(V;\eta^i)\}$ 下, $S^n(r)$ 上的诱导度量的表达式是

$$ds^2=\frac{4\sum_i(d\xi^i)^2}{(1+c\sum_i(\xi^i)^2)^2},\quad ds^2=\frac{4\sum_i(d\eta^i)^2}{(1+c\sum_i(\eta^i)^2)^2},$$

其中 $S=(0,\cdots,0,-r)$, $N=(0,\cdots,0,r)$. 根据第四章的例 3.1 得知, $S^n(r)$ 的截面曲率是常数 $c=\frac{1}{r^2}$.

例 5.3 双曲空间 $H^n(c)$ $(c<0)$ 是截曲率为 c 的 n 维空间形式.

依照第二章的例 2.3, 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中引入 Lorentz 内积

$$\langle x,y\rangle_1=\sum_{i=1}^n x^iy^i-x^{n+1}y^{n+1},$$

$$\forall x=(x^1,\cdots,x^{n+1}),\ y=(y^1,\cdots,y^{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1},$$

并以 $\mathbb{R}_1^{n+1}$ 表示 Lorentz 空间 $(\mathbb{R}^{n+1},\langle\cdot,\cdot\rangle_1)$.

在 $\mathbb{R}_1^{n+1}$ 中考虑双叶双曲面的上半叶

$$H^n(c)=\{x\in\mathbb{R}^{n+1};\langle x,x\rangle_1=-a^2,\ x^{n+1}>0\},$$

其中 $a=1/\sqrt{-c}$. 则 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ 在 $H^n(c)$ 上的限制诱导出 $H^n(c)$ 上的黎曼度量 g. 具有诱导度量 g 的光滑流形 $H^n(c)$ 就是 n 维双曲空间. 设 $B^n(a)$ 为欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为中心、以 a 为半径的开球, 即

$$B^n(a)=\left\{(\xi^i)\in\mathbb{R}^n;\sum_i(\xi^i)^2<a^2\right\}.$$

则由

$$\xi^i=\frac{ax^i}{a+x^{n+1}},\quad 1\leq i\leq n$$

确定的映射 $\varphi: H^n(c)\to B^n(a)$ 给出了 $H^n(c)$ 上的一个整体坐标系 $(H^n(c);\xi^i)$. 相应地, 度量 g 可以表示为

$$ds^2=\frac{4a^4\sum_i(d\xi^i)^2}{(a^2-\sum_i(\xi^i)^2)^2}=\frac{4\sum_i(d\xi^i)^2}{(1+c\sum_i(\xi^i)^2)^2},\quad (\xi^i)\in B^n(a). \tag{5.1}$$

根据第四章例 3.1, $H^n(c)$ 的截面曲率为常数 c, 即 $H^n(c)$ 是 n 维常曲率空间. 显然 $H^n(c)$ 是单连通的拓扑空间, 现在要证明它的完备性.

根据 Hopf-Rinow 定理 (第三章的定理 6.3), 要证明 $H^n(c)$ 是完备的, 只需要说明从点

$$p=(0,\cdots,0,a)\in H^n(c)\subset\mathbb{R}_1^{n+1}$$

出发的每一条测地线 γ 都可以无限地延伸, 从而保证了指数映射 $\exp_p$ 在 $T_pH^n(c)$ 上处处有定义. p 关于局部坐标系 $(H^n(c);\xi^i)$ 的局部坐标为 $(0,\cdots,0)$, 而从 p 出发的正规测地线 γ 的参数方程方程是 (参看第三章的例 1.3)

$$\xi^i=\frac{v^i}{\sqrt{-c}}\tanh\left(\frac{\sqrt{-c}\,t}{2}\right),\quad 1\leq i\leq n,\quad t\in[0,+\infty),$$

其中 (v^i) 满足

$$\sum_i (v^i)^2 = 1.$$

既然该测地线以 t 为弧长参数，并且定义在无限的区间 $[0,+\infty)$ 上，故 $H^n(c)$ 是一个完备的黎曼流形.

上面的例子告诉我们，对于任意的实数 c 以及任意的自然数 n，以 c 为截面曲率的 n 维空间形式是存在的. 本节将要证明，在等距的意义下，上述例子实际上包括了所有的空间形式. 为此，首先要介绍关于等距的一个引理.

引理 5.1 设 $f_1, f_2 : M \to \tilde{M}$ 是 m 维黎曼流形 M 和 $\tilde{M}$ 之间的两个局部等距. 如果存在一点 $p \in M$，使得

$$f_1(p) = f_2(p), \quad (f_1)_{*p} = (f_2)_{*p},$$

则有 $f_1 = f_2$.

证明 定义 M 的子集

$$A = \{q \in M;\ f_1(q) = f_2(q), (f_1)_{*q} = (f_2)_{*q}\}.$$

显然 A 是 M 的一个非空闭子集. 下面要证明 A 也是 M 的开子集，从而由 M 的连通性得知 $A = M$. 这就证明了 $f_1 = f_2$.

根据第二章的命题 2.2，对于任意的 $q \in A$，可取充分小的 $\delta > 0$，使得 f_1, f_2 在法坐标球邻域 $\mathscr{B}_q(\delta)$ 上的限制都是到 $\tilde{M}$ 内的等距. 取 $q' \in \mathscr{B}_q(\delta)$，则有

$$v \in T_qM, \quad |v| = 1,$$

使得 $q' = \exp_q(bv)$，其中 $b = d(q, q')$. 令

$$\gamma(t) = \exp_q(tv), \quad t \in [0, b].$$

则由于 f_1, f_2 是光滑等距，故 $f_1 \circ \gamma$ 和 $f_2 \circ \gamma$ 都是 N 中的测地线，并且

$$(f_1 \circ \gamma)(0) = f_1(q) = f_2(q) = (f_2 \circ \gamma)(0),$$

$$(f_1 \circ \gamma)'(0) = (f_1)_{*q}(\gamma'(0)) = (f_2)_{*q}(\gamma'(0)) = (f_2 \circ \gamma)'(0).$$

根据测地线的唯一性，对于任意的 $t \in [0, b]$ 有

$$f_1 \circ \gamma(t) = f_2 \circ \gamma(t).$$

特别地

$$\begin{aligned} f_1(q') &= f_1(\exp_q(bv)) = (f_1 \circ \gamma)(b) \\ &= (f_2 \circ \gamma)(b) = f_2(\exp_q(bv)) = f_2(q'). \end{aligned}$$

由于 $q' \in \mathscr{B}_q(\delta)$ 的任意性，

$$(f_1)|_{\mathscr{B}_q(\delta)} = (f_2)|_{\mathscr{B}_q(\delta)},$$

因而对于任意的 $q' \in \mathscr{B}_q(\delta)$，又有

$$(f_1)_{*q'} = (f_2)_{*q'}.$$

由此可见，$\mathscr{B}_q(\delta) \subset A$. 所以 A 是 M 的开子集，定理得证.

定理 5.2 设 $M^n(c)$ 是截面曲率为 c 的 n 维空间形式，则

(1) 当 $c > 0$ 时，$M^n(c)$ 与半径为 $r = 1/\sqrt{c}$ 的标准球面 $S^n(r)$ 等距；

(2) 当 $c = 0$ 时，$M^n(c)$ 与欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 等距；

(3) 当 $c < 0$ 时，$M^n(c)$ 与双曲空间 $H^n(c)$ 等距.

证明 先考虑 (2) 和 (3) 的情形. 假设

$$c = 0 \text{ 或 } c < 0,$$

用 $N(c)$ 代表 $\mathbb{R}^n$ 或 $H^n(c)$.

任取 $p \in N(c)$, $\bar{p} \in M^n(c)$，以及等距的线性同构

$$\sigma : T_pN(c) \to T_{\bar{p}}M^n(c).$$



由于 $N(c)$ 和 $M^n(c)$ 都是单连通的完备黎曼流形，且截面曲率都是非正的，根据 Cartan-Hadamard 定理 (定理 3.3)，指数映射

$$\exp_p : T_pN(c) \to N(c) \text{ 和 } \exp_{\tilde{p}} : T_{\tilde{p}}M^n(c) \to M^n(c)$$

都是微分同胚，从而映射

$$f = \exp_{\tilde{p}} \circ \sigma \circ (\exp_p)^{-1} : N(c) \to M^n(c)$$

是微分同胚．又因为 $N(c)$ 和 $M^n(c)$ 具有相同的常截面曲率 c，由 Cartan 等距定理 (定理 4.1)，f 是局部等距．所以，f 是等距．

对于 $c > 0$ 的情形，设 $r = 1/\sqrt{c}$．任意取定点 $p \in S^n(r)$ 和点 $\tilde{p} \in M^n(c)$，并用 $-p$ 表示 p 点的对径点．由于 p 在 $S^n(r)\backslash\{-p\}$ 上没有共轭点，映射

$$(\exp_p)^{-1} : S^n(r)\backslash\{-p\} \to T_pS^n(r)$$

有意义，并且是从 $S^n(r)\backslash\{-p\}$ 到 $T_pS^n(r)$ 中的开球 $B_p(r\pi)$ 上的微分同胚．取定一个等距线性同构

$$\sigma : T_pS^n(r) \to T_{\tilde{p}}M^n(c),$$

并设

$$f_p = \exp_{\tilde{p}} \circ \sigma \circ (\exp_p)^{-1} : S^n(r)\backslash\{-p\} \to M^n(c).$$

由于 $S^n(r)\backslash\{-p\}$ 和 $M^n(c)$ 具有相同的常截面曲率 c，故 f_p 是局部等距．

同理，对于任意取定的点 $q \in S^n(r)\backslash\{p, -p\}$，设 $\tilde{q} = f_p(q)$，则有等距线性同构

$$\tau = (f_p)_{*q} : T_qS^n(r) \to T_{\tilde{q}}M^n(c),$$

从而又有局部等距

$$f_q = \exp_{\tilde{q}} \circ \tau \circ (\exp_q)^{-1} : S^n(r)\backslash\{-q\} \to M^n(c).$$

注意到 $n \geq 2$，所以 $W = S^n(r)\backslash\{-p, -q\}$ 是 $S^n(r)$ 的连通开子集，并且 $q \in W$．易见，

$$f_q(q) = \tilde{q} = f_p(q),$$

$$(f_q)_{*q} = (\exp_{\tilde{q}})_{*0} \circ \tau \circ (\exp_q^{-1})_{*q} = \tau = (f_p)_{*q}.$$

根据引理 5.1，$f_q|_W = f_p|_W : W \to M^n(c)$．又因为

$$S^n(r) = (S^n(r)\backslash\{-p\}) \cup (S^n(r)\backslash\{-q\}),$$

$$(S^n(r)\backslash\{-p\}) \cap (S^n(r)\backslash\{-q\}) = W,$$

所以可以定义从 $S^n(r)$ 到 $M^n(c)$ 的映射 $f : S^n(r) \to M^n(c)$，使得

$$f(x) = \begin{cases} f_p(x), & \text{如果 } x \in S^n(r)\backslash\{-p\}; \\ f_q(x), & \text{如果 } x \in S^n(r)\backslash\{-q\}. \end{cases}$$

自然，f 是局部等距．根据引理 3.2，

$$f : S^n(r) \to M^n(c)$$

是一个覆叠映射．由于 $S^n(r)$ 和 $M^n(c)$ 都是单连通的，故 f 是微分同胚，因而是等距．证毕．

对于任意一个黎曼流形 (M, g)，如果

$$\pi : \tilde{M} \to M$$

是 M 的一个覆叠映射，则 π 必是局部微分同胚，因而是浸入．所以 $\tilde{g} = \pi^*(g)$ 是 $\tilde{M}$ 上的黎曼度量，称为在覆叠流形 $\tilde{M}$ 上的**覆叠度量**．于是 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ 是一个黎曼流形，并且覆叠映射

$$\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g)$$

是局部等距．这时，把 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ 称为黎曼流形 (M, g) 的**黎曼覆叠空间**．同时，由于映射 π 把 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ 上的每一条测地线映射为 (M, g) 上的测

地线，不难看出，当 (M,g) 是完备黎曼流形时，$(\tilde{M},\tilde{g})$ 也是完备的。另外，局部等距保持截面曲率不变，故由定理 5.2 可以得到如下的推论：

推论 5.3 设 M 是具有截曲率 c 的完备常曲率空间，则它的通用**黎曼覆叠**空间依照 $c>0, c=0$ 和 $c<0$ 分别等距于 $S^n(1/\sqrt{c})$，$\mathbb{R}^n$ 和 $H^n(c)$。

现在可以把推论 4.4 扩充为如下的大范围结果：

定理 5.4 设 $M^n(c)$ 是截面曲率为 c 的 n 维空间形式，则对于 $M^n(c)$ 上的任意两点 $p,\tilde{p}$ 以及 $T_pM^n(c)$ 和 $T_{\tilde{p}}M^n(c)$ 中的任意两个单位正交基 $\{e_i\},\{\tilde{e}_i\}$，存在唯一的一个等距

$$f: M^n(c) \to M^n(c)$$

使得

$$f(p)=\tilde{p},\quad f_{*p}(e_i)=\tilde{e}_i,\quad 1\le i\le n.$$

证明 假设

$$\sigma: T_pM^n(c)\to T_{\tilde{p}}M^n(c)$$

是由 $\sigma(e_i)=\tilde{e}_i\ (1\le i\le n)$ 确定的等距线性同构。根据定理 5.2 的证明，存在等距 $f: M^n(c)\to M^n(c)$，使得

$$f(p)=\tilde{p},\quad f_{*p}=\sigma: T_pM^n(c)\to T_{\tilde{p}}M^n(c).$$

再由引理 5.1 得知这样的等距是唯一的，定理得证。

黎曼流形 (M,g) 上的全体等距变换（参看第二章定义 2.2）构成的集合关于映射的复合构成一个群，称为黎曼流形 (M,g) 的**等距变换群**，并记为 $\mathrm{I}(M,g)$ 或 $\mathrm{I}(M)$。可以证明 $\mathrm{I}(M)$ 是一个李群。定理 5.4 告诉我们，n 维空间形式 $M^n(c)$ 的等距变换群 $\mathrm{I}(M^n(c))$ 的维数是 $n(n+1)/2$。

设 (M,g) 是 m 维黎曼流形，$\pi:\tilde{M}\to M$ 是它的一个覆叠映射，则关于 $\tilde{M}$ 上的覆叠度量 $\tilde{g}$，π 是局部等距。设 $h:\tilde{M}\to\tilde{M}$ 是关于覆叠 π 的一个覆叠变换（参看参考文献 [13, 第 159 页]），即 h 是 $\tilde{M}$ 上满足 $\pi\circ h=\pi$ 的微分同胚。由于 π 是局部等距，h 必是等距，即

$$h\in \mathrm{I}(\tilde{M},\tilde{g}).$$

显然，覆叠映射 π 的全体覆叠变换也构成一个群，称为覆叠 π 的**覆叠变换群**，它是 $\mathrm{I}(\tilde{M},\tilde{g})$ 的一个子群。

现在假定 Γ 是一个离散群，并且它在 m 维光滑流形 M 上有一个作用 $\Theta:\Gamma\times M\to M$。如果 Θ 满足以下两个条件：

(1) 对于任意的 $x\in M$，都存在 x 的一个邻域 U，使得集合 $\{h\in\Gamma;\ (h\cdot U)\cap U\ne\emptyset\}$ 是有限集，其中 $h\cdot U=\{\Theta(h,y);\ y\in U\}$；

(2) 如果 $x,y\in M$，并且 $x\notin\Gamma(y)=\{\Theta(h,y);\ h\in\Gamma\}$，则有 x,y 的邻域 U,V，使得

$$U\cap\Gamma\cdot V=\emptyset,$$

其中

$$\Gamma\cdot V=\{\Theta(h,y);\ h\in\Gamma, y\in V\},$$

则称 Θ 是离散群 Γ 在光滑流形 M 上的**纯不连续作用**。

设 $\Theta:\Gamma\times\tilde{M}\to\tilde{M}$ 是离散群 Γ 在光滑流形 $\tilde{M}$ 上的一个纯不连续作用，令 $M=\tilde{M}/\Gamma$。如果此作用没有不动点，则在 M 上有唯一的光滑结构，使得自然投影 $\pi:\tilde{M}\to M$ 是一个覆叠映射（参看参考文献 [3, 第二章, §5]）。根据商空间和自然投影的定义，对于任意的 $h\in\Gamma$，

$$\pi\circ\Theta(h,\cdot)=\pi(\cdot).$$

因此，$\Theta(h,\cdot)$ 是覆叠 π 的一个覆叠变换。反之，对于光滑流形 M 和它的一个覆叠映射 $\pi:\tilde{M}\to M$，相应的覆叠变换群必定是纯不连续地作用在覆叠空间 $\tilde{M}$ 上，并且没有不动点。

把上面的讨论综合起来得知，假定 Γ 是 $\mathrm{I}(M^n(c))$ 的一个离散子群，如果它在 $M^n(c)$ 上有一个无不动点的纯不连续作用，则商空间

$M = M^n(c)/\Gamma$ 是一个完备的 n 维常曲率空间，其截面曲率为 c. 反之，设 M 是任意一个完备的 n 维常曲率空间，并且具有截面曲率 c. 则必有 $I(M^n(c))$ 的一个离散子群 Γ, 以及 Γ 在 $M^n(c)$ 上的一个无不动点的纯不连续作用，使得 M 等距于商空间 $M^n(c)/\Gamma$.

由此可见，要对截面曲率为 c 的 n 维完备常曲率空间进行分类，就是要寻找 $I(M^n(c))$ 的所有离散子群，并对它们进行分类. 然而，这却是一个十分困难的问题. 不过，$c>0$ 的情形已经得到完全的解决；有兴趣的读者可以参看参考文献 [31]. 作为本节的结束，在这里只叙述偶维数情形的一个结果.

命题 5.5 设 M 是一个截面曲率为 1 的 $2k$ 维完备常曲率空间，则 M 必与单位球面 S^{2k} 或实射影空间 $\mathbb{R}P^{2k}$ 等距.

习 题 五

1. 设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是黎曼流形 (M,g) 上的一条测地线，$J(t)$ 是沿 γ 的任意一个 Jacobi 场. 证明：如果 $J\neq 0$, 则它的零点是孤立的.

2. 证明推论 1.6 的结论 (2).

3. 证明推论 1.8.

4. 设 $c<0$, M 是具有常截面曲率 c 的黎曼流形. 假定 $\gamma:[0,l]\to M$ 是一条正规测地线，向量 $v\in T_{\gamma(l)}M$ 并满足

$$\langle v,\gamma'(l)\rangle=0,\quad |v|=1.$$

显然，$\gamma(l)$ 不是 $\gamma(0)$ 的共轭点 (参看引理 3.1). 证明：沿 γ 满足条件

$$J(0)=0,\quad J(l)=v$$

的 Jacobi 场 J 由下式给出

$$J(t)=\frac{\sinh(\sqrt{-c}t)}{\sinh(\sqrt{-c}l)}w(t),$$

其中 $w(t)$ 是沿 γ 的一个平行向量场，并且

$$w(0)=\frac{u_0}{|u_0|},\quad u_0=(\exp_{\gamma(0)})_{*l\gamma'(0)}^{-1}(v).$$

5. 设 $\gamma:[0,a]\to M$ 是黎曼流形 M 上的一条测地线，X 是 M 上的 Killing 向量场.

(1) 证明：X 在 γ 上的限制

$$X(t)=X(\gamma(t))$$

是沿 γ 的 Jacobi 场；

(2) 利用 (1) 重新证明第三章习题第 8 题：如果 M 是连通的，并且存在点 $p\in M$ 使得

$$X(p)=0,\quad D_vX=0,\quad \forall v\in T_pM,$$

则 X 在 M 上恒为零.

6. 设 M 是黎曼流形，$p\in M$. 假定对于从 p 点出发的任意一条测地线

$$\gamma:[0,b]\to M,\quad \gamma(0)=p,$$

沿 γ 的任意一个法 Jacobi 场 J 都具有 $J(t)=f(t)E(t)$ 的形式，其中 $E(t)$ 是沿 γ 平行的单位向量场.

(1) 设 $V\subset T_pM$ 是 T_pM 中的任一个向量子空间，对于充分小的正数 δ, 令

$$\tilde V=\{v\in V;\ g(v,v)<\delta^2\},\quad S=\exp_p(\tilde V),$$

它是 M 通过点 p 的子流形. 证明：存在充分小的 $\delta>0$, 使得对于任意的测地线 $\gamma:[0,b]\to M$, 只要

$$\gamma(0)=p,\quad \gamma'(0)\in V,\quad \gamma([0,b])\subset S,$$

则在 M 中沿 γ 的平行移动把 V 变为 $T_{\gamma(b)}S$.

(2) 设 $\dim M \geq 3$. 证明: M 在点 p 的截面曲率是与二维截面的取法无关的常数.

7. 设 $\gamma: [0,b] \to M$ 是黎曼流形 M 上的一条测地线, 令

$$\mathscr{J}_0^b(\gamma) = \{J; J \text{为沿}\gamma\text{的 Jacobi 场, 并且 } J(0) = J(b) = 0\}.$$

证明: $\mathscr{J}_0^b(\gamma)$ 和线性映射 $(\exp_{\gamma(0)})_{*b\gamma'(0)}$ 的核空间同构.

8. 设 $\gamma: [0,+\infty) \to M$ 是黎曼局部对称空间 M (参看第四章习题第 11 题) 上的一条测地线, $p = \gamma(0)$. 对于任意的 $t \in [0,+\infty)$, 定义线性映射

$$K_t: T_{\gamma(t)}M \to T_{\gamma(t)}M$$

如下:

$$K_t(w) = \mathcal{R}(w, \gamma'(t))\gamma'(t), \quad \forall w \in T_{\gamma(t)}M.$$

(1) 证明映射 K_t 是自共轭的, 即

$$\langle K_t(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, K_t(v_2) \rangle, \quad \forall v_1, v_2 \in T_{\gamma(t)}M.$$

(2) 取 T_pM 的一个单位正交基 $\{e_i\}$, 使 K_0 对角化, 即

$$K_0(e_i) = \lambda_i e_i, \quad 1 \leq i \leq m.$$

利用平行移动, 把 e_i 扩展为沿 γ 平行的向量场. 证明:

$$K_t(e_i(t)) = \lambda_i e_i(t), \quad \forall t \in [0,+\infty).$$

(3) 设

$$J(t) = \sum_i J^i(t) e_i(t)$$

是沿 γ 的一个向量场. 证明: J 是 Jacobi 场等价于 $J^i(t)$ 满足方程组

$$\frac{\mathrm{d}^2 J^i}{\mathrm{d}t^2} + \lambda_i J^i = 0, \quad 1 \leq i \leq m.$$

(4) 证明: 点 p 沿 γ 的共轭点是 $\gamma(k\pi/\sqrt{\lambda})$, 其中 k 是正整数, λ 是映射 K_0 的任意一个正特征根.

9. 设 M 是完备黎曼流形, $f: (M,g) \to (N,h)$ 是局部等距, 证明: 对于任意一条测地线

$$\beta: [a,b] \to N,$$

以及任意一点 $p \in f^{-1}(\beta(a))$, 在 M 中存在唯一的一条测地线 γ, 使得 $f \circ \gamma = \beta$.

10. 设 p 是完备黎曼流形 M 上的一点. 如果指数映射 $\exp_p$ 无退化点, 或等价地说, p 点无共轭点, 则称点 p 为 M 的一个**极点**(参看引理 3.1). 易知, 具有非正截面曲率的完备黎曼流形上的每一个点都是其极点. 证明: 如果完备的单连通黎曼流形 M 有极点, 则 M 和欧氏空间光滑同胚.

11. 设 M 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个旋转抛物面:

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = x^2 + y^2\}, \quad p = (0,0,0).$$

证明:

(1) p 点是 M 的一个极点;

(2) M 的 Gauss 曲率大于零.

本题说明, 截面曲率非正是完备黎曼流形有极点的一个充分条件, 但不是必要条件.

12. 设 $\pi: \tilde{M} \to M$ 是黎曼流形 M 的一个覆叠流形, 证明: $\tilde{M}$ 关于覆叠度量是完备的当且仅当 M 是完备的.

13. 设 $f: M \to N$ 是黎曼流形之间的局部等距. 试举例说明, 当 N 是完备的时候, M 不一定是完备的.

14. 设 M 是 $\mathbb{R}^2_* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 的通用覆叠流形, 相应的覆叠映射是 $\pi: M \to \mathbb{R}^2_*$. 证明: M 关于覆叠度量是不可延拓的, 但不是完备的. 由此可见, 不可延拓性条件比完备性条件弱, 因而用起来不很方便.

15. 设黎曼流形 (M,g) 的截面曲率恒为零, $p \in M$, U 是 M 在点 p 的任意一个法坐标邻域. 证明: $\exp_p: (\exp_p)^{-1}(U) \to U \subset M$ 是

等距.

16. 设 M 是黎曼流形, $p \in M$, $\delta > 0$ 充分小, 使得测地球 $\mathscr{B}_p(\delta)$ 是 M 在 p 点的一个法坐标邻域; $\sigma : \mathscr{B}_p(\delta) \to \mathscr{B}_p(\delta)$ 是一个光滑映射. 如果对于 $\mathscr{B}_p(\delta)$ 中的每一条径向测地线 $\gamma(t)\ (\gamma(0) = p)$, 都有

$$\sigma(\gamma(t)) = \gamma(-t), \quad \forall t,$$

则称 σ 是 M 在 p 点的一个**局部对称变换**. 证明: M 是黎曼局部对称空间的充分必要条件是 M 在每一点都存在等距的局部对称变换.

17. 设 $S^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是半径为 r 的标准球面. 证明: $S^n(r)$ 上的任意一个等距变换都是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的正交变换在 $S^n(r)$ 上的限制, 因而有 $\mathrm{I}(S^n(r)) = \mathrm{O}(n+1)$.

18. 直接证明推论 4.2 的结论 (1).

19. 依照第二章的例 2.3 和第二章习题第 23(2) 题, $\mathbb{R}^{n+1}$ 关于 Lorentz 内积

$$\langle x, y\rangle_1 = \sum_{i=1}^n x^i y^i - x^{n+1}y^{n+1},$$

$$\forall x = (x^1, \cdots, x^{n+1}), \qquad y = (y^1, \cdots, y^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

构成一个 Lorentz 空间 $\mathbb{R}_1^{n+1} = (\mathbb{R}^{n+1}, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$. 设

$$H^n(c) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x\rangle_1 = -a^2,\ x^{n+1} > 0\},$$

其中 $a = 1/\sqrt{-c}$; $H^n(c)$ 上的黎曼度量 g 由 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ 诱导. 用 $\mathrm{O}(n+1,1)$ 表示在 $\mathbb{R}_1^{n+1}$ 上保持 Lorentz 内积不变的线性变换所构成的群, 它是一般线性群 $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})$ 的子群. 令

$$G = \{A = (a_\beta^\alpha) \in \mathrm{O}(n+1,1);\ \det A > 0 \text{ 且 } a_{n+1}^{n+1} > 0\},$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R}),$$

其中 I_n 表示 n 阶单位矩阵. 证明:

(1) 对于任意的 $A \in \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})$, $A \in \mathrm{O}(n+1,1)$ 当且仅当 $A^t\varepsilon A = \varepsilon$;

(2) 对于任意的 $p \in H^n(c)$, $\eta(p) = \dfrac{1}{a}p$ 是 $H^n(c)$ 在点 p 的 "单位" 法向量, 即

$$\langle\eta(p), \eta(p)\rangle_1 = -1, \quad \langle\eta(p), v\rangle_1 = 0, \quad \forall v \in T_pH^n(c);$$

(3) 对于任意的 $A \in G$, A 在 $H^n(c)$ 上的限制 $A|_{H^n(c)}$ 是 $H^n(c)$ 上的等距变换, 并且保持 $H^n(c)$ 的定向不变;

(4) 对于任意的 $p, q \in H^n(c)$, 以及在 $T_pH^n(c)$ 和 $T_qH^n(c)$ 上与定向相符的单位正交基底 $\{e_i\}$ 和 $\{f_i\}$, 设 A 是由

$$e_i \mapsto f_i, \quad \eta(p) \mapsto \eta(q)$$

确定的线性变换, 则有 $A \in G$; 由此进一步说明 $H^n(c)$ 是完备的黎曼流形.

第六章 弧长的第二变分公式

变分法是研究黎曼几何的有效手段之一. 第三章曾经介绍过弧长的第一变分公式, 即弧长泛函的一阶导数表达式. 这个表达式与黎曼流形本身的曲率没有关系. 如果进一步求弧长泛函的二阶导数, 便可得到弧长的第二变分公式. 由于在第二变分公式中出现与黎曼流形的曲率有关的项, 从而成为在黎曼流形上研究受其曲率影响的相关特性的重要工具. 这一章, 首先将导出弧长的第二变分公式; 然后把它用于研究测地线的最短性和黎曼流形的拓扑特性.

§6.1 弧长的第二变分公式

设 (M,g) 是 m 维黎曼流形. 根据第三章的推论 3.6,M 上的一条分段光滑曲线 $\gamma:[a,b]\to M$ 是测地线当且仅当 γ 是在它的任意一个有固定端点的变分下弧长泛函的临界点. 为了判定一条测地线是否是在连接其端点的所有分段光滑曲线中的最短线, 需要计算弧长泛函的二阶导数, 其表达式就是弧长的第二变分公式.

假定 $\gamma(t)\,(t\in[a,b])$ 是黎曼流形 (M,g) 中的一条正则的测地线, 则由第三章的定理 1.5, 其参数 t 必与它的弧长成比例. 设

$$\Phi:[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$$

是 γ 的一个变分, 则对于任意的 $u\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ 有变分曲线

$$\gamma_u(t)=\Phi(t,u),\quad t\in[a,b],$$

其中 $\gamma_0=\gamma$. 曲线 γ_u 的弧长是

$$L(u)=L(\gamma_u)=\int_a^b|\gamma_u'(t)|\mathrm{d}t=\int_a^b\langle\gamma_u'(t),\gamma_u'(t)\rangle^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t.$$

因此，如果令

$$\tilde{T}=\Phi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),\quad \tilde{U}=\Phi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right),\quad U=\tilde{U}|_{u=0},$$

则 $U=U(t)$ 是变分 Φ 的变分向量场，且有 (参看第三章的 (3.8) 式)

$$L'(u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L(\gamma_u)=\int_a^b\frac{\langle \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{U},\tilde{T}\rangle}{\langle\tilde{T},\tilde{T}\rangle^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}t,\tag{1.1}$$

其中 D 是诱导向量丛 Φ^*TM 上的诱导联络. 将 (1.1) 式对 u 再次求导，得到

$$\begin{aligned}L''(u)&=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}L(\gamma_u)\\&=\int_a^b\left\{\frac{1}{\langle\tilde{T},\tilde{T}\rangle^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial u}\langle \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{U},\tilde{T}\rangle-\frac{\langle \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{U},\tilde{T}\rangle\langle \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u}}\tilde{T},\tilde{T}\rangle}{\langle\tilde{T},\tilde{T}\rangle^{\frac{3}{2}}}\right\}\mathrm{d}t\\&=\int_a^b\left\{\frac{\langle \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u}}\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{U},\tilde{T}\rangle+\langle \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{U},\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u}}\tilde{T}\rangle}{\langle\tilde{T},\tilde{T}\rangle^{\frac{1}{2}}}-\frac{\langle \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{U},\tilde{T}\rangle^2}{\langle\tilde{T},\tilde{T}\rangle^{\frac{3}{2}}}\right\}\mathrm{d}t\\&=\int_a^b\left\{\frac{\langle \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u}}\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{U},\tilde{T}\rangle+\langle \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{U},\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{U}\rangle}{\langle\tilde{T},\tilde{T}\rangle^{\frac{1}{2}}}-\frac{\langle \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{U},\tilde{T}\rangle^2}{\langle\tilde{T},\tilde{T}\rangle^{\frac{3}{2}}}\right\}\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{1.2}$$

其中利用了等式 $\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u}}\tilde{T}=\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{U}$(参看第三章的 (3.7) 式). 设 $\mathcal{R}$ 是 M 上的曲率张量，则根据第四章习题第 3 题的结论有

$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u}}\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{U}=\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u}}\tilde{U}+\mathcal{R}(\tilde{U},\tilde{T})\tilde{U}.$$

所以

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u}}\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{U},\tilde{T}\rangle&=\langle \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u}}\tilde{U},\tilde{T}\rangle+\langle\mathcal{R}(\tilde{U},\tilde{T})\tilde{U},\tilde{T}\rangle\\&=\frac{\partial}{\partial t}(\langle \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u}}\tilde{U},\tilde{T}\rangle)-\langle \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u}}\tilde{U},\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{T}\rangle+\langle\mathcal{R}(\tilde{U},\tilde{T})\tilde{U},\tilde{T}\rangle.\end{aligned}$$

由于当 $t=0$ 时，$\gamma_0=\gamma$ 为测地线，$\tilde{T}|_{u=0}=\gamma'$, 故有 (参看第二章的注记 8.1)

$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{T}|_{u=0}=\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\gamma'=0,\quad |\tilde{T}|_{u=0}=|\gamma'|=\text{常数}.$$

若令 $l=L(\gamma)$, 则由

$$l=L(\gamma)=\int_a^b|\gamma'|\mathrm{d}t=|\gamma'(0)|\cdot(b-a)$$

得到

$$|\tilde{T}|_{u=0}=|\gamma'(0)|=\frac{l}{b-a}.$$

把上述各式代入 (1.2), 便得

$$\begin{aligned}L''(0)&=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}L(\Gamma_u)\Big|_{u=0}\\&=\frac{b-a}{l}\int_a^b\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u}}\tilde{U}\Big|_{u=0},\gamma'\right\rangle+\langle\mathcal{R}(U,\gamma')U,\gamma'\rangle+\langle U',U'\rangle\right\}\mathrm{d}t\\&\quad-\frac{(b-a)^3}{l^3}\int_a^b\langle U',\gamma'\rangle^2\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{1.3}$$

其中

$$U'=\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}U=\mathrm{D}_{\gamma'}U$$

是变分向量场 U 沿曲线 γ 的协变导数 (参看第二章的 (8.9) 式).

为了化简 (1.3) 式，用 $U^\perp$ 表示变分向量场 U 的、与 γ' 正交的法分量，则有

$$U^\perp=U-\frac{(b-a)^2}{l^2}\langle U,\gamma'\rangle\gamma'.$$

由此得到

$$U=U^\perp+\frac{(b-a)^2}{l^2}\langle U,\gamma'\rangle\gamma',\quad U'=U^{\perp\prime}+\frac{(b-a)^2}{l^2}\langle U',\gamma'\rangle\gamma'.$$

所以

$$\begin{aligned}\langle U',U'\rangle&=\langle U^{\perp\prime},U^{\perp\prime}\rangle+\frac{2(b-a)^2}{l^2}\langle U^{\perp\prime},\gamma'\rangle\langle U',\gamma'\rangle\\&\quad+\frac{(b-a)^4}{l^4}\langle U',\gamma'\rangle^2\langle\gamma',\gamma'\rangle\\&=\langle U^{\perp\prime},U^{\perp\prime}\rangle+\frac{(b-a)^2}{l^2}\langle U',\gamma'\rangle^2,\end{aligned}\tag{1.4}$$

其中利用了

$$\langle U^{\perp\prime}, \gamma' \rangle = \frac{\partial}{\partial t}\langle U^{\perp}, \gamma' \rangle - \langle U^{\perp}, \mathrm{D}_{\gamma'}\gamma' \rangle = 0.$$

把 (1.4) 代入 (1.3), 这就证明了下面的定理:

定理 1.1 设 $\gamma(t), t \in [a,b]$, 是黎曼流形 (M,g) 中的一条测地线, 则对于 γ 的任意一个变分 $\Phi: [a,b] \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$, 下列公式成立:

$$\begin{aligned} L''(0) =& \frac{b-a}{l}\langle \mathrm{D}_U U, \gamma' \rangle \Big|_a^b \\ &+ \frac{b-a}{l}\int_a^b \{|U^{\perp\prime}|^2 + \langle \mathcal{R}(\gamma', U^{\perp})\gamma', U^{\perp} \rangle\} \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{1.5}$$

其中 l 是测地线 γ 的长度, D 是诱导丛 Φ^*TM 上的诱导联络,

$$\mathrm{D}_U U = \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u}} \tilde{U}\Big|_{u=0}.$$

特别地, 如果 Φ 是 γ 的一个具有固定端点的变分, 则

$$L''(0) = \frac{b-a}{l}\int_a^b \{|U^{\perp\prime}|^2 + \langle \mathcal{R}(\gamma', U^{\perp})\gamma', U^{\perp} \rangle\} \mathrm{d}t. \tag{1.6}$$

公式 (1.5) 称为 **弧长的第二变分公式**. 对于有固定端点的变分来说, 在此公式中起作用的是变分向量场 U 相对于曲线 γ 的法分量 $U^{\perp}$, U 与测地线 γ 相切的分量是不起任何作用的. 因此, 在考虑测地线弧长的第二变分时, 通常只需讨论 γ 的所谓法向变分, 即假定变分向量场 U 与测地线 γ 处处正交. 此时, 根据截面曲率的定义, 变分公式 (1.6) 化为

$$L''(0) = \frac{b-a}{l}\int_a^b \left\{|U'|^2 - \frac{l^2|U|^2}{(b-a)^2}K(\gamma', U)\right\} dt. \tag{1.7}$$

此外, 由于

$$\langle U', U' \rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle U', U \rangle - \langle U'', U \rangle,$$

并且 $U(0) = U(1) = 0$, (1.6) 式又可以改写为

$$L''(0) = -\frac{b-a}{l}\int_a^b \langle U'' - \mathcal{R}(\gamma', U)\gamma', U \rangle \mathrm{d}t. \tag{1.8}$$

§6.2 Bonnet-Myers 定理

本节要介绍的 Bonnet-Myers 定理是大范围微分几何中最早的定理之一, 它反映了黎曼度量的曲率特性对于流形拓扑的要求, 是弧长第二变分公式的直接应用.

定义 2.1 黎曼流形 (M,g) 的 **直径** $d(M)$ 是

$$d(M) = \max\{d(p,q);\ p,q \in M\}.$$

如果其直径 $d(M) < +\infty$, 则称 (M,g) 是 **有界** 的.

因此非紧的完备黎曼流形都是无界的, 其直径是 $+\infty$.

定理 2.1 (Bonnet-Myers) 设 (M,g) 是完备的 m 维黎曼流形. 若有正数 $a > 0$, 使得 (M,g) 的 Ricci 曲率以 a 为下界, 即对于每一点 $p \in M$ 以及任意的切向量 $v \in T_pM$ 有 $\mathrm{Ric}(v) \geq a$, 则 (M,g) 是直径不超过 $\pi\sqrt{m-1}/\sqrt{a}$ 的紧致黎曼流形.

证明 设 p, q 是 M 上的任意两点. 因为 M 是完备的, 故有最短的正规测地线 $\gamma: [0,l] \to M$ 使得

$$\gamma(0) = p, \quad \gamma(l) = q,$$

而且 $l = d(p,q)$. 选取沿 γ 平行的单位正交标架场 $\{e_i(t)\}$, 使得

$$e_m = \gamma',$$

并且设

$$V_i(t) = \sin\frac{\pi t}{l} \cdot e_i(t), \quad 1 \leq i \leq m-1,$$

则 $V_i(0) = V_i(l) = 0$. 根据第三章 §3.3 的讨论, 存在 γ 的有固定端点的变分

$$\Phi^{(i)}: [0,l] \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M,$$

使得 $\Phi^{(i)}$ 以 V_i 为变分向量场. 于是由 (1.8) 式, 变分 $\Phi^{(i)}$ 所对应的弧长第二变分公式是

$$\begin{aligned}L_i''(0) &= -\int_0^l \langle V_i'' - \mathcal{R}(\gamma', V_i)\gamma', V_i\rangle \mathrm{d}t \\ &= \int_0^l \left(\sin\frac{\pi t}{l}\right)^2 \left(\frac{\pi^2}{l^2} + \langle \mathcal{R}(e_m, e_i)e_m, e_i\rangle\right) \mathrm{d}t,\end{aligned}$$

$$1 \le i \le m-1.$$

再由第四章的定理 4.2,

$$\mathrm{Ric}(e_m) = \sum_{i=1}^{m-1} K(e_i, e_m) = -\sum_{i=1}^{m-1} \langle \mathcal{R}(e_m, e_i)e_m, e_i\rangle,$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m-1} L_i''(0) &= \int_0^l \left(\sin\frac{\pi t}{l}\right)^2 \left(\frac{\pi^2}{l^2}(m-1) - \mathrm{Ric}(e_m)\right) \mathrm{d}t \\ &\le \left(\frac{\pi^2}{l^2}(m-1) - a\right) \int_0^l \left(\sin\frac{\pi t}{l}\right)^2 \mathrm{d}t \\ &= \frac{l}{2}\left(\frac{\pi^2}{l^2}(m-1) - a\right).\end{aligned}$$

如果 $l > \pi\sqrt{m-1}/\sqrt{a}$, 则

$$\frac{\pi^2}{l^2}(m-1) - a < 0, \quad \sum_{i=1}^{m-1} L_i''(0) < 0.$$

因而存在某个指标 i, $1 \le i \le m-1$, 使得 $L_i''(0) < 0$. 这表明对于变分向量场 V_i 所对应的变分 $\Phi^{(i)}$, 当 ε 充分小时, 曲线 γ 在连接 p, q 的曲线族

$$\{\gamma_u^{(i)};\ u \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$$

中长度最长, 这与曲线 γ 的最短性相矛盾. 因此,

$$d(p,q) = l \le \pi\sqrt{m-1}/\sqrt{a}.$$

由 p, q 两点的任意性得知

$$d(M) \le \pi\sqrt{m-1}/\sqrt{a}.$$

再由 Hopf-Rinow 定理 (第三章定理 6.3)(3), M 是紧致的. 证毕.

顺便指出, 在上述证明过程中所使用的求和技巧蕴含着十分有用的想法, 它可以用于其他问题的研究. Bonnet 在 $n=2$ 的情形证明了定理 2.1, 而这种情形到高维黎曼流形 M 的一个直接推广是把定理中的条件换成 M 的截面曲率有正下界 a. 后来 Myers 把这个条件减弱为定理 2.1 所叙述的条件, 即: M 的 Ricci 曲率有正的下界. 在这里, 能够从截面曲率的条件过渡到 Ricci 曲率的条件, 本质上就是利用了上面所提到的求和技巧.

推论 2.2 设 (M, g) 是完备的黎曼流形, 它的 Ricci 曲率具有正的下界 a, 则 M 的通用覆叠流形是紧致的; 特别地, M 的基本群 $\pi_1(M)$ 是有限群.

证明 设 $\pi: \tilde{M} \to M$ 是 M 的通用覆叠映射, $\tilde{g}$ 是 $\tilde{M}$ 上的覆叠度量, 则由 (M, g) 的完备性得知 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ 也是完备的黎曼流形, 并且覆叠映射 π 为局部等距. 由于局部等距保持截面曲率不变, 故 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ 的 Ricci 曲率同样以正数 a 为下界. 根据定理 2.1, $\tilde{M}$ 是紧致流形, 因而

$$\pi: \tilde{M} \to M$$

是一个覆叠次数有限的覆叠映射, 即对于每一点 $p \in M$, 存在 p 的开邻域 U, 使得 $\pi^{-1}(U)$ 是 $\tilde{M}$ 中有限多个互不相交的开集 U_α $(\alpha \in I)$ 的并集, 并且对于任意的 $\alpha \in I$,

$$\pi|_{U_\alpha}: U_\alpha \to U$$

是微分同胚．此时，M 的基本群同构于 $\pi:\tilde{M}\to M$ 的覆叠变换群．因为 $\tilde{M}$ 的覆叠变换群只是在 $\{U_\alpha;\alpha\in I\}$ 之间的置换群，所以 M 的基本群 $\pi_1(M)$ 有限．证毕．

§6.3　Synge 定理

Synge 定理是弧长第二变分公式的另一个极为出色的应用范例，其证明方法在大范围黎曼几何中具有代表性．在这一节将给出 Synge 定理的证明，首先介绍一个引理．为了方便起见，用"**路径**"表示黎曼流形中分段光滑的曲线段；而一条**闭测地线**则指处处满足测地线方程的闭曲线，因而也是处处光滑的．

引理 3.1　设 (M,g) 是非单连通的紧致黎曼流形，且它的通用覆叠流形 $\tilde{M}$ 也是紧致的，则在 M 上存在一条非零伦的、且长度最短的闭测地线．

证明　由 M 的非单连通性以及 $\tilde{M}$ 的紧致性可知，对于任意一点 $p\in M$，$\pi^{-1}(p)$ 是元素个数不少于 2 的有限集，因而可设

$$\pi^{-1}(p)=\{\tilde{p}_1,\cdots,\tilde{p}_r\},\quad r\geq 2.$$

黎曼覆叠映射 π 的覆叠变换群是覆叠流形 $(\tilde{M},\tilde{g})$ 的等距变换群的子群，它在 $\pi^{-1}(p)$ 上的作用成为 $\{\tilde{p}_1,\cdots,\tilde{p}_r\}$ 的置换群，并且同构于基本群 $\pi_1(M)$．

设 $\gamma:[0,1]\to M$ 是 M 中以 p 为基点的非零伦闭路径．

$$\gamma(0)=\gamma(1)=p.$$

则对于任意的 α，$1\leq\alpha\leq r$，闭路径 γ 可以提升为 $\tilde{M}$ 中从点 $\tilde{p}_\alpha$ 出发的路径 γ_α，其终点

$$\tilde{p}_{\alpha'}=\gamma_\alpha(1)\in\pi^{-1}(p),$$

并且 $\tilde{p}_{\alpha'}\neq\tilde{p}_\alpha$．反过来，对于 $\pi^{-1}(p)$ 中的任意两个不同点 $\tilde{p}_\alpha,\tilde{p}_{\alpha'}$，在 $\tilde{M}$ 中连接 $\tilde{p}_\alpha,\tilde{p}_{\alpha'}$ 的任意一条路径 γ_α 在覆叠映射 π 下的像

$$\gamma=\pi\circ\gamma_\alpha$$

是 M 中以 p 为基点的非零伦闭路径．同时，由于 π 是局部等距，故路径 γ 与相应的提升路径 γ_α 具有相同的长度，即

$$L(\gamma)=L(\gamma_\alpha).$$

显然，提升路径 γ_α，$1\leq\alpha\leq r$，可以借助于覆叠变换群 $\pi_1(M)$ 互相转换．

不失一般性，在重新编号后可设

$$d(\tilde{p}_1,\tilde{p}_2)=\min_{\alpha\neq\alpha'}d(\tilde{p}_\alpha,\tilde{p}_{\alpha'}).$$

假定 $\tilde{\gamma}_p$ 是 $\tilde{M}$ 中连接 $\tilde{p}_1,\tilde{p}_2$ 的最短测地线：

$$L(\tilde{\gamma}_p)=d(\tilde{p}_1,\tilde{p}_2),$$

并设 $\gamma_p=\pi\circ\tilde{\gamma}_p$．则 γ_p 是 M 中的一条以 p 为基点的非零伦闭路径，并且除 p 点以外 γ_p 处处光滑并且满足测地线方程，同时有

$$L(\gamma_p)=L(\tilde{\gamma}_p).$$

因此，γ_p 是 M 上以 p 为基点的所有非零伦闭路径中长度最短的闭路径．

基于上述讨论，在 M 上定义了一个实函数

$$f:M\to\mathbb{R},$$

使得对于任意的 $p\in M$，

$$f(p)=L(\gamma_p).$$

下面要证明函数 f 是 M 上的连续函数. 事实上, 对于任意的 $p, p' \in M$, 利用 $\gamma_p, \gamma_{p'}$ 的最短性可知 (参看图 5)

$$L(\gamma_p) \le L(\gamma_{p'}) + 2d(p, p'),$$
$$L(\gamma_{p'}) \le L(\gamma_p) + 2d(p, p').$$

因此,

$$|f(p) - f(p')| = |L(\gamma_p) - L(\gamma_{p'})| \le 2d(p, p').$$

这说明 f 是 M 上的 Lipschitz 函数, 因而是连续函数.

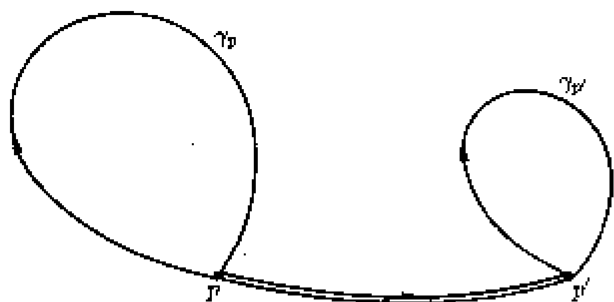


图 5

由于 M 是紧致的, 必有点 $p \in M$, 使得连续函数 f 在 p 点达到最小值. 我们断言: 与 p 对应的路径 γ_p 就是 M 中一条非零伦的最短闭测地线. 证明这个断言的关键在于证明 γ_p 在 p 点的光滑性. 为此, 设

$$\gamma_p = \gamma_p(t), \quad t \in [0, 1],$$

则

$$\gamma_p(0) = \gamma_p(1) = p,$$

并且 γ_p 在开区间 $(0, 1)$ 上光滑. 任取一点 $t_0 \in (0, 1)$, 并设

$$q = \gamma_p(t_0),$$

则 γ_p 也可以看作一条以 q 为基点的闭路径. 因此由 γ_q 的最短性假定得知

$$L(\gamma_q) \le L(\gamma_p).$$

然而根据 p 点的取法, 又有

$$L(\gamma_p) \le L(\gamma_q),$$

所以

$$L(\gamma_p) = L(\gamma_q).$$

由此可见, γ_p 是 M 中以 q 点为基点的非零伦、且长度最短的闭路径. 把 γ_p 视为以点 q 为基点的闭路径并记为 β. β 在 $\pi^{-1}(q)$ 中一点处的提升 $\tilde{\beta}$ 是 $\tilde{M}$ 中连接其端点的最短曲线. 根据第三章的定理 3.5, $\tilde{\beta}$ 是 $\tilde{M}$ 中的测地线, 因而 $\beta = \pi \circ \tilde{\beta}$ 是 M 中的测地线. 所以, 除了 q 点以外, γ_p 处处满足测地线的方程. 特别地, γ_p 在 p 点是光滑的. 所以 γ_p 是 M 中一条闭测地线, 满足引理的要求. 证毕.

定理 3.2 (Synge) 设 (M, g) 是完备的黎曼流形, 其截面曲率 K_M 具有正的下界 a, 即

$$K_M \ge a > 0.$$

(1) 如果 M 的维数 m 是偶数, 则当 M 可定向时, M 是单连通的; 当 M 不可定向时, M 的基本群 $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$.

(2) 如果 M 的维数 m 是奇数, 则 M 必是可定向的.

证明 (1) 根据 Bonnet-Myers 定理, M 是紧致流形. 现假定 M 是可定向的. 如果 M 不是单连通的, 则由推论 2.2, 它的通用覆叠流形 $\tilde{M}$ 是紧致的. 再根据引理 3.1, 在 M 上存在一条非零伦的、且长度最短的闭测地线, 记为

$$\gamma : [0, l] \to M,$$

其中 l 是 γ 的长度. 令 $p = \gamma(0) = \gamma(l)$.

用 $P_l: T_pM \to T_{\gamma(l)}M$ 表示沿 γ 的平行移动．则 P_l 是从 T_pM 到它自身的等距线性同构，并且

$$P_l(\gamma'(0)) = \gamma'(l) = \gamma'(0).$$

因此，$\gamma'(0)$ 是 P_l 的特征值为 1 的特征向量．由于 M 是可定向流形，T_pM 的一个定向 μ_p 沿任何以 p 为基点的闭路径进行连续传播到达 p 点时所得到的定向 $\tilde{\mu}_p$ 必与 μ_p 一致 (参看参考文献 [3, 第二章，命题 6.1])．特别地，对于 T_pM 中任意一个单位正交基 $\{e_i\}$ 则

$$[P_l(e_1), \cdots, P_l(e_m)]$$

给出了 T_pM 的定向 $[e_1, \cdots, e_m]$ 沿 γ 的连续传播．因此

$$P_l: T_pM \to T_pM$$

是行列式为 1 的正交变换．我们知道，任何正交变换的特征值或是成对出现的共轭纯虚数，或是 ± 1．因为 P_l 的行列式为 1，所以，如果 -1 是它的特征值，则其重数必为偶数．由于 M 的维数 m 是偶数，特征值 1 的重数也必定是偶数．于是必存在另一个单位切向量 $v \in T_pM$ 使得 $v \perp \gamma'(0)$，并且 $P_l(v) = v$．

对于任意的 $t \in [0, l]$，定义 $V(t) = P_t(v)$．则 $V = V(t)$ 是沿 γ 平行且处处正交于 γ 的单位向量场．考虑 γ 的变分

$$\Phi: [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M,$$

使得

$$\Phi(t, u) = \exp_{\gamma(t)}(uV(t)), \quad \forall (t, u) \in [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon),$$

则 Φ 的变分向量场为 V．由弧长的第二变分公式 (1.5)，

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2} L(\gamma_u)\bigg|_{u=0} = \langle \mathrm{D}_V V, \gamma' \rangle|_0^l + \int_0^l \{|V'|^2 + R(\gamma', V, \gamma', V)\} \mathrm{d}t. \tag{3.1}$$

对于任意固定的 t，横截曲线

$$\sigma_t(u) = \Phi(t, u), \quad u \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

是测地线，而向量场

$$\tilde{V}(t, u) = \Phi_{*(t,u)}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)$$

是这些测地线的切向量场，因此 $\mathrm{D}_{\tilde{V}} \tilde{V} = 0$．在 (3.1) 式中令 $u = 0$，便得 $\mathrm{D}_V V = 0$，故有

$$\langle \mathrm{D}_V V, \gamma' \rangle|_0^l = 0. \tag{3.2}$$

此外，由于 V 是沿 γ 的平行向量场，

$$V'(t) = \mathrm{D}_{\gamma'(t)} V(t) = 0. \tag{3.3}$$

把 (3.2) 和 (3.3) 式代入 (3.1) 式，并注意到 γ', V 的单位正交性和定理的假设，

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2} L(\gamma_u)\bigg|_{u=0} = -\int_0^l K(\gamma', V) \mathrm{d}t \leq -al < 0.$$

这意味着，当 u 的绝对值充分小时，γ_u 是与 γ 同伦的闭路径，且有 $L(\gamma_u) < L(\gamma)$．这与 γ 的最短性相矛盾．由此可见，M 必定是单连通的．

再设 M 是不可定向的．则有 M 的二重覆叠

$$\pi: \tilde{M} \to M,$$

使得 $\tilde{M}$ 是可定向的光滑流形 (参看参考文献 [25])．设 $\tilde{g}$ 是 $\tilde{M}$ 上的覆叠度量，则黎曼流形 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ 在覆叠映射 π 下是与 (M, g) 局部等距的，因而 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ 是一个偶数维的可定向黎曼流形，并且其截面曲率有正的下界 a．故由前面得到的结论，$\tilde{M}$ 是单连通的．因此，$\tilde{M}$ 是 M 的通用覆叠流形．再注意到 π 是二重覆叠，故 M 的基本群 $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$．

(2) 设 M 的维数 m 是奇数. 如果 M 是不可定向的, 则有 M 的二重黎曼覆叠

$$\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g),$$

使得 $\tilde{M}$ 是可定向的, 其中 $\tilde{g}$ 是覆叠度量. 由于 (M, g) 的完备性, $(\tilde{M}, \tilde{g})$ 也是完备的. 对于任意的 $p \in M$, $\pi^{-1}(p)$ 恰由两个点构成, 不妨设为 $\{\tilde{p}_1, \tilde{p}_2\}$. 则 $\tilde{M}$ 中任意一条连接 $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ 的路径 $\tilde{\gamma}$ 在 π 下的像 $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ 是 M 中以 p 为基点的闭路径, 并且 T_pM 的任意一个定向 μ_p 沿 γ 连续传播到 p 所得到的定向 $\bar{\mu}_p$ 是 μ_p 的翻转定向. 这样的闭路径称为具有 **翻转定向性质**. 反过来, M 中任意一条以 p 为基点、并且具有翻转定向性质的闭路径 γ 都可以提升为 $\tilde{M}$ 中连接 $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ 的路径 $\tilde{\gamma}$, 且有

$$L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma).$$

现在假定 $\tilde{\gamma}$ 是 $\tilde{M}$ 中连接 $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ 的最短测地线, 则 $\gamma_p = \pi \circ \tilde{\gamma}$ 是 M 中以 p 为基点、并且具有翻转定向性质的、长度最短的测地闭路径. 利用引理 3.1 的证明中同样的论证可得, 在 M 中存在一条长度最短的、具有翻转定向性质的闭测地线

$$\gamma : [0, l] \to M,$$

其中 $l = L(\gamma)$, 并且 $\gamma(0) = \gamma(l)$, $\gamma'(0) = \gamma'(l)$. 下面令 $p = \gamma(0)$.

和前面的做法一样, 假定 P_t 是沿曲线 γ 的平行移动. 由于 γ 具有翻转定向性质, P_l 必定翻转 T_pM 的定向, 因而

$$P_l : T_pM \to T_pM$$

是行列式为 -1 的正交变换. 因此, -1 是 P_l 的一个特征值, 并且具有奇数重数. 由于 M 的维数 m 是奇数, P_l 的特征值 1 应具有偶数重数. 已知

$$P_l(\gamma'(0)) = \gamma'(0),$$

故有另一个单位切向量 $v \in T_pM$ 满足 $P_l(v) = v$, 不妨设 $v \perp \gamma'(0)$. 利用与 (1) 相同的讨论, 可以证明: 在以 $V(t) = P_t(v)$ 为变分向量场的变分 $\Phi(t, u) = \exp_{\gamma(t)}(uV(t))$ 下, 测地线 γ 同伦地变为一条长度严格减小的闭路径, 它同样具有翻转定向性质. 这与 γ 的取法矛盾. 证毕.

注记 3.1 利用 Synge 定理不难证明第五章命题 5.5, 证明的细节留给读者作为练习.

§6.4 基本指标引理

设 $\gamma : [0, l] \to M$ 是 m 维黎曼流形 (M, g) 中的一条正规测地线, $l = L(\gamma)$; $\Phi : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ 是 γ 的一个有固定端点的变分, 并且其变分向量场 $U \perp \gamma'$, 于是有如下的弧长第二变分公式 (看 (1.6) 式):

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2} L(\gamma_u)\Big|_{u=0} = \int_0^l \{\langle U', U' \rangle + \langle \mathcal{R}(\gamma', U)\gamma', U \rangle\} \mathrm{d}t.$$

很明显, 上式右端对于任意一个沿 γ 定义的分段光滑向量场 V 都是有意义的, 把它记为 $I_\gamma(V, V)$, 即

$$I_\gamma(V, V) = \int_0^l \{\langle V', V' \rangle + \langle \mathcal{R}(\gamma', V)\gamma', V \rangle\} \mathrm{d}t.$$

这是一个关于 V 的二次型. 将其极化, 即对于任意两个沿 γ 定义的分段光滑向量场 V, W, 令

$$\begin{aligned} I_\gamma(V, W) &= \frac{1}{2}\{I_\gamma(V + W, V + W) - I_\gamma(V, V) - I_\gamma(W, W)\} \\ &= \int_0^l \{\langle V', W' \rangle + \langle \mathcal{R}(\gamma', V)\gamma', W \rangle\} \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{4.1}$$

则可得到双线性形式 $I_\gamma(V, W)$. 在下面用 $\mathscr{V}(\gamma)$ 表示沿测地线 γ 定义的分段光滑向量场构成的集合, 同时定义它的子集合如下:

$$\mathscr{V}_0(\gamma) = \{X \in \mathscr{V}(\gamma);\ X(0) = X(l) = 0\},$$

$$\mathscr{V}^{\perp}(\gamma)=\{X\in\mathscr{V}(\gamma);\ X\perp\gamma'\};\quad \mathscr{V}_0^{\perp}(\gamma)=\mathscr{V}_0(\gamma)\cap\mathscr{V}^{\perp}(\gamma).$$

容易看出，由 (4.1) 定义的映射

$$I_\gamma:\mathscr{V}(\gamma)\times\mathscr{V}(\gamma)\to\mathbb{R}$$

是一个对称的双线性形式.

定义 4.1　双线性形式 I_γ 称为测地线 γ 的 **指标形式**.

为了简化记号，在不会引起混淆的情况下，常用 I 来表示 I_γ，即

$$I(V,W)=I_\gamma(V,W),\quad V,W\in\mathscr{V}(\gamma).$$

作为对照，考虑定义在黎曼流形 (M,g) 上的光滑函数 f. 设 $p\in M$ 是 f 的一个临界点，$(U;x^i)$ 是 p 点的任意一个局部坐标系，则 f 的 Hessian 张量

$$\mathrm{Hess}\,(f)=\mathrm{D}(\mathrm{d}f)$$

在 p 点的分量恰好是 f 的二次偏导数：

$$(\mathrm{Hess}\,(f))\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}-\Gamma_{ij}^k\frac{\partial f}{\partial x^k}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}.$$

现在，测地线 γ 是弧长泛函 $L(\gamma_u)$ 的临界点，它的指标形式 I 就相当于函数 L 的 Hessian. 事实上，根据弧长的第二变分公式以及指标形式的定义，下列命题成立：

命题 4.1　假设 γ 如前，则对于 γ 的任意一个有固定端点的变分 Φ，有

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}L(\gamma_u)\right|_{u=0}=I(U^{\perp},U^{\perp}),$$

其中 U 是 Φ 的变分向量场，$U^{\perp}$ 是 U 关于测地线 γ 的法分量.

设 $V,W\in\mathscr{V}(\gamma)$. 如果向量场 V,W 在区间 $[t_{i-1},t_i]$ 上是光滑的，则

$$\langle V',W'\rangle=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V',W\rangle-\langle V'',W\rangle.$$

故 $I(V,W)$ 可以改写为

$$I(V,W)=\sum_{i=1}^{r}\langle V'(t),W(t)\rangle\Big|_{t_{i-1}}^{t_i}-\int_0^l\langle V''-\mathcal{R}(\gamma',V)\gamma',W\rangle\mathrm{d}t,\qquad(4.2)$$

其中 $0=t_0<t_1<\cdots<t_r=l$ 是区间 $[0,l]$ 的一个划分，使得 V 在每一个小区间 $[t_{i-1},t_i]$ 上的限制都是光滑的.

命题 4.2　假设 γ 同上，J 是沿 γ 的一个 Jacobi 场，则对于任意的 $W\in\mathscr{V}(\gamma)$，有

$$I(J,W)=\langle J',W\rangle|_0^l.$$

证明　因 J 是一个 Jacobi 场，故而满足 Jacobi 场方程

$$J''=\mathcal{R}(\gamma',J)\gamma'.$$

由于 J 沿 γ 是光滑的，以 $V=J$ 代入 (4.2) 式便得到我们所要的结论.

引理 4.3　设 V 是在 (M,g) 中定义在光滑曲线 $\gamma:[0,l]\to M$ 上的光滑切向量场，且 $V(0)=0$，则存在沿 γ 定义的光滑切向量场 $A(t)$，使得

$$V(t)=tA(t),$$

并且 $A(0)=V'(0)$.

证明　设 $\{e_i(t)\}$ 是沿 γ 平行的单位正交标架场，则有

$$V(t)=\sum v^i(t)e_i(t),\quad v^i(0)=0.$$

根据第一章的引理 4.1，

$$v^i(t)=ta^i(t),$$

其中 $a^i(t)$ 是光滑函数，并且 $a^i(0)=v^{i\prime}(0)$. 命

$$A(t)=\sum a^i(t)e_i(t),$$

则 $V(t) = tA(t)$, 并且 $A(0) = V'(0)$.

下面证明一个十分重要的引理.

引理 4.4 (基本指标引理) 设 $\gamma : [0,l] \to M$ 是 m 维黎曼流形 (M,g) 中的一条正规测地线. 假定 $p = \gamma(0)$ 在 γ 上没有共轭点, 并且 $J = J(t)$ 是沿 γ 的一个 Jacobi 场. 则对于满足条件

$$X(0) = J(0), \quad X(l) = J(l)$$

的任意一个向量场 $X \in \mathscr{V}(\gamma)$ 都有

$$I(X, X) \geq I(J, J),$$

并且等号成立当且仅当 $X = J$.

证明 任意取定 $X \in \mathscr{V}(\gamma)$, 使得

$$X(0) = J(0), \quad X(l) = J(l).$$

下面将分两种情形来完成引理的证明.

情形 1: $J(0) = 0$.

在切空间 $T_{\gamma(l)}M$ 中取一个单位正交基底 $\{e_i\}$. 由于 $\gamma(l)$ 不是 p 点的共轭点, 根据第五章的定理 2.3, 对于每一个 i, $1 \leq i \leq m$, 存在沿 γ 的 Jacobi 场 J_i, 使得

$$J_i(0) = 0, \quad J_i(l) = e_i.$$

根据第五章的定理 2.1, 向量场组 $\{J_i\}$ 在区间 $(0,l]$ 上是处处线性无关的.

由于 $J_i(0) = 0$, 根据引理 4.3, 存在沿 γ 定义的光滑向量场 $A_i(t)$, 使得

$$J_i(t) = tA_i(t), \quad t \in [0,l],$$

并且 $A_i(0) = J_i'(0)$. 我们断言: $\{A_i(t)\}$ 在 $[0,l]$ 上处处线性无关. 为了证明这一点, 注意到

$$A_i(t) = \frac{1}{t} J_i(t),$$

它们在 $(0,l]$ 上是处处线性无关的, 所以只需要说明向量组 $\{A_i(0)\}$ 是线性无关的即可. 事实上, 对于任意一组实数 λ^i, $i = 1, \cdots, m$, 向量场

$$V(t) = \sum_i \lambda^i J_i(t)$$

是沿 γ 的 Jacobi 场. 如果

$$\sum_i \lambda^i A_i(0) = 0, \text{ 即 } \sum_i \lambda^i J_i'(0) = 0,$$

则有

$$V(0) = 0, \quad V'(0) = 0,$$

从而由第五章的定理 1.2, $V \equiv 0$, 故

$$\sum_i \lambda^i J_i(t) \equiv 0.$$

由于 $\{J_i(t)\}$ 在 $(0,l]$ 上处处线性无关, 所以

$$\lambda^1 = \cdots = \lambda^m = 0.$$

由此可见, $\{A_i(0)\}$ 是线性无关的.

于是在 $[0,l]$ 上存在分段光滑函数 $\tilde{X}^i(t)$, 使得

$$X(t) = \sum_{i=1}^m \tilde{X}^i(t) A_i(t), \quad \tilde{X}^i(0) = 0.$$

根据第一章的引理 4.1, 不难知道, 存在分段光滑函数 $X^i(t)$, 使得

$$\tilde{X}^i(t) = tX^i(t).$$

由于 $J_i(t) = tA_i(t)$, 故得到 $X(t)$ 关于 $J_i(t)$ 的表达式

$$X(t) = \sum_{i=1}^m X^i(t) J_i(t). \tag{4.3}$$

再令

$$\tilde{J}(t)=\sum_{i=1}^{m}X^i(l)J_i(t), \tag{4.4}$$

则 $\tilde{J}$ 是沿 γ 的 Jacobi 场，并且

$$\tilde{J}(0)=\sum_i X^i(l)J_i(0)=0=J(0),$$

$$\tilde{J}(l)=\sum_i X^i(l)J_i(l)=X(l)=J(l).$$

利用第五章定理 2.3 的唯一性得知 $\tilde{J}=J$，即

$$J=\sum_i X^i(l)J_i. \tag{4.5}$$

于是根据推论 4.2,

$$\begin{aligned}I(J,J)=&\langle J'(t),J(t)\rangle|_0^l=\langle J'(l),J(l)\rangle\\=&\sum_{i,j}X^i(l)X^j(l)\langle J_i'(l),J_j(l)\rangle.\end{aligned} \tag{4.6}$$

另一方面，由 (4.3) 式得到

$$\begin{aligned}\langle X',X'\rangle=&\sum_{i,j}\{X^iX^j\langle J_i',J_j'\rangle+2X^iX^{j\prime}\langle J_i',J_j\rangle+X^{i\prime}X^{j\prime}\langle J_i,J_j\rangle\}\\=&\sum_{i,j}\{(X^iX^j\langle J_i',J_j\rangle)'-X^iX^j\langle J_i'',J_j\rangle\\&+(X^iX^{j\prime}-X^{i\prime}X^j)\langle J_i',J_j\rangle+\langle X^{i\prime}J_i,X^{j\prime}J_j\rangle\}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

由于 J_i,J_j 满足 Jacobi 方程，故有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\langle J_i',J_j\rangle-\langle J_i,J_j'\rangle)=&\langle J_i'',J_j\rangle-\langle J_i,J_j''\rangle\\=&\langle\mathcal{R}(\gamma',J_i)\gamma',J_j\rangle-\langle J_i,\mathcal{R}(\gamma',J_j)\gamma'\rangle\\=&R(\gamma',J_i,\gamma',J_j)-R(\gamma',J_j,\gamma',J_i)=0,\end{aligned}$$

因而 $\langle J_i',J_j\rangle-\langle J_i,J_j'\rangle=c$(常数). 令 $t=0$ 得知 $c=0$, 故

$$\langle J_i',J_j\rangle=\langle J_i,J_j'\rangle.$$

于是,

$$\sum_{i,j}(X^iX^{j\prime}-X^{i\prime}X^j)\langle J_i',J_j\rangle=\sum_{i,j}X^iX^{j\prime}(\langle J_i',J_j\rangle-\langle J_i,J_j'\rangle)=0.$$

代入 (4.7) 式得到

$$\langle X',X'\rangle=\sum_{i,j}\{(X^iX^j\langle J_i',J_j\rangle)'-X^iX^j\langle J_i'',J_j\rangle\}+\left|\sum_i X^{i\prime}J_i\right|^2. \tag{4.8}$$

因此，由指标形式 $I(X,X)$ 的定义以及 (4.8) 和 (4.6) 式得到

$$\begin{aligned}I(X,X)=&\int_0^l\{\langle X',X'\rangle+\langle\mathcal{R}(\gamma',X)\gamma',X\rangle\}\mathrm{d}t\\=&(X^iX^j\langle J_i',J_j\rangle)|_0^l+\int_0^l\left|\sum_i X^{i\prime}J_i\right|^2\mathrm{d}t\\&-\int_0^l\sum_{i,j}X^iX^j\langle J_i''-\mathcal{R}(\gamma',J_i)\gamma',J_j\rangle\mathrm{d}t\\=&I(J,J)+\int_0^l\left|\sum_i X^{i\prime}J_i\right|^2\mathrm{d}t\\\geq&I(J,J).\end{aligned}$$

显然，上式中的等号成立当且仅当

$$\sum_i X^{i\prime}(t)J_i(t)=0,\quad t\in[0,l]. \tag{4.9}$$

由于在 $(0,l]$ 上 $\{J_i(t)\}$ 是处处线性无关的，故 (4.9) 式等价于

$$X^{i\prime}(t)=0,$$

即 $X^i(t)=X^i(l)$ 是常数. 所以，由 (4.5) 式得知

$$X(t)=\sum_i X^i(t)J_i(t)=\sum_i X^i(l)J_i(t)=J(t).$$

情形 2: $J(0)\neq 0$.

令

$$\tilde{J}=0,\quad \tilde{X}=X-J,$$

则 $\tilde{X}(0)=0=\tilde{J}(0)$, $\tilde{X}(l)=0=\tilde{J}(l)$. 于是利用情形 1° 的结论, 可得

$$I(X-J,X-J)=I(\tilde{X},\tilde{X})\geq I(\tilde{J},\tilde{J})=0, \tag{4.10}$$

其中等号成立的充分必要条件是 $\tilde{X}=\tilde{J}=0$, 即 $X=J$.

将 (4.10) 式左端展开得

$$I(X-J,X-J)=I(X,X)-2I(X,J)+I(J,J).$$

因为 J 是 Jacobi 场, 所以由命题 4.2 得到

$$I(X,J)=\langle J',X\rangle|_0^l=\langle J',J\rangle|_0^l=I(J,J),$$

故 $I(X-J,X-J)=I(X,X)-I(J,J)$. 因此, (4.10) 式等价于

$$I(X,X)\geq I(J,J),$$

并且其中等号成立当且仅当 $X=J$, 引理得证.

下面利用基本指标引理来研究测地线的最短性.

定理 4.5 设 $\gamma(t)(0\leq t\leq l)$ 是黎曼流形 (M,g) 上的一条正规测地线, 并且在 γ 上没有点 $p=\gamma(0)$ 的共轭点; 记 $\gamma(l)=q$. 则 γ 的指标形式 I 在集合 $\mathscr{V}_0(\gamma)$ 上是正定的. 特别地, 在充分靠近 γ 的所有连接 p,q 两点的分段光滑曲线中, 以 γ 的长度为最短.

证明 因为 q 不是 p 点的共轭点, 所以沿 γ 在 p,q 处取零值的 Jacobi 场只有零向量场. 根据引理 4.4, 对于任意的 $X\in\mathscr{V}_0(\gamma)$, 都有

$$I(X,X)\geq I(0,0)=0,$$

并且等号成立当且仅当 $X=0$. 这就证明了指标形式 I 在 $\mathscr{V}_0(\gamma)$ 上的正定性.

设 Φ 是测地线 γ 的任意一个分段光滑的有固定端点的变分, 其变分向量场为 U. 则 U 关于 γ 的法分量 $U^\perp\in\mathscr{V}_0^\perp(\gamma)\subset\mathscr{V}_0(\gamma)$. 由命题 4.1 知

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}L(\gamma_u)\Big|_{u=0}=I(U^\perp,U^\perp)\geq 0,$$

并且当 $U^\perp\neq 0$ 时, 上式中的大于号成立. 故在 $u=0$ 处, 即在 $\gamma_0=\gamma$ 处, $L(\gamma_u)$ 达到极小值. 证毕.

定理 4.6 若在正规测地线 $\gamma(t)(0\leq t\leq l)$ 的内部没有点 $p=\gamma(0)$ 的共轭点, 而 $q=\gamma(l)$ 是点 p 的共轭点 (即点 q 是点 p 沿测地线 γ 的第一个共轭点), 则 γ 的指标形式 I 在 $\mathscr{V}_0^\perp(\gamma)$ 上是半正定的, 并且 q 点关于 p 点的共轭重数等于 I 在 $\mathscr{V}_0^\perp(\gamma)$ 中的零化子空间

$$\mathscr{N}=\{X\in\mathscr{V}_0^\perp(\gamma);\ \forall Y\in\mathscr{V}_0^\perp(\gamma), I(X,Y)=0\}$$

的维数.

证明 由于 q 是 p 点沿 γ 的共轭点, 由第五章的定理 2.1, 存在沿 γ 的非零 Jacobi 场 J, 使得 $J(0)=J(l)=0$. 再由命题 4.2,

$$I(J,J)=\langle J',J\rangle|_0^l=0.$$

对于任意的 $a,b\in[0,l], a<b$, 以及 $\forall X\in\mathscr{V}(\gamma)$, 定义

$$I_a^b(X,X)=\int_a^b\{|X'(t)|^2+\langle\mathcal{R}(\gamma',X)\gamma',X\rangle\}\mathrm{d}t.$$

则有 $I(X,X)=I_0^l(X,X)$.

任意取定 $X\in\mathscr{V}_0^\perp(\gamma)$. 下面要构造一族向量场 $X_\alpha\in\mathscr{V}_0^\perp(\gamma)$, $\alpha\in(0,l)$, 使得

$$X_\alpha|_{[\alpha,l]}\equiv 0,$$

并且当 $\alpha\to l$ 时, $X_\alpha(t)$ 在 $[0,l]$ 上一致地收敛于 $X(t)$. 具体的作法如下:

设 $\{e_i(t)\}$ 是沿 γ 平行的单位正交标架场，使得 $e_m(t)=\gamma'(t)$，则 $X(t)$ 可以表示为

$$X(t)=\sum_i X^i(t)e_i(t),\quad X^m(t)\equiv 0.$$

对于 $0<\alpha<l$，令

$$X_\alpha(t)=\begin{cases}\sum_i X^i\left(\frac{l}{\alpha}t\right)e_i(t), & 0\le t\le\alpha,\\ 0, & \alpha\le t\le l.\end{cases}$$

则

$$|X_\alpha(t)-X(t)|^2=\begin{cases}\sum_i\left(X^i\left(\frac{l}{\alpha}t\right)-X^i(t)\right)^2, & 0\le t\le\alpha,\\ \sum_i(X^i(t))^2, & \alpha\le t\le l.\end{cases}$$

利用 $X^i(t)$ 在 $[0,l]$ 上的一致连续性以及条件

$$\lim_{t\to l}X^i(t)=0,$$

不难证明，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<l-\alpha<\delta$ 时，对于所有的 $t\in[0,l]$ 一致地有

$$|X_\alpha(t)-X(t)|<\varepsilon,$$

即 $X_\alpha(t)$ 在 $[0,l]$ 上一致地收敛于 $X(t)$. 对于每一个 α，取定 $\tilde\alpha\in(\alpha,l)$，则 p 在 $\gamma|_{[0,\tilde\alpha]}$ 上没有共轭点. 注意到

$$X_\alpha|_{[\tilde\alpha,l]}\equiv 0,$$

$X_\alpha|_{[0,\tilde\alpha]}\in\mathscr{V}_0(\gamma|_{[0,\tilde\alpha]})$. 于是由定理 4.5,

$$I_0^l(X_\alpha,X_\alpha)=I_0^{\tilde\alpha}(X_\alpha,X_\alpha)\ge 0.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}I_0^l(X_\alpha,X_\alpha)&=I_0^\alpha(X_\alpha,X_\alpha)\\&=\int_0^\alpha\{|X_\alpha'(t)|^2+\langle\mathcal{R}(\gamma',X_\alpha)\gamma',X_\alpha\rangle\}\mathrm{d}t\\&=\left(\frac{l}{\alpha}\right)^2\int_0^\alpha\sum_i\left(X^{i\prime}\left(\frac{l}{\alpha}t\right)\right)^2\mathrm{d}t\\&\quad+\int_0^\alpha\langle\mathcal{R}(\gamma',X_\alpha)\gamma',X_\alpha\rangle\mathrm{d}t\to I_0^l(X,X),\quad \alpha\to l.\end{aligned}$$

因此，$I(X,X)=I_0^l(X,X)\ge 0$. 这就证明了指标形式 I 在 $\mathscr{V}_0^\perp(\gamma)$ 上的半正定性.

再设 J 是沿 γ 的 Jacobi 场，满足 $J(0)=J(l)=0$. 则由命题 4.2，对于任意的 $Y\in\mathscr{V}_0^\perp(\gamma)$ 有

$$I(J,Y)=\langle J'(t),Y(t)\rangle|_0^l=0,$$

即 $J\in\mathscr{N}$. 反过来，假设 $X\in\mathscr{N}$，则存在区间 $[0,l]$ 的一个划分

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_r=l,$$

使得 $X|_{[t_{i-1},t_i]}$ 是光滑的. 选取分段光滑函数 $f:[0,l]\to\mathbb{R}$，使得对于任意的 i，$f(t_i)=0$，f 在 (t_{i-1},t_i) 内光滑且大于零. 令

$$Y(t)=f(t)\cdot(X''(t)-\mathcal{R}(\gamma',X)\gamma'),$$

则 $Y\in\mathscr{V}_0^\perp(\gamma)$. 因为 $X\in\mathscr{N}$，所以

$$\begin{aligned}0&=I(X,Y)\\&=\int_0^l\{\langle X',Y'\rangle+\langle\mathcal{R}(\gamma',X)\gamma',Y\rangle\}\mathrm{d}t\\&=\sum_{i=1}^r\langle X',Y\rangle|_{t_{i-1}}^{t_i}-\int_0^l\langle X''-\mathcal{R}(\gamma',X)\gamma',Y\rangle\mathrm{d}t\\&=-\int_0^l f\cdot|X''-\mathcal{R}(\gamma',X)\gamma'|^2\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

注意到 f 在每个子区间 (t_{i-1},t_i) 内恒大于零. 所以

$$|X''-\mathcal{R}(\gamma',X)\gamma'|=0,$$

即有 $X''=\mathcal{R}(\gamma',X)\gamma'$. 因此, X 是沿 $\gamma|_{(t_{i-1},t_i)}$ 的 Jacobi 场, $1\le i\le r$. 要证明 X 是沿 γ 的 Jacobi 场, 还需要说明 X 沿 γ 是光滑的, 即

$$X'(t_i^-)=X'(t_i^+),\quad 1\le i\le r-1.$$

为此, 取 $Y\in\mathscr{V}_0^\perp(\gamma)$, 使得

$$Y(t_i)=X'(t_i^+)-X'(t_i^-),\quad 1\le i\le r-1.$$

则有

$$\begin{aligned}I(X,Y)&=\sum_{i=1}^{r}\langle X'(t),Y(t)\rangle|_{t_{i-1}}^{t_i}\\&=-\sum_{i=1}^{r-1}\langle X'(t_i^+)-X'(t_i^-),Y(t_i)\rangle\\&=-\sum_{i=1}^{r-1}|Y(t_i)|^2=0.\end{aligned}$$

于是, $Y(t_i)=0$, 即 $X'(t_i^+)=X'(t_i^-)$. 再根据 Jacobi 方程解的唯一性定理作递归推理, 容易得知 X 是光滑的, 因而是沿 γ 的 Jacobi 场.

至此, 已经证明了测地线 γ 的指标形式 I 的零化空间 $\mathscr{N}$ 和沿 γ 定义并且在两个端点处取零值的 Jacobi 场的空间是重合的, 即

$$\mathscr{N}=\mathscr{J}_0^\perp(\gamma).$$

因此, $\dim\mathscr{N}$ 等于点 $q=\gamma(l)$ 关于点 $p=\gamma(0)$ 的共轭重数 (参看第五章的 §5.2). 证毕.

注记 4.1 不难验证, 如果在上述证明中, 把 $\mathscr{V}_0^\perp(\gamma)$ 换成 $\mathscr{V}_0(\gamma)$, 便可得到如下的定理:

定理 4.6′ 若在正规测地线 $\gamma(t)(0\le t\le l)$ 的内部没有点 $p=\gamma(0)$ 的共轭点, 而 $q=\gamma(l)$ 是点 p 的共轭点 (即点 q 是点 p 沿测地线 γ 的第一个共轭点), 则 γ 的指标形式 I 在 $\mathscr{V}_0(\gamma)$ 上是半正定的, 并且 q 点关于 p 点的共轭重数等于 I 在 $\mathscr{V}_0(\gamma)$ 中的零化子空间

$$\mathscr{N}'=\{X\in\mathscr{V}_0(\gamma);\ \forall Y\in\mathscr{V}_0(\gamma),I(X,Y)=0\}$$

的维数.

定理 4.7 如果在测地线 γ 的内部含有点 $p=\gamma(0)$ 的共轭点, 则指标形式 I 在 $\mathscr{V}_0^\perp(\gamma)$ 上是不定的; 因而必有非零向量场 $X\in\mathscr{V}_0^\perp(\gamma)$, 使得

$$I(X,X)<0.$$

特别地, 此时的测地线 γ 一定不是连接点 p 和 $q=\gamma(l)$ 的最短曲线.

证明 由假定可知, 存在 $0<b<l$, 使得 $\tilde{q}=\gamma(b)$ 是 p 点沿 γ 的第一个共轭点. 根据第五章的定理 2.1, 存在沿测地线 $\gamma|_{[0,b]}$ 的 Jacobi 场 $J_1\ne0$ 使得

$$J_1(0)=J_1(b)=0.$$

取充分小的正数 ε, 使得 $b-\varepsilon>0$, $b+\varepsilon<l$, 且在 $\gamma|_{[b-\varepsilon,b+\varepsilon]}$ 上没有共轭点对. 由于 $\gamma(b-\varepsilon)$ 不是 p 点的共轭点, $J_1(b-\varepsilon)\ne0$. 于是存在沿 $\gamma|_{[b-\varepsilon,b+\varepsilon]}$ 的 Jacobi 场 J_2, 使得

$$J_2(b-\varepsilon)=J_1(b-\varepsilon),\quad J_2(b+\varepsilon)=0.$$

根据第五章的推论 1.6, 不难知道 J_1 和 J_2 都是与 γ 正交的. 构造向量场 X 如下 (参见图 6):

$$X(t)=\begin{cases}J_1(t), & 0\le t\le b-\varepsilon,\\ J_2(t), & b-\varepsilon\le t\le b+\varepsilon,\\ 0, & b+\varepsilon\le t\le l,\end{cases}$$

则有 $X \in \mathscr{V}_0^-(\gamma)$. 另外，令

$$\bar{J}_1(t) = \begin{cases} J_1(t), & b-\varepsilon \le t \le b, \\ 0, & b \le t \le b+\varepsilon. \end{cases}$$

由于 J_1 是非零 Jacobi 场，$\bar{J}_1$ 在 $t=b$ 处是不可微的，因而不是沿 $\gamma|_{[b-\varepsilon,b+\varepsilon]}$ 的 Jacobi 场. 因此 $\bar{J}_1 \ne J_2$. 根据基本指标引理有

$$\begin{aligned} I(X,X) &= I_0^{b-\varepsilon}(X,X) + I_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon}(X,X) \\ &= I_0^{b-\varepsilon}(J_1,J_1) + I_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon}(J_2,J_2) \\ &< I_0^{b-\varepsilon}(J_1,J_1) + I_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon}(\bar{J}_1,\bar{J}_1). \end{aligned}$$

于是

$$I(X,X) < I_0^{b-\varepsilon}(J_1,J_1) + I_{b-\varepsilon}^{b}(J_1,J_1) = I_0^b(J_1,J_1) = \langle J_1', J_1\rangle|_0^b = 0.$$

在另一方面，任取一点 $b_1 \in (0,b)$. 由于 $p=\gamma(0)$ 在测地线 $\gamma|_{[0,b_1]}$ 上没有共轭点，$I_0^{b_1}$ 在 $\mathscr{V}_0^-(\gamma|_{[0,b_1]})$ 上是正定的. 再取一个非零向量场 $Y_1 \in \mathscr{V}_0^\perp(\gamma|_{[0,b_1]})$ 使得 $I_0^{b_1}(Y_1,Y_1) > 0$, 并设

$$Y = \begin{cases} Y_1, & 0 \le t \le b_1, \\ 0, & b_1 \le t \le l. \end{cases}$$

则 $I(Y,Y) = I_0^{b_1}(Y_1,Y_1) > 0$. 因此，$I$ 在 $\mathscr{V}_0^\perp(\gamma)$ 上确实是不定的.

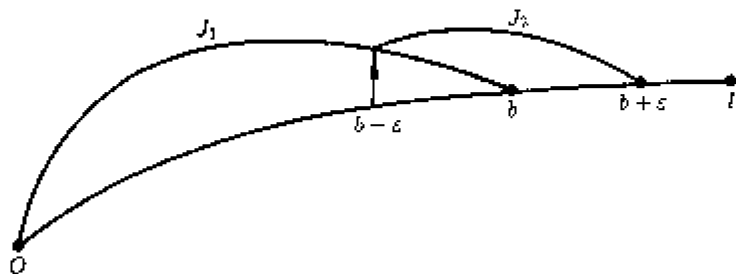


图　6

如上所构造的 X 是沿 γ 定义并且在两个端点处取零值、与 γ 处处正交的分段光滑向量场. 取定 γ 的一个以 X 为变分向量场的有固定端点的变分 Φ, 则由命题 4.1 可知

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}L(\gamma_u)\right|_{u=0} = I(X,X) < 0.$$

此式表明测地线 γ 在曲线族 $\{\gamma_u\}$ 中取到弧长的最大值，因而不可能是连接 p,q 两点的最短线. 定理得证.

现在已经具备必要的条件来叙述著名的 Morse 指数定理. 设

$$\gamma(t),\quad t\in[0,l]$$

是黎曼流形 (M,g) 上的一条正规测地线. 对于任意的 $b\in[0,l]$, 用 $\nu(b)$ 表示指标形式 I_0^b 在空间 $\mathscr{V}_0^\perp(\gamma|_{[0,b]})$ 中的零化子空间的维数，也就是点 $\gamma(b)$ 关于点 $p=\gamma(0)$ 的共轭重数. 当 $\gamma(b)$ 不是 p 的共轭点时，$\nu(b)=0$. 此外，用 $i(b)$ 表示 $\mathscr{V}_0^\perp(\gamma|_{[0,b]})$ 中使指标形式 I_0^b 为负定的极大子空间的维数，并称之为指标形式 I_0^b 的指数或测地线 $\gamma:[0,b]\to M$ 的指数.

Morse 指数定理　任意一条正规测地线 $\gamma:[0,l]\to M$ 的指数是有限的，并且等于点 $p=\gamma(0)$ 在测地线 $\gamma|_{[0,l)}$ 上所有共轭点的重数之和，即

$$i(l) = \sum_{t<l}\nu(t) < +\infty.$$

定理的证明可以查阅参考文献 [5, §9] 或 [15, 第 4 章].

§6.5　Rauch 比较定理

Gauss 引理告诉我们，如果把黎曼流形在点 p 的切空间看作截面曲率为零的欧氏空间，则指数映射 $\exp_p$ 保持与径向测地线的正交性不变，并且沿径向是保长的. 至于映射 $\exp_p$ 在与径向测地线正交的向

量上的作用在长度上产生的影响则和黎曼流形本身的截面曲率密切相关 (参看第五章的推论 1.10).

另一方面, 常曲率空间是最简单的黎曼流形; 因此, 要想了解一般的黎曼流形的性状, 一种有效的手段就是将它与某个适当的常曲率空间进行比较. 在通常情况下, 这个常曲率空间的曲率是所研究的黎曼流形的截面曲率的上界或下界. 本节要讨论的 Rauch 比较定理将实现这种比较. 在此介绍并详细证明 Rauch 比较定理的原因是这套理论和方法已经成为研究黎曼几何以及黎曼流形上的函数论的强有力工具. 除了 Rauch 比较定理外, 还有别的不同形式的比较定理, 例如 Toponogov 比较定理, 体积比较定理, Laplace 比较定理, Hessian 比较定理等等, 它们遵循的原则和证明的方法有共同之处, 在这里就不多介绍了, 读者可以参看参考文献 [15] 和 [5, §8, §11].

定理 5.1(Rauch 比较定理) 假设 $M, \tilde{M}$ 分别是 $m, \tilde{m}(m \leq \tilde{m})$ 维黎曼流形, $K, \tilde{K}$ 表示 $M, \tilde{M}$ 的截面曲率; $\gamma(t), \tilde{\gamma}(t)$ $(t \in [0, l])$ 分别是 M 和 $\tilde{M}$ 上的正规测地线, $\tilde{\gamma}(0)$ 在 $\tilde{\gamma}$ 上无共轭点; J 和 $\tilde{J}$ 是沿 $\gamma, \tilde{\gamma}$ 的 Jacobi 场, 使得 $J(0), \tilde{J}(0)$ 分别与 $\gamma, \tilde{\gamma}$ 在 $t = 0$ 处相切, 并满足条件

$$
\begin{aligned}
&\langle J(0), \gamma'(0)\rangle = \langle \tilde{J}(0), \tilde{\gamma}'(0)\rangle, \quad |J'(0)| = |\tilde{J}'(0)|,\\
&\angle(\gamma'(0), J'(0)) = \angle(\tilde{\gamma}'(0), \tilde{J}'(0)).
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

如果对于任意的 $t \in [0, l]$, 以及任意的

$$X \in T_{\gamma(t)}M \ (X \wedge \gamma' \neq 0), \quad \tilde{X} \in T_{\tilde{\gamma}(t)}\tilde{M} \ (\tilde{X} \wedge \tilde{\gamma}' \neq 0),$$

都有

$$K(\gamma', X) \leq \tilde{K}(\tilde{\gamma}', \tilde{X}),$$

则对于任意的 $t \in [0, l]$ 有不等式 $|J(t)| \geq |\tilde{J}(t)|$.

证明 首先考虑 $J \perp \gamma'$, $\tilde{J} \perp \tilde{\gamma}'$ 的情形. 此时,

$$J(0) = \tilde{J}(0) = 0, \quad |J'(0)| = |\tilde{J}'(0)|. \tag{5.2}$$

不妨设 $\tilde{J}$ 是非零 Jacobi 场, 否则结论自明. 由于在 $\tilde{\gamma}$ 上没有 $\tilde{\gamma}(0)$ 的共轭点, 根据第五章的定理 2.1, 函数 $|\tilde{J}(t)|$ 除了 $t = 0$ 之外没有其他零点. 要证明的结论是

$$\frac{|J(t)|^2}{|\tilde{J}(t)|^2} \geq 1, \quad \forall t \in (0, l]. \tag{5.3}$$

利用 L'Hospital 法则和 (5.1) 式得到

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{|J(t)|^2}{|\tilde{J}(t)|^2} &= \lim_{t\to 0}\frac{\langle J'(t), J(t)\rangle}{\langle \tilde{J}'(t), \tilde{J}(t)\rangle}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\langle J''(t), J(t)\rangle + \langle J'(t), J'(t)\rangle}{\langle \tilde{J}''(t), \tilde{J}(t)\rangle + \langle \tilde{J}'(t), \tilde{J}'(t)\rangle}\\
&= \frac{|J'(0)|^2}{|\tilde{J}'(0)|^2} = 1.
\end{aligned}
$$

因此, 只需要证明 $\dfrac{|J(t)|^2}{|\tilde{J}(t)|^2}$ 是 t 的增函数, 即对于任意的 $t > 0$ 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{|J(t)|^2}{|\tilde{J}(t)|^2}\right) \geq 0.$$

又因为在 $J(t) \neq 0$ 的点处,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{|J(t)|^2}{|\tilde{J}(t)|^2}\right) &= \frac{\langle J', J\rangle}{\langle \tilde{J}, \tilde{J}\rangle} - \frac{\langle J, J\rangle\langle \tilde{J}', \tilde{J}\rangle}{\langle \tilde{J}, \tilde{J}\rangle^2}\\
&= \frac{\langle J, J\rangle}{\langle \tilde{J}, \tilde{J}\rangle}\left(\frac{\langle J', J\rangle}{\langle J, J\rangle} - \frac{\langle \tilde{J}', \tilde{J}\rangle}{\langle \tilde{J}, \tilde{J}\rangle}\right).
\end{aligned}
$$

所以, 只需要证明 J 在 $(0, l]$ 上处处不为零并且

$$\frac{\langle J', J\rangle}{\langle J, J\rangle} \geq \frac{\langle \tilde{J}', \tilde{J}\rangle}{\langle \tilde{J}, \tilde{J}\rangle}, \quad t \in (0, l]. \tag{5.4}$$

假定 $r \in (0, l]$, 使得 Jacobi 场 J 在 $(0, r)$ 上无零点. 首先要证明 (5.4) 式在区间 $(0, r)$ 上成立. 对于任意取定的 $t_1 \in (0, r)$, 由于

$J(t_1)\neq 0$, 可以令

$$W_{t_1}(t)=\frac{J(t)}{|J(t_1)|},\quad \tilde{W}_{t_1}(t)=\frac{\tilde{J}(t)}{|\tilde{J}(t_1)|}.$$

则 (5.4) 式在 $t=t_1$ 处成立成立当且仅当

$$\langle W_{t_1}'(t),W_{t_1}(t)\rangle|_{t=t_1}\geq\langle\tilde{W}_{t_1}'(t),\tilde{W}_{t_1}(t)\rangle|_{t=t_1}. \tag{5.5}$$

因为 $W_{t_1},\tilde{W}_{t_1}$ 分别是 γ 和 $\tilde{\gamma}$ 上在 $t=0$ 处取零值的 Jacobi 场，所以由命题 4.1 可知

$$\langle W_{t_1}'(t),W_{t_1}(t)\rangle|_{t=t_1}=I_0^{t_1}(W_{t_1},W_{t_1}),$$
$$\langle\tilde{W}_{t_1}'(t),\tilde{W}_{t_1}(t)\rangle|_{t=t_1}=\tilde{I}_0^{t_1}(\tilde{W}_{t_1},\tilde{W}_{t_1}).$$

这里的 I 和 $\tilde{I}$ 分别是 $M,\tilde{M}$ 中沿测地线 $\gamma,\tilde{\gamma}$ 的指标形式. 这样，要证明的 (5.5) 式就等价于指标形式的不等式

$$I_0^{t_1}(W_{t_1},W_{t_1})\geq\tilde{I}_0^{t_1}(\tilde{W}_{t_1},\tilde{W}_{t_1}). \tag{5.6}$$

在下面把 M 中沿 $\gamma|_{[0,t_1]}$ 定义的向量场 W_{t_1} 转变为 $\tilde{M}$ 中沿 $\tilde{\gamma}|_{[0,t_1]}$ 的向量场 $U(t)$, 使得

$$|U(t)|=|W_{t_1}(t)|,\quad |U'(t)|=|W_{t_1}'(t)|,$$

并且 U 和 $\tilde{W}_{t_1}$ 在 $\tilde{\gamma}|_{[0,t_1]}$ 的两端取相同的值. 这样，对于

$$\tilde{I}_0^{t_1}(U,U)\ 和\ \tilde{I}_0^{t_1}(\tilde{W}_{t_1},\tilde{W}_{t_1})$$

就可以运用基本指标引理作比较; 同时根据关于 $M,\tilde{M}$ 的截面曲率的假定对于 $\tilde{I}_0^{t_1}(U,U)$ 和 $I_0^{t_1}(W_{t_1},W_{t_1})$ 进行比较.

沿 $\gamma,\tilde{\gamma}$ 分别取平行的单位正交标架场 $\{e_i(t)\}$ 和 $\{\tilde{e}_i(t)\}$, 使得

$$e_1(t)=\gamma'(t),\quad e_2(t_1)=W_{t_1}(t_1),$$
$$\tilde{e}_1(t)=\tilde{\gamma}'(t),\quad \tilde{e}_2(t_1)=\tilde{W}_{t_1}(t_1).$$

因为 $J\perp\gamma'$, 所以可设

$$W_{t_1}(t)=\sum_{i=2}^m W^i(t)e_i(t),$$

其中的 $W^i(t)$ 满足条件

$$W^2(0)=\cdots=W^m(0)=0,$$
$$W^2(t_1)=1,\quad W^3(t_1)=\cdots=W^m(t_1)=0.$$

沿测地线 $\tilde{\gamma}$ 定义向量场 $U(t)=\sum\limits_{i=2}^m W^i(t)\tilde{e}_i(t)$, 则

$$U(0)=\tilde{W}_{t_1}(0)=0,\quad U(t_1)=\tilde{e}_2(t_1)=\tilde{W}_{t_1}(t_1).$$

由于在 $\tilde{\gamma}|_{[0,t_1]}$ 上没有 $\tilde{\gamma}(0)$ 的共轭点，根据基本指标引理,

$$\tilde{I}_0^{t_1}(U,U)\geq\tilde{I}_0^{t_1}(\tilde{W}_{t_1},\tilde{W}_{t_1}). \tag{5.7}$$

在另一方面，根据定义有

$$\begin{aligned}I_0^{t_1}(W_{t_1},W_{t_1})&=\int_0^{t_1}\{|W_{t_1}'|^2+\langle\mathcal{R}(\gamma',W_{t_1})\gamma',W_{t_1}\rangle\}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{t_1}\{|W_{t_1}'|^2-|W_{t_1}|^2K(\gamma',W_{t_1})\}\mathrm{d}t,\\\tilde{I}_0^{t_1}(U,U)&=\int_0^{t_1}\{|U'|^2+\langle\tilde{\mathcal{R}}(\tilde{\gamma}',U)\tilde{\gamma}',U\rangle\}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{t_1}\{|U'|^2-|U|^2\tilde{K}(\tilde{\gamma}',U)\}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

根据向量场 U 的构造可知

$$|U(t)|^2=|W_{t_1}(t)|^2,\quad |U'(t)|^2=|W_{t_1}'(t)|^2.$$

再由定理的假设, $K(\gamma',W_{t_1})\leq\tilde{K}(\tilde{\gamma}',U)$, 所以

$$I_0^{t_1}(W_{t_1},W_{t_1})\geq\tilde{I}_0^{t_1}(U,U). \tag{5.8}$$

结合 (5.7) 和 (5.8) 两式便得到

$$I_0^{t_1}(W_{t_1},W_{t_1}) \ge \tilde{I}_0^{t_1}(\tilde{W}_{t_1},\tilde{W}_{t_1}),$$

此即要证明的不等式 (5.5).

至此，已经证明：对于任意的 $t\in(0,r)$ 有

$$\frac{\langle J'(t),J(t)\rangle}{\langle J(t),J(t)\rangle} \ge \frac{\langle \tilde{J}'(t),\tilde{J}(t)\rangle}{\langle \tilde{J}(t),\tilde{J}(t)\rangle},$$

即

$$\frac{|J(t)|^2}{|\tilde{J}(t)|^2}\ge 1,\ \text{或等价地，}\quad |J(t)|^2\ge|\tilde{J}(t)|^2. \tag{5.9}$$

为了完成第一种情形的证明，还要说明向量场 J 在 $(0,l]$ 上无零点. 如若不然，必有 $r\in(0,l]$，使得 $J(r)=0$ 并且 J 在 $(0,r)$ 内处处不为零. 注意到 $\tilde{J}$ 在 $(0,l]$ 上恒不为零，在 (5.9) 式中令 t 趋于 r，便得

$$0=|J(r)|^2\ge|\tilde{J}(r)|^2>0,$$

这自然是不可能的. 因此，(5.9) 式对于任意的 $t\in[0,l]$ 成立.

现在考虑一般情形. 设 $J(0),\tilde{J}(0)$ 分别与 $\gamma,\tilde{\gamma}$ 相切，则由条件 (5.1)，又有

$$|J(0)|=|\tilde{J}(0)|.$$

将 $J(t)$ 和 $\tilde{J}(t)$ 分解成

$$J(t)=J^{\perp}(t)+\langle J(t),\gamma'(t)\rangle\gamma'(t),$$
$$\tilde{J}(t)=\tilde{J}^{\perp}(t)+\langle \tilde{J}(t),\tilde{\gamma}'(t)\rangle\tilde{\gamma}'(t).$$

于是

$$|J(t)|^2=|J^{\perp}(t)|^2+\langle J(t),\gamma'(t)\rangle^2,$$
$$|\tilde{J}(t)|^2=|\tilde{J}^{\perp}(t)|^2+\langle \tilde{J}(t),\tilde{\gamma}'(t)\rangle^2.$$

根据第五章的 (1.7) 式得知

$$\langle J(t),\gamma'(t)\rangle=\langle J'(0),\gamma'(0)\rangle t+\langle J(0),\gamma'(0)\rangle,$$
$$\langle \tilde{J}(t),\tilde{\gamma}'(t)\rangle=\langle \tilde{J}'(0),\tilde{\gamma}'(0)\rangle t+\langle \tilde{J}(0),\tilde{\gamma}'(0)\rangle.$$

由 $J,\tilde{J}$ 所满足的条件 (5.1) 可得

$$\langle J(t),\gamma'(t)\rangle=\langle \tilde{J}(t),\tilde{\gamma}'(t)\rangle.$$

所以，$|J(t)|^2\ge|\tilde{J}(t)|^2$ 当且仅当 $|J^{\perp}(t)|^2\ge|\tilde{J}^{\perp}(t)|^2$.

显然，对于 $J,\tilde{J}$ 的假设导致 $J^{\perp}(0)=\tilde{J}^{\perp}(0)=0$，且有

$$|J^{\perp\prime}(0)|^2=|J'(0)|^2-\langle J'(0),\gamma'(0)\rangle^2,$$
$$|\tilde{J}^{\perp\prime}(0)|^2=|\tilde{J}'(0)|^2-\langle \tilde{J}'(0),\tilde{\gamma}'(0)\rangle^2,$$

从而有 $|J^{\perp\prime}(0)|=|\tilde{J}^{\perp\prime}(0)|$. 与 (5.2) 式相对照便知道 $J^{\perp}$ 和 $\tilde{J}^{\perp}$ 满足前一种情形的条件，故有

$$|J^{\perp}(t)|^2\ge|\tilde{J}^{\perp}(t)|^2,$$

因而 $|J(t)|^2\ge|\tilde{J}(t)|^2$, 定理得证.

推论 5.2 设 M 是 m 维黎曼流形，$p\in M$. 对于任意的单位切向量 $X\in T_pM$，令

$$\gamma(t)=(\exp_p)(tX),\quad 0\le t\le l,$$

则

(1) 当 M 沿 γ 的径向截面曲率 (即沿含有 $\gamma'(t)$ 的二维截面的截面曲率)$K\ge 0$，且在 γ 上没有 p 的共轭点时有

$$|(\exp_p)_{*tX}(Y)|\le|Y|,\quad \forall Y\in T_pM;$$

(2) 当 M 沿 γ 的径向截面曲率 $K\le 0$ 时，有

$$|(\exp_p)_{*tX}(Y)|\ge|Y|,\quad \forall Y\in T_pM.$$

证明 取 $\tilde{M}=T_pM$, 并把它看作欧氏空间. 令

$$\tilde{\gamma}(t)=tX,\quad \tilde{J}(t)=tY,\quad Y\in T_pM,$$

则 $\tilde{\gamma}$ 是 $\tilde{M}$ 上的一条测地线, $\tilde{J}$ 是 $\tilde{M}$ 中沿 $\tilde{\gamma}$ 的 Jacobi 场. 如果令

$$J(t)=\frac{\partial}{\partial u}\exp_p t(X+uY)|_{u=0}=(\exp_p)_{*tX}(tY),$$

则 J 是 M 中沿 γ 的 Jacobi 场. 注意到

$$J(0)=\tilde{J}(0)=0,\quad J'(0)=\tilde{J}'(0)=Y,\quad \gamma'(0)=\tilde{\gamma}'(0),$$

因此 $M,\tilde{M},\gamma,\tilde{\gamma},J$ 和 $\tilde{J}$ 满足 Rauch 比较定理的所有条件. 推论得证.

顺便指出, 第五章的引理 3.1 实际上是推论 5.2(2) 的推论, 证明留给读者作为练习.

下面的定理给出了 Rauch 比较定理的一个应用.

定理 5.3 设 $M,\tilde{M}$ 是两个 m 维黎曼流形, $K,\tilde{K}$ 分别是 $M,\tilde{M}$ 的截面曲率, $p\in M$, $\tilde{p}\in\tilde{M}$, $\varphi:T_pM\to T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ 是一个等距的线性同构; 假定 W 和 $\tilde{W}=\varphi(W)$ 分别是在 T_pM 和 $T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ 中原点的邻域, 使得指数映射

$$\exp_p:W\to\exp_p(W)\subset M\quad 和\quad \exp_{\tilde{p}}:\tilde{W}\to\exp_{\tilde{p}}(\tilde{W})\subset\tilde{M}$$

都是微分同胚. 如果在任意的对应点

$$q\in\exp_p(W)\quad 和\quad \tilde{q}=\exp_{\tilde{p}}\circ\varphi\circ(\exp_q)^{-1}(q)\in\exp_{\tilde{p}}(\tilde{W}),$$

沿任意的二维截面 $\sigma\subset T_qM,\tilde{\sigma}\subset T_{\tilde{q}}\tilde{M}$ 都有

$$K(\sigma)\geq\tilde{K}(\tilde{\sigma}),$$

则对于 W 中任意一条光滑曲线 $\beta(u)\,(0\leq u\leq 1)$ 下面不等式成立:

$$L(\exp_p\circ\beta)\leq L(\exp_{\tilde{p}}\circ(\varphi\circ\beta)).$$

证明 不失一般性, 可以假设 β 处处不为零 (即 β 不通过原点). 考虑测地变分

$$\Phi(t,u)=\exp_p(t\beta(u)),\quad 0\leq t\leq 1,\quad 0\leq u\leq 1;$$

令

$$U(t,u)=\Phi_{*(t,u)}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)=(\exp_p)_{*t\beta(u)}(t\beta'(u)).$$

则

$$U(1,u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\exp_p(\beta(u)))=(\exp_p)_{*\beta(u)}(\beta'(u)),$$
$$L(\exp_p\circ\beta)=\int_0^1|U(1,u)|\mathrm{d}u.$$

同理有

$$L(\exp_{\tilde{p}}\circ\varphi\circ\beta)=\int_0^1|\tilde{U}(1,u)|\mathrm{d}u,$$

其中

$$\tilde{U}(1,u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\exp_{\tilde{p}}(\varphi\circ\beta(u)))=(\exp_{\tilde{p}})_{*\varphi\circ\beta(u)}(\varphi(\beta'(u))).$$

对于任意固定的 $u\in(0,1)$, 考虑沿测地线

$$\gamma_u(t)=\exp_p(t\beta(u))\quad 和\quad \tilde{\gamma}_u(t)=\exp_{\tilde{p}}(t\varphi\circ\beta(u))$$

的变分向量场 $U(t,u)$ 和 $\tilde{U}(t,u)$. 根据第五章的命题 1.1, $U(t,u)$ 和 $\tilde{U}(t,u)$ 分别是沿 $\gamma_u,\tilde{\gamma}_u$ 的 Jacobi 场. 由定义,

$$U(0,u)=\tilde{U}(0,u)=0,$$
$$\frac{\mathrm{D}U}{\mathrm{d}t}(0,u)=\beta'(u),\quad \frac{\mathrm{D}\tilde{U}}{\mathrm{d}t}(0,u)=\varphi(\beta'(u)),$$
$$\gamma_u'(0)=\beta(u),\quad \tilde{\gamma}_u'(0)=\varphi(\beta(u)).$$

根据假设, 对于任意的 $X\in T_{\gamma_u(t)}M$, $\tilde{X}\in T_{\tilde{\gamma}_u(t)}\tilde{M}$ 有

$$K(\gamma_u',X)\geq\tilde{K}(\tilde{\gamma}_u',\tilde{X}),$$

因而由定理 5.1 可得

$$|U(t,u)| \leq |\bar{U}(t,u)|.$$

特别地,

$$|U(1,u)| \leq |\bar{U}(1,u)|,$$

故有

$$L(\exp_p \circ \beta) \leq L(\exp_{\bar{p}} \circ \varphi \circ \beta).$$

定理得证.

习　题　六

1. 设 $\gamma:[0,b]\to M$ 是黎曼流形 M 上的分段光滑曲线, 令

$$E(\gamma)=\frac{1}{2}\int_a^b|\gamma'(t)|^2\mathrm{d}t,$$

则称 $E(\gamma)$ 为曲线 γ 的 **能量**. 现设 $\Phi:[0,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是曲线 γ 的一个分段光滑变分, U 和 γ_u, $u\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, 是相应的变分向量场和变分曲线. 由定义, U 和 γ_u 在 $[0,b]$ 上是连续的, 且存在区间 $[0,b]$ 的一个划分

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_{r+1}=b,$$

使得 U,γ_u 在每一个小区间 $[t_{i-1},t_i]$ 上是光滑的. 对于任意的 $u\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, 令 $E(u)=E(\gamma_u)$. 光滑函数 $E:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}$ 称为变分 Φ 的 **能量泛函**.

(1) 证明如下的 **能量第一变分公式**:

$$\begin{aligned}E'(0)&=-\int_0^b\langle U(t),\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\gamma'\rangle\mathrm{d}t+\sum_{i=0}^r\langle U,\gamma'\rangle\Big|_{t_i^+}^{t_{i+1}^-}\\&=-\int_0^b\left\langle U(t),\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\gamma'\right\rangle\mathrm{d}t-\sum_{i=1}^r\langle U(t_i),\gamma'|_{t_i^-}^{t_i^+}\rangle+\langle U,\gamma'\rangle|_0^b,\end{aligned}$$

其中 D 是 M 上的黎曼联络在拉回丛 Φ^*TM 上的诱导联络.

(2) 利用 (1) 中的变分公式证明: γ 是测地线当且仅当对于它的任意一个具有固定端点的分段光滑变分 Φ, 它都是相应的能量泛函的临界点, 即 $E'(0)=0$.

(3) 证明: 如果 $\mathcal{R}$ 是 M 的曲率张量, γ 是测地线, 则有如下的 **能量第二变分公式**:

$$\begin{aligned}E''(0)&=\left\langle\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u}}\Phi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)\Big|_{u=0},\gamma'\right\rangle\Big|_0^b\\&\quad-\int_0^b\langle U(t),U''(t)-\mathcal{R}(\gamma',U)\gamma'\rangle\mathrm{d}t+\sum_{i=0}^r\langle U,U'\rangle\Big|_{t_i^+}^{t_{i+1}^-}\\&=\left\langle\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u}}\Phi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)\Big|_{u=0},\gamma'\right\rangle\Big|_0^b\\&\quad-\int_0^b\langle U(t),U''(t)-\mathcal{R}(\gamma',U)\gamma'\rangle\mathrm{d}t\\&\quad-\sum_{i=1}^r\langle U,U'\rangle|_{t_i^-}^{t_i^+}+\langle U,U'\rangle|_0^b,\end{aligned}$$

其中 D 是拉回丛 Φ^*TM 上的诱导联络. 特别地, 如果 Φ 是 γ 的一个具有固定端点的变分, 则有

$$E''(0)=-\int_0^b\langle U(t),U''(t)-\mathcal{R}(\gamma',U)\gamma'\rangle\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^r\langle U,U'\rangle|_{t_i^+}^{t_i^-}.$$

(4) 在 (3) 的基础上证明: 能量的第二变分公式可以改写为

$$E''(0)=I_\gamma(U,U)+\left\langle\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u}}\Phi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)\Big|_{u=0},\gamma'\right\rangle\Big|_0^b,$$

其中 I_γ 是测地线 γ 的指标形式.

2. 举例说明, 存在黎曼流形 N 及其黎曼子流形 M, 使得直径

$$d(M)>d(N).$$

3. 设 g 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个完备黎曼度量, K 是它的 Gauss 曲率. 证明:

$$\lim_{r\to\infty}\left(\inf_{x^2+y^2\geq r^2} K(x,y)\right)\leq 0,$$

其中 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. 试在 $\mathbb{R}^2$ 上给出一个完备的非平坦黎曼度量.

4. 试证明下述结论 (Bonnet-Myers 定理的推广): 设 M 是一个完备的黎曼流形. 假定存在常数 $a>0$, $c\geq 0$, 使得对于连接任意两点 $p,q\in M$ 的最短正规测地线 $\gamma(t)$, 都有沿 γ 定义、并且满足条件 $|f(t)|\leq c$ 的光滑函数 f, 使得下述不等式成立:

$$\mathrm{Ric}(\gamma'(t))\geq a+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t},\quad \forall t,$$

则 M 是紧致的; 试求直径 $d(M)$ 的一个上界估计. 如果 $c=0$, 则上述结论便化为 Bonnet-Myers 定理.

5. 利用 Synge 定理证明第五章的命题 5.5

6. 设 M 是可定向的偶数维黎曼流形, 并具有恒正的截面曲率. 假设 γ 是 M 中的一条闭测地线 (即 γ 是圆周 S^1 在 M 中的浸入, 并且 γ 在每一点的邻域内满足测地线方程). 证明: 在 M 中存在一条闭曲线 β 同伦等价于 γ, 且有 $L(\beta)<L(\gamma)$.

7. 利用定理 4.5 证明关于实函数的下列不等式 (称为 **Wirtinger 不等式**): 设 $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ 是任意的 C^2 函数, 满足 $f(0)=f(\pi)=0$, 则

$$\int_0^\pi f^2\mathrm{d}t\leq\int_0^\pi (f')^2\mathrm{d}t,$$

并且等号成立当且仅当 $f(t)=C\sin t$, 这里的 C 是一个常数.

8. 设 M 是单连通的完备黎曼流形, 假设对于任意的点 $p\in M$, 点 p 沿所有径向测地线的第一个共轭点都是同一点 $q\neq p$, 并且 $d(p,q)=\pi$. 证明: 如果 M 的截面曲率 $K\leq 1$, 则 M 与单位球面 S^m 等距.

9. 设 $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是非负的光滑函数, 并且 $a(0)>0$. 证明: 初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+a\varphi=0,\quad \varphi(0)=1,\quad \varphi'(0)=0$$

的解 φ 至少有一个正的零点和一个负的零点.

10. 假设 M 是具有正截面曲率的 m 维完备黎曼流形,

$$\gamma:(-\infty,\infty)\to M$$

是正规测地线. 利用本章习题第 9 题的结论证明: 存在 $t_0>0$, 使得测地线段 $\gamma|_{[-t_0,t_0]}$ 的指数

$$\mathrm{index}(\gamma|_{[-t_0,t_0]})\geq m-1.$$

11. 设 $\gamma:(-\infty,\infty)\to M$ 是完备黎曼流形 M 上一条正规测地线, 如果对于任意的 $t_1,t_2\in(-\infty,\infty)$, $t_1<t_2$, $\gamma|_{[t_1,t_2]}$ 是 M 中连接 $\gamma(t_1)$ 和 $\gamma(t_2)$ 的最短测地线, 则称 γ 是黎曼流形 M 中的 **测地直线**. 证明: 如果 M 的截面曲率恒为正, 则在 M 上不存在测地直线. 举例说明在具有非负截面曲率的非平坦黎曼流形上可能存在测地直线.

12. 如果把定理 4.5 中的集合 $\mathscr{V}_0(\gamma)$ 换成集合 $\mathscr{V}^\perp(\gamma)$, 其结论是否成立? 为什么?

13. 利用推论 5.2 证明第五章的引理 3.1.

14. 证明如下的 **Klingenberg 引理**: 设 K_0 是一个正数, M 是具有截面曲率 $K\leq K_0$ 的完备黎曼流形, $p,q\in M$ 是两个不同点, γ_0,γ_1 是 M 中连接点 p,q 的两条不同的测地线, 并且 $L(\gamma_0)\leq L(\gamma_1)$. 如果 M 上存在一个以 p,q 为公共端点的连续曲线族 $\alpha_s(s\in[0,1])$, 使得

$$\alpha_0=\gamma_0,\quad \alpha_1=\gamma_1,$$

则存在 $s_0\in[0,1]$ 使得下列不等式成立:

$$L(\gamma_0)+L(\alpha_{s_0})\geq\frac{2\pi}{\sqrt{K_0}}.$$

可见, 每一个从 γ_0 到 γ_1 的具有固定端点的伦移必经过一条 "长" 曲线 (见图).

第 14 题图

15. 利用 Klingenberg 引理重新证明如下的 **Hadamard 定理**(参看第五章的定理 3.3)：设 M 是完备单连通的 m 维黎曼流形. 如果 M 的截面曲率 $K_M \leq 0$, 则对于任意的 $p \in M$, 指数映射

$$\exp_p : T_pM \to M$$

是光滑同胚.

16. (**Sturm 比较定理**) 设 $f, \bar{f}$ 分别是下面两个常微分方程的解:

$$f''(t) + K(t)f(t) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1,$$

$$\bar{f}''(t) + \bar{K}(t)\bar{f}(t) = 0, \quad \bar{f}(0) = 0, \quad \bar{f}'(0) = 1,$$

$$\bar{K}(t) \geq K(t), \quad t \in [0, b].$$

(1) 容易知道, 对于任意的 $t \in [0, b]$,

$$0 = \int_0^t \{\bar{f}(f'' + Kf) - f(\bar{f}'' + \bar{K}\bar{f})\}\mathrm{d}t$$

$$= (\bar{f}f' - f\bar{f}')|_0^t + \int_0^t (K - \bar{K})f\bar{f}\mathrm{d}t.$$

证明: f 的零点不会比 $\bar{f}$ 的零点先出现, 即对于任意的 $t_0 \in (0, b]$, 如果 $\bar{f}$ 在 $(0, t_0)$ 内大于零, 则 f 在 $(0, t_0)$ 内也大于零.

(2) 假设 $\bar{f}$ 在 $(0, b]$ 上大于零, 利用 (1) 证明: 不等式 $f(t) \geq \bar{f}(t)$ 在 $[0, b]$ 上处处成立, 等号在某点 $t_1 \in (0, b]$ 成立当且仅当在 $[0, t_1]$ 上 $K \equiv \bar{K}$. 试说明这一结论等价于二维情形的 Rauch 比较定理.

17. (**Sturm 震荡定理**) 设 M 是完备的二维黎曼流形,

$$\gamma : [0, +\infty) \to M$$

是一条测地线, $K(t)$ 是 M 沿 γ 的 Gauss 曲率, $L(t)$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的光滑函数, $t_0 \in (0, +\infty)$. 假设:

(1) 存在沿 γ 定义的法 Jacobi 场 $J(t)$, 满足条件

$$J(0) = J(t_0) = 0,$$

并且在 $(0, t_0)$ 内 $J(t) \neq 0$;

(2) 对于任意的 $t \in [0, +\infty)$, $K(t) \leq L(t)$.

证明: 方程

$$\bar{f}''(t) + L(t)\bar{f}(t) = 0$$

的每一个解 $\bar{f}$ 在区间 $(0, t_0]$ 上至少有一个零点.

18. 设 M 是完备的二维黎曼流形, $\gamma : [0, \infty) \to M$ 是一条测地线, $K(t)$ 是 M 沿 $\gamma(t)$ 的 Gauss 曲率, $p = \gamma(0)$. 利用 Sturm 震荡定理证明: 如果

$$\left|\int_t^\infty K(s)\mathrm{d}s\right| \leq \frac{1}{4(t+1)}, \quad \forall t \geq 0,$$

则 p 点沿 γ 没有共轭点. 这一结论称为在曲面上判别共轭点的 **Kneser 准则**.

19. 设 $\gamma : [0, b] \to M$ 是黎曼流形 M 中的一条正规测地线, 点 $\gamma(0)$ 沿 γ 没有共轭点; 又设 $J(t)$ 是沿 γ 的法 Jacobi 场, 满足

$$J(0) = 0, \quad |J'(0)| = 1.$$

(1) 假设存在常数 β, 使得对于任意的 $t\in[0,b]$ 以及垂直于 $\gamma'(t)$ 的任意 $v\in T_{\gamma(t)}M$, M 的截面曲率

$$K(v,\gamma'(t))\leq\beta.$$

此外, 当 $\beta>0$ 时还假定 $b<\pi/\sqrt{\beta}$. 证明:

$$|J(t)|\geq\begin{cases}\dfrac{\sin(\sqrt{\beta}t)}{\sqrt{\beta}}, & \text{如果 } \beta>0,\\ t, & \text{如果 } \beta=0,\\ \dfrac{\sinh(\sqrt{-\beta}t)}{\sqrt{-\beta}}, & \text{如果 } \beta<0.\end{cases}$$

(2) 在 (1) 中, 如果把条件换成 $K(v,\gamma'(t))\geq\beta$, 会有什么样的结论? 试证明之.

第七章 黎曼流形的子流形

子流形的理论是微分几何的重要课题. 最初, 微分几何学是研究三维欧氏空间中的曲线和曲面的形状, 并寻求藉以确定它们的形状的完全不变量系统. 通过深入研究欧氏空间中曲面的性态, F. Gauss 发现, 曲面的 Gauss 曲率由它的第一基本形式完全确定. 从此, 研究由曲面的第一基本形式决定的几何学便成为一个中心议题. 本课程所介绍的黎曼几何起源于 W. Riemann 对 Gauss 的思想在高维情形的推广. 对于黎曼几何学来说, 子流形的理论仍然是重要的. 首先, 许多重要的黎曼流形都是作为已经熟悉的空间 (如欧氏空间, 球面等) 的子流形出现的; 而且欧氏空间的微分几何学仍然是研究黎曼几何的最主要的参照物. 其次, 一个黎曼流形是否能够实现为某个高维欧氏空间的子流形始终是一个重要的基本问题. 此外, 在一个黎曼空间 (即黎曼流形) 中, 子流形的形态是千奇百怪的, 其中也有许多 "好" 的、具有某种特殊性质的子流形; 它们的存在性、唯一性和几何性质、以及它们的构造方法和相互联系一直是几何学家所关注的研究课题. 可以说, 在这方面的研究工作与关于黎曼流形本身的研究相比较显得更加多姿多彩.

在本章, 首先要导出黎曼空间中子流形的基本公式和基本方程, 然后介绍欧氏空间中子流形的基本定理, 进而建立黎曼流形中的极小子流形的概念和相应的理论. 鉴于子流形的微分几何学已经成为内容十分丰富的分支学科, 其中包含当今许多重要的研究课题, 并且已有许多专著介绍它们的现状和进展, 在我们的基础课程中对这些专题进行深入的介绍既是不明智的也是不可能的. 本章的目标是建立子流形几何理论的基本框架, 同时介绍该理论的一些基本概念和方法, 帮助读者打好基础, 为深入进行子流形微分几何的各个专题的研究作必要的准备.

§7.1 子流形的基本公式

设 $(N,\bar{g})$ 是 n 维黎曼流形，(f,M) 是 N 的一个 m 维浸入子流形. 换言之，M 是 m 维光滑流形，$f:M\to N$ 是 M 在 N 中的一个光滑浸入 (即 f 的切映射 f_* 处处非退化). 则对于任意一点 $p\in M$, 必存在 p 的一个开邻域 $U\subset M$, 使得 $f|_U:U\to N$ 为 (正则) 嵌入. 由此可见，每一个浸入子流形 (f,M) 在局部上都是嵌入子流形. 因此在讨论子流形的局部理论时，不妨假定 (f,M) 是 N 的一个 m 维嵌入子流形，并且在各种表达式中忽略记号 f 及其切映射 f_*、余切映射 f^* 等等. 比如，常把 M 和 $f(M)$ 等同起来，并且对于任意的 $p\in M$, 把切空间 $f_*(T_pM)$ 和 T_pM 等同起来. 正因为如此，在讨论子流形的局部性质时，常常用包含映射 $i:M\to N$ 来取代浸入 f.

对于每一点 $p\in M$, 切空间 T_pN 关于黎曼度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle_p=\bar{g}_p$ 可以分解为正交直和

$$T_pN=T_pM\oplus T_p^{\perp}M,\tag{1.1}$$

其中 T_pM 是 M 在 p 点的切空间，$T_p^{\perp}M$ 是 T_pM 在 T_pN 中的正交补，即

$$T_p^{\perp}M=(T_pM)^{\perp}=\{\xi\in T_pN:\langle\xi,v\rangle=0,\forall v\in T_pM\},$$

称为子流形 $i:M\to N$ 在 p 点的**法空间**. 这样，任意一个切向量 $v\in T_pN$ 都可以唯一地分解为

$$v=v^{\top}+v^{\perp},\tag{1.2}$$

其中 $v^{\top}\in T_pM$ 称为切向量 v 的切分量，$v^{\perp}\in T_p^{\perp}M$ 称为 v 的法分量.

令

$$T^{\perp}M=\bigcup_{p\in M}T_p^{\perp}M,$$

则容易验证 $T^{\perp}M$ 是 M 上的一个向量丛，称为子流形 $i:M\to N$ 的**法丛**. 从 (1.1) 式得到

$$i^*TN=TM\oplus T^{\perp}M.\tag{1.3}$$

把切空间 T_pN 中的欧氏内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ 分别限制到 M 在 p 点的切空间 T_pM 和法空间 $T_p^{\perp}M$ 上，使它们分别成为欧氏向量空间，并且相应的诱导内积仍然光滑地依赖于点 $p\in M$. 所以，子流形 $i:M\to N$ 的切丛 TM 和法丛 $T^{\perp}M$ 分别具有诱导的黎曼结构，使它们自然地成为黎曼向量丛. 特别地，M 关于诱导度量

$$g=i^*\bar{g}$$

是一个 m 维黎曼流形；此时，包含映射

$$i:(M,g)\to(N,\bar{g})$$

成为等距浸入. 有时，为了方便起见，也用 M,N 分别表示黎曼流形 (M,g) 和 $(N,\bar{g})$.

设 $\bar{\mathrm{D}}$ 是黎曼流形 $(N,\bar{g})$ 上的黎曼联络或它在拉回丛 i^*TN 上的诱导联络. 对于任意的光滑切向量场 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, i_*X, $i_*Y\in\Gamma(i^*TN)$ 是 N 中沿子流形 M 定义的两个切向量场. 为方便起见，把 i_*X,i_*Y 仍然记为 X,Y. 根据拉回向量丛上诱导联络的定义，$\bar{\mathrm{D}}_XY\in\Gamma(i^*TN)$, 它是 N 中沿着子流形 M 定义的光滑切向量场，但是它未必是子流形 M 的切向量场. 利用分解式 (1.2), 可设

$$\bar{\mathrm{D}}_XY=\mathrm{D}_XY+h(X,Y),\tag{1.4}$$

其中

$$\mathrm{D}_XY=(\bar{\mathrm{D}}_XY)^{\top},\quad h(X,Y)=(\bar{\mathrm{D}}_XY)^{\perp}.\tag{1.5}$$

通常把 (1.4) 式称为子流形 $i:M\to N$ 的 **Gauss 公式**.

定理 1.1 设 $i: M \to N$ 是 n 维黎曼流形 $(N, \bar{g})$ 中的一个 m 维嵌入子流形，则由 (1.5) 的第一式确定的映射

$$\mathrm{D}: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M), \quad (Y, X) \mapsto \mathrm{D}_X Y$$

是 M 上由诱导度量 g 确定的黎曼联络. 同时，由 (1.5) 的第二式定义的映射 $h: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(T^\perp M)$ 具有下列性质：

(1) $h(X+Y, Z) = h(X, Z) + h(Y, Z)$;

(2) 对于任意的 $\lambda \in C^\infty(M)$ 有 $h(\lambda X, Y) = \lambda h(X, Y)$;

(3) $h(X, Y) = h(Y, X)$.

由此可见，$h: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(T^\perp M)$ 是定义在 M 上、并且在 M 的法丛中取值的对称的二阶协变张量场.

证明 对于任意的 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ 有

$$\overline{\mathrm{D}}_{X+Y} Z = \overline{\mathrm{D}}_X Z + \overline{\mathrm{D}}_Y Z,$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_{X+Y} Z &= (\overline{\mathrm{D}}_{X+Y} Z)^\top = (\overline{\mathrm{D}}_X Z)^\top + (\overline{\mathrm{D}}_Y Z)^\top \\ &= \mathrm{D}_X Z + \mathrm{D}_Y Z, \\ h(X+Y, Z) &= (\overline{\mathrm{D}}_{X+Y} Z)^\perp = (\overline{\mathrm{D}}_X Z)^\perp + (\overline{\mathrm{D}}_Y Z)^\perp \\ &= h(X, Z) + h(Y, Z),\end{aligned}$$

同理有

$$\mathrm{D}_X(Y+Z) = \mathrm{D}_X Y + \mathrm{D}_X Z, \quad h(X, Y+Z) = h(X, Y) + h(X, Z).$$

此外，对于任意的 $\lambda \in C^\infty(M)$ 有

$$\overline{\mathrm{D}}_{\lambda X} Y = \lambda \overline{\mathrm{D}}_X Y, \qquad \overline{\mathrm{D}}_X(\lambda Y) = X(\lambda) Y + \lambda \overline{\mathrm{D}}_X Y,$$

所以

$$\mathrm{D}_{\lambda X} Y = (\overline{\mathrm{D}}_{\lambda X} Y)^\top = \lambda (\overline{\mathrm{D}}_X Y)^\top = \lambda \mathrm{D}_X Y,$$

$$\mathrm{D}_X(\lambda Y) = (\overline{\mathrm{D}}_X(\lambda Y))^\top = X(\lambda) Y + \lambda (\overline{\mathrm{D}}_X Y)^\top = X(\lambda) Y + \lambda \mathrm{D}_X Y,$$

并且

$$h(\lambda X, Y) = (\overline{\mathrm{D}}_{\lambda X} Y)^\perp = \lambda (\overline{\mathrm{D}}_X Y)^\perp = \lambda h(X, Y).$$

由此可见，映射 $\mathrm{D}: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ 是 M 上的联络，且映射 $h: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(T^\perp M)$ 具有性质 (1) 和 (2).

由黎曼联络 $\overline{\mathrm{D}}$ 的无挠性可知 (参看第二章的 (8.7) 式)，对于任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ 有

$$\overline{\mathrm{D}}_X Y - \overline{\mathrm{D}}_Y X = [X, Y] \in \mathfrak{X}(M),$$

所以

$$\mathrm{D}_X Y - \mathrm{D}_Y X = (\overline{\mathrm{D}}_X Y - \overline{\mathrm{D}}_Y X)^\top = [X, Y],$$

$$h(X, Y) - h(Y, X) = (\overline{\mathrm{D}}_X Y - \overline{\mathrm{D}}_Y X)^\perp = 0.$$

因此联络 D 仍然是无挠的，并且 $h: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(T^\perp M)$ 是对称的，即性质 (3) 成立.

最后，对于任意的 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$，根据联络 $\overline{\mathrm{D}}$ 和黎曼度量 $\bar{g}$ 的相容性得到

$$\begin{aligned}Z\langle X, Y\rangle &= \langle \overline{\mathrm{D}}_Z X, Y\rangle + \langle X, \overline{\mathrm{D}}_Z Y\rangle \\ &= \langle (\overline{\mathrm{D}}_Z X)^\top, Y\rangle + \langle X, (\overline{\mathrm{D}}_Z Y)^\top\rangle \\ &= \langle \mathrm{D}_Z X, Y\rangle + \langle X, \mathrm{D}_Z Y\rangle.\end{aligned}$$

这说明联络 D 和诱导度量 $g = i^* \bar{g}$ 是相容的. 于是根据第二章的定理 4.5, $\mathrm{D}: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ 是黎曼流形 (M, g) 的黎曼联络.

定义 1.1 设 $i: M \to N$ 是 n 维黎曼流形 $(N, \bar{g})$ 中的一个 m 维嵌入子流形. 则由 (1.5) 的第二式所定义的映射 $h: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(T^\perp M)$ 称为子流形 M (在 N 中) 的 **第二基本形式**. 特别地，在每一点 $p \in M$，第二基本形式给出了一个对称的双线性映射

$$h: T_p M \times T_p M \to T_p^\perp M.$$

定义 1.2 设 $i: M \to N$ 是 n 维黎曼流形 (N, g) 中的一个 m 维嵌入子流形. 如果 M 的第二基本形式恒为零, 则称 M 是 N 中的 **全测地子流形**.

由 (1.4) 式可知, 若 $i: M \to N$ 是 (N, g) 中的全测地子流形, 则对于任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ 有 $\overline{D}_X Y = D_X Y$. 此时, M 中的测地线必是 N 中的测地线. 反过来, 若 $\gamma: [a, b] \to N$ 是 N 中的一条测地线, 并且 $\gamma(a) \in M, \gamma'(a) \in T_{\gamma(a)}M$, 则 γ 必落在 M 内.

与前面的做法相类似, 设 $X \in \mathfrak{X}(M), \xi \in \Gamma(T^\perp M)$, 则 $\xi \in \Gamma(i^*TN)$ 是 N 中沿子流形 M 定义的切向量场, 故由诱导联络的定义 (参看第二章的例 8.2), $\overline{D}_X \xi \in \Gamma(i^*TN)$. 令

$$\overline{D}_X \xi = -A_\xi(X) + D^\perp_X \xi, \tag{1.6}$$

其中

$$A_\xi(X) = -(\overline{D}_X \xi)^\top, \quad D^\perp_X \xi = (\overline{D}_X \xi)^\perp. \tag{1.7}$$

通常称 (1.6) 式为子流形 $i: M \to N$ 的 **Weingarten 公式**; Gauss 公式和 Weingarten 公式合称为 **子流形的基本公式**.

定理 1.2 设 $i: M \to N$ 是 n 维黎曼流形 $(N, \bar{g})$ 中的一个 m 维嵌入子流形, 则由 (1.7) 的第二式所定义的映射

$$D^\perp: \Gamma(T^\perp M) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(T^\perp M), \quad (\xi, X) \mapsto D^\perp_X \xi$$

是 M 的法丛 $T^\perp M$ 上的联络, 并与法丛 $T^\perp M$ 的黎曼结构是相容的.

证明 任设 $X, Y \in \mathfrak{X}(M), \xi, \xi_1, \xi_2 \in \Gamma(T^\perp M)$, 则有

$$D^\perp_{X+Y} \xi = D^\perp_X \xi + D^\perp_Y \xi, \quad D^\perp_X(\xi_1 + \xi_2) = D^\perp_X \xi_1 + D^\perp_X \xi_2.$$

同时, 对于任意的 $\lambda \in C^\infty(M)$, 又有

$$\overline{D}_{\lambda X} \xi = \lambda \overline{D}_X \xi, \quad \overline{D}_X(\lambda \xi) = X(\lambda)\xi + \lambda \overline{D}_X \xi,$$

因此

$$D^\perp_{\lambda X} \xi = (\overline{D}_{\lambda X} \xi)^\perp = \lambda (\overline{D}_X \xi)^\perp = \lambda D^\perp_X \xi,$$

$$D^\perp_X(\lambda \xi) = X(\lambda)\xi + \lambda(\overline{D}_X \xi)^\perp = X(\lambda)\xi + \lambda D^\perp_X \xi.$$

由此可见, $D^\perp: \Gamma(T^\perp M) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(T^\perp M)$ 是法丛 $T^\perp M$ 上的联络.

另外, 根据黎曼联络 $\overline{D}$ 与度量 $\bar{g}$ 的相容性可得 (参看第二章的 (8.8) 式)

$$X\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \langle \overline{D}_X \xi_1, \xi_2 \rangle + \langle \xi_1, \overline{D}_X \xi_2 \rangle = \langle D^\perp_X \xi_1, \xi_2 \rangle + \langle \xi_1, D^\perp_X \xi_2 \rangle$$

因此联络 $D^\perp$ 与法丛 $T^\perp M$ 上的诱导黎曼结构是相容的.

定义 1.3 对于嵌入子流形 $i: M \to N$ 而言, 由 (1.7) 的第二式所定义的联络 $D^\perp: \Gamma(T^\perp M) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(T^\perp M)$ 称为在该子流形的法丛 $T^\perp M$ 上的 **法联络**.

定理 1.3 设 $i: M \to N$ 是 n 维黎曼流形 $(N, \bar{g})$ 中的一个 m 维嵌入子流形, 则对于任意的 $\xi \in \Gamma(T^\perp M)$, 由 (1.7) 的第一式所确定的映射

$$A_\xi: \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

是 M 上光滑的 (1,1) 型张量场; 如果把 A_ξ 看作 M 上的一个光滑的线性变换场, 则在每一点 $p \in M$,

$$A_\xi: T_pM \to T_pM$$

是关于诱导度量 g 的自共轭变换, 并且满足恒等式

$$\langle A_\xi(v), w \rangle = \langle h(v, w), \xi \rangle, \quad \forall v, w \in T_pM. \tag{1.8}$$

因此, 在每一点 $p \in M$ 有双线性映射 $A: T^\perp_p M \times T_pM \to T_pM$ 使得

$$(\xi, v) \mapsto A(\xi, v) = A_\xi(v).$$

证明 关键是证明 (1.8) 式. 根据定义式 (1.7), 对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ 以及任意的 $\xi\in\Gamma(T^\perp M)$, 由于 $\langle\xi,Y\rangle\equiv 0$, 故

$$\begin{aligned}\langle A_\xi(X),Y\rangle &=\langle-(\overline{\mathrm{D}}_X\xi)^\top,Y\rangle=-\langle\overline{\mathrm{D}}_X\xi,Y\rangle\\&=-X\langle\xi,Y\rangle+\langle\xi,\overline{\mathrm{D}}_XY\rangle=\langle(\overline{\mathrm{D}}_XY)^\perp,\xi\rangle\\&=\langle h(X,Y),\xi\rangle,\end{aligned}$$

因而 (1.8) 式成立.

根据定理 1.1, $h(X,Y)$ 关于 X,Y 具有张量性质, 所以 $A_\xi(X)$ 关于 X 具有张量性质, 即映射 $A_\xi:\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ 是 $C^\infty(M)$-线性的. 因此, A_ξ 在每一点 $p\in M$ 确定了一个线性变换

$$A_\xi:T_pM\to T_pM$$

(参看第一章的定理 6.1). 张量 $h(X,Y)$ 的对称性加上 (1.8) 式说明 $A_\xi:T_pM\to T_pM$ 是自共轭变换. 事实上, 对于任意的 $X,Y\in T_pM$, 有

$$\begin{aligned}\langle A_\xi(X),Y\rangle &=\langle h(X,Y),\xi\rangle=\langle h(Y,X),\xi\rangle=\langle A_\xi(Y),X\rangle\\&=\langle X,A_\xi(Y)\rangle.\end{aligned}$$

最后, (1.8) 式还说明 $A_\xi(X)$ 对于自变量 $\xi\in\Gamma(T^\perp M)$ 也具有张量性质, 特别地, 对于任意的 $\lambda\in C^\infty(M)$ 有

$$\begin{aligned}\langle A_{\lambda\xi}(X),Y\rangle &=\langle h(X,Y),\lambda\xi\rangle=\lambda\langle h(X,Y),\xi\rangle\\&=\lambda\langle A_\xi(X),Y\rangle=\langle\lambda A_\xi(X),Y\rangle,\quad\forall X,Y\in\mathfrak{X}(M),\end{aligned}$$

因而 $A_{\lambda\xi}(X)=\lambda A_\xi(X)$. 根据第一章定理 6.1, 由 $A(\xi,v)=A_\xi(v)$ 在每一点 $p\in M$ 确定了一个双线性映射 $A:T_p^\perp M\times T_pM\to T_pM$. 定理得证.

定义 1.4 对于 $p\in M,\ \xi\in T_p^\perp M$, 由定理 1.3 所描述的线性映射 $A_\xi:T_pM\to T_pM$ 称为子流形 $i:M\to N$ 在 p 点关于法向量 ξ 的**形状算子**或 **Weingarten 变换**.

注记 1.1 对于一般的等距浸入 $f:(M,g)\to(N,\bar g)$ 和任意的点 $p\in M$, f 在 p 点的法空间 $T_p^\perp M$ 是子空间 $f_*(T_pM)$ 在 $T_{f(p)}N$ 中的正交补; 相应地, f 的法丛是

$$T^\perp M=\bigcup_{p\in M}T_p^\perp M.$$

根据上面的讨论不难知道, 等距浸入 f 的基本公式具有如下的形式:

$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{D}}_Xf_*(Y)=f_*(\mathrm{D}_XY)+h(X,Y)\quad\text{(Gauss 公式)},\\&\overline{\mathrm{D}}_X\xi=-f_*(A_\xi(X))+\mathrm{D}_X^\perp\xi\quad\text{(Weingarten 公式)},\\&\forall X,Y\in\mathfrak{X}(M),\quad\forall\xi\in\Gamma(T^\perp M),\end{aligned}$$

其中 $\overline{\mathrm{D}}$ 是拉回丛 f^*TN 上的诱导联络, D 是 M 上的黎曼联络; 由 $(\xi,X)\mapsto\mathrm{D}_X^\perp\xi$ 确定的映射

$$\mathrm{D}^\perp:\Gamma(T^\perp M)\times\mathfrak{X}(M)\to\Gamma(T^\perp M)$$

称为等距浸入 $f:(M,g)\to(N,\bar g)$ 的 (法丛上的) 法联络, 由 $(\xi,X)\mapsto A_\xi(X)$ 给出的映射

$$A:\Gamma(T^\perp M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$$

称为 f 的 Weingarten 变换或形状算子.

黎曼流形 $(N,\bar g)$ 的黎曼联络 $\overline{\mathrm{D}}$ 在子流形的切丛和法丛上诱导的联络 $\mathrm{D},\mathrm{D}^\perp$, 以及第二基本形式 h 和形状算子 A_ξ 是关于子流形 $i:M\to N$ 的基本几何构造. 在下面, 我们把这些基本几何构造用局部标架场表示出来. 首先约定指标的取值范围如下:

$$1\le A,B,C,\cdots\le n;\quad 1\le i,j,k,\cdots\le m;\quad m+1\le\alpha,\beta,\gamma,\cdots\le n.$$

设 $p\in M$, 则存在 p 点在 M 中的一个开邻域 U, 以及在 N 中定义在 U 上的单位正交标架场 $\{e_A\}$, 使得 e_i 是 U 上的切向量场, 即有

$$\langle e_A,e_B\rangle=\delta_{AB},\quad\text{并且}\quad e_i\in\mathfrak{X}(U).\tag{1.9}$$

很明显，$\{e_\alpha\}$ 是法丛 $T^\perp M$ 在 U 上的单位正交标架场. 为方便起见，把定义在 U 上满足条件 (1.9) 的标架场 $\{e_A\}$ 称为子流形 M 在 U 上的一个 (单位正交的)**Darboux 标架场**.

根据 (1.4) 和 (1.6) 两式，子流形 M 的 Gauss 公式和 Weingarten 公式分别成为

$$\overline{\mathrm{D}}_{e_i}e_j = \mathrm{D}_{e_i}e_j + h(e_i,e_j),\quad \overline{\mathrm{D}}_{e_i}e_\alpha = -A_{e_\alpha}(e_i) + \mathrm{D}^\perp_{e_i}e_\alpha. \tag{1.10}$$

由嵌入的定义，存在 N 中的一个开邻域 $\tilde{U}$ 使得 $U = M\cap\tilde{U}$, 并且标架场 $\{e_A\}$ 能扩充为定义在 $\tilde{U}$ 上的单位正交标架场 $\{\tilde{e}_A\}$. 设 $\{\tilde{\omega}^A\}$ 是 $\{\tilde{e}_A\}$ 的对偶标架场，并用 $\{\tilde{\omega}_A^B\}$ 表示黎曼联络 $\overline{\mathrm{D}}$ 在该标架场下的联络形式，则有

$$\mathrm{d}q = \tilde{\omega}^A\tilde{e}_A,\quad \mathrm{d}\tilde{\omega}^A = \tilde{\omega}^B\wedge\tilde{\omega}_B^A,\quad \tilde{\omega}_A^B + \tilde{\omega}_B^A = 0,\quad \forall q\in\tilde{U}. \tag{1.11}$$

根据假定 $e_j = \tilde{e}_j|_U,\quad e_\alpha = \tilde{e}_\alpha|_U$, 因此

$$\omega^j = i^*(\tilde{\omega}^j),\quad \omega^\alpha = i^*(\tilde{\omega}^\alpha) = 0$$

这样，当 q 在 U 上变动时，有

$$\mathrm{d}q = \omega^i e_i,\quad \omega^\alpha = 0. \tag{1.12}$$

所以，$\{\omega^i\}$ 恰好是与子流形的切标架场 $\{e_i\}$ 对偶的余切标架场.

在直观上，(1.12) 式中的 $\omega^\alpha = 0$ 表明，当 q 在 U 上变动时 $\mathrm{d}q$ 是 U 上的切向量，其法分量为零. 因此在子流形 $i: M\to N$ 上的诱导度量是

$$g = i^*\bar{g} = \langle\mathrm{d}q,\mathrm{d}q\rangle = \sum_i(\omega^i)^2. \tag{1.13}$$

记 $\omega_A^B = i^*\tilde{\omega}_A^B = \tilde{\omega}_A^B|_U$, 则由 (1.11) 和 (1.12) 式得到

$$\mathrm{d}\omega^i = \omega^j\wedge\omega_j^i,\quad \mathrm{d}\omega^\alpha = \omega^j\wedge\omega_j^\alpha = 0, \tag{1.14}$$

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0,\quad \omega_i^\alpha + \omega_\alpha^i = 0,\quad \omega_\alpha^\beta + \omega_\beta^\alpha = 0. \tag{1.15}$$

根据联络形式 $\tilde{\omega}_A^B$ 的定义，在 $\tilde{U}$ 上有

$$\overline{\mathrm{D}}\tilde{e}_A = \tilde{\omega}_A^B\tilde{e}_B, \tag{1.16}$$

把上式限制在 U 上便得

$$\overline{\mathrm{D}}e_j = \omega_j^k e_k + \omega_j^\alpha e_\alpha,\quad \overline{\mathrm{D}}e_\alpha = \omega_\alpha^k e_k + \omega_\alpha^\beta e_\beta. \tag{1.17}$$

上式是子流形基本公式的另一种表现形式.

比较 (1.17) 和 (1.10) 两式有

$$\mathrm{D}_{e_i}e_j = \omega_j^k(e_i)e_k,\quad h(e_i,e_j) = \omega_j^\alpha(e_i)e_\alpha, \tag{1.18}$$

$$A_{e_\alpha}(e_i) = -\omega_\alpha^k(e_i)e_k,\quad \mathrm{D}^\perp_{e_i}e_\alpha = \omega_\alpha^\beta(e_i)e_\beta. \tag{1.19}$$

综合 (1.14), (1.15) 和 (1.18) 的第一式得知，ω_i^j 是诱导度量 (1.13) 的黎曼联络在切标架场 $\{e_i\}$ 下的联络形式. (1.19) 的第二式说明 ω_α^β 是法丛 $T^\perp M$ 上的法联络在局部标架场 $\{e_\alpha\}$ 下的联络形式.

根据 (1.14) 的第二式和 Cartan 引理，可设

$$\omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha\omega^j,\quad 并且\quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha. \tag{1.20}$$

于是 (1.18) 的第二式成为

$$h(e_i,e_j) = h_{ij}^\alpha e_\alpha,\quad h = h_{ij}^\alpha\omega^i\otimes\omega^j\otimes e_\alpha. \tag{1.21}$$

另外，(1.19) 的第一式可写为

$$A_{e_\alpha}(e_i) = \sum_k\omega_k^\alpha(e_i)e_k = \sum_k h_{ik}^\alpha e_k,$$

因而

$$A_{e_\alpha} = \sum_{i,k}h_{ik}^\alpha\omega^i\otimes e_k. \tag{1.22}$$

定义 1.5 设

$$h:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\Gamma(T^{\perp}M)$$

是子流形 $i:M\to N$ 的第二基本形式. 令

$$H=\frac{1}{m}\mathrm{tr}(h)=\frac{1}{m}\sum_i h(e_i,e_i)=\frac{1}{m}\sum_{i,\alpha}h_{ii}^{\alpha}e_{\alpha},\tag{1.23}$$

则 H 与 Darboux 标架场 $\{e_A\}$ 的选取无关, 称为子流形 $i:M\to N$ 的 **平均曲率向量场**.

设 $\xi\in T_p^{\perp}M$ 是子流形 $i:M\to N$ 在 p 点的一个单位法向量, 令

$$\xi=\sum_{\alpha=m+1}^{n}\xi^{\alpha}e_{\alpha},\quad H^{\xi}=\langle H,\xi\rangle=\frac{1}{m}\sum_{i,\alpha}h_{ii}^{\alpha}\xi^{\alpha},\tag{1.24}$$

称 H^{ξ} 为子流形 M 沿单位法向量场 ξ 的平均曲率. 若命

$$H^{\alpha}=H^{e_{\alpha}},$$

则有

$$H=H^{\alpha}e_{\alpha},\tag{1.25}$$

其中

$$H^{\alpha}=H^{e_{\alpha}}=\frac{1}{m}\sum_i h_{ii}^{\alpha}.$$

此时, 平均曲率向量 H 的长度

$$|H|=\sqrt{\sum_{\alpha}(H^{\alpha})^2}\tag{1.26}$$

称为子流形 M 在 N 中的 **平均曲率**.

§7.2 子流形的基本方程

设 $i:M\to N$ 是 n 维黎曼流形 $(N,\overline{g})$ 中的一个 m 维嵌入子流形. 令 $g=i^*\overline{g}$, 则 (M,g) 是一个 m 维黎曼流形. 对于任意的 $Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$ 以及任意的 $\xi\in\Gamma(T^{\perp}M)$, 有如下的基本公式

$$\overline{\mathrm{D}}_YZ=\mathrm{D}_YZ+h(Y,Z)\qquad(\text{Gauss 公式}),\tag{2.1}$$

$$\overline{\mathrm{D}}_Y\xi=-A_{\xi}(Y)+\mathrm{D}_Y^{\perp}\xi\qquad(\text{Weingarten 公式}),\tag{2.2}$$

其中 $\overline{\mathrm{D}}$ 是 $(N,\overline{g})$ 上的黎曼联络 (在拉回丛 i^*TN 上的诱导联络), D 是 (M,g) 上的黎曼联络,

$$h:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\Gamma(T^{\perp}M)$$

是子流形 (M,g) 的第二基本形式, A_{ξ} 是形状算子, $\mathrm{D}^{\perp}$ 是法丛 $T^{\perp}M$ 上的法联络.

本节要讨论 $(N,\overline{g})$ 的黎曼曲率张量和子流形 (M,g) 的黎曼曲率张量、第二基本形式以及法联络的曲率之间的相互关系, 目的是建立子流形 $i:M\to N$ 的基本方程.

任取 $X\in\mathfrak{X}(M)$, 将 (2.1) 式关于 X 求协变导数得到

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{D}}_X\overline{\mathrm{D}}_YZ=&\overline{\mathrm{D}}_X(\mathrm{D}_YZ)+\overline{\mathrm{D}}_X(h(Y,Z))\\=&\mathrm{D}_X\mathrm{D}_YZ-A_{h(Y,Z)}(X)+h(X,\mathrm{D}_YZ)+\mathrm{D}_X^{\perp}(h(Y,Z)).\end{aligned}$$

因此由第四章习题第 3 题

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{R}}(X,Y)Z=&\overline{\mathrm{D}}_X\overline{\mathrm{D}}_YZ-\overline{\mathrm{D}}_Y\overline{\mathrm{D}}_XZ-\overline{\mathrm{D}}_{[X,Y]}Z\\=&\mathcal{R}(X,Y)Z+A_{h(X,Z)}(Y)-A_{h(Y,Z)}(X)+\mathrm{D}_X^{\perp}(h(Y,Z))\\&-\mathrm{D}_Y^{\perp}(h(X,Z))+h(X,\mathrm{D}_YZ)+h(\mathrm{D}_YX,Z)\\&-h(Y,\mathrm{D}_XZ)-h(\mathrm{D}_XY,Z),\end{aligned}\tag{2.3}$$

其中 $\overline{\mathcal{R}}, \mathcal{R}$ 分别是黎曼流形 $(N,\bar{g})$ 和 (M,g) 的曲率算子. 注意到 $h: \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\Gamma(T^{\perp}M)$ 是定义在 M 上并且在法丛 $T^{\perp}M$ 中取值的二阶协变张量场, 利用 (M,g) 上的黎曼联络 D 和法丛 $T^{\perp}M$ 上的法联络 $\mathrm{D}^{\perp}$, 可以定义 $h:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\Gamma(T^{\perp}M)$ 的协变导数如下:

$$(\mathrm{D}_X h)(Y,Z)=\mathrm{D}^{\perp}_X(h(Y,Z))-h(\mathrm{D}_XY,Z)-h(Y,\mathrm{D}_XZ),\quad \forall X\in\mathfrak{X}(M).$$

容易验证, 由

$$(\mathrm{D}h)(Y,Z,X)=(\mathrm{D}_Xh)(Y,Z),\quad \forall X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$$

确定的映射

$$\mathrm{D}h:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\Gamma(T^{\perp}M)$$

是定义在 M 上, 并且在 $T^{\perp}M$ 中取值的三阶协变张量场, 称为 h 的协变微分. 这样, (2.3) 式成为

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{R}}(X,Y)Z=&\mathcal{R}(X,Y)Z+A_{h(X,Z)}(Y)-A_{h(Y,Z)}(X)\\&+(\mathrm{D}_Yh)(Y,Z)-(\mathrm{D}_Yh)(X,Z).\end{aligned}$$

分别写出上式的切分量和法分量得到

$$\mathcal{R}(X,Y)Z=(\overline{\mathcal{R}}(X,Y)Z)^{\top}+A_{h(Y,Z)}(X)-A_{h(X,Z)}(Y),\tag{2.4}$$

$$(\mathrm{D}_Xh)(Y,Z)-(\mathrm{D}_Yh)(X,Z)=(\overline{\mathcal{R}}(X,Y)Z)^{\perp}.\tag{2.5}$$

通常, 分别把 (2.4) 式和 (2.5) 式称为嵌入在黎曼流形 $(N,\bar{g})$ 中的子流形 M 的 **Gauss 方程** 和 **Codazzi 方程**.

对于任意的 $W\in\mathfrak{X}(M)$, Gauss 方程 (2.4) 可以进一步写成

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{R}(X,Y)Z,W\rangle=&\langle\overline{\mathcal{R}}(X,Y)Z,W\rangle\\&+\langle A_{h(Y,Z)}(X),W\rangle-\langle A_{h(X,Z)}(Y),W\rangle,\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}R(Z,W,X,Y)=&\overline{R}(Z,W,X,Y)+\langle h(X,W),h(Y,Z)\rangle\\&-\langle h(X,Z),h(Y,W)\rangle.\end{aligned}\tag{2.6}$$

因此, 也把 (2.6) 式称为 M 的 Gauss 方程, 它与 (2.4) 式是等价的.

同样地, 对 (2.2) 式关于 $X\in\mathfrak{X}(M)$ 求协变导数得到

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{D}}_X\overline{\mathrm{D}}_Y\xi=&-\overline{\mathrm{D}}_X(A_\xi(Y))+\overline{\mathrm{D}}_X(\mathrm{D}^{\perp}_Y\xi)\\=&-\mathrm{D}_X(A_\xi(Y))-A_{\mathrm{D}^{\perp}_Y\xi}(X)-h(X,A_\xi(Y))+\mathrm{D}^{\perp}_X(\mathrm{D}^{\perp}_Y\xi).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{R}}(X,Y)\xi=&\overline{\mathrm{D}}_X\overline{\mathrm{D}}_Y\xi-\overline{\mathrm{D}}_Y\overline{\mathrm{D}}_X\xi-\overline{\mathrm{D}}_{[X,Y]}\xi\\=&-(\mathrm{D}_X(A_\xi(Y))-A_{\mathrm{D}^{\perp}_X\xi}(Y)-A_\xi(\mathrm{D}_XY))\\&+(\mathrm{D}_Y(A_\xi(X))-A_{\mathrm{D}^{\perp}_Y\xi}(X)\\&-A_\xi(\mathrm{D}_YX))+\mathcal{R}^{\perp}(X,Y)\xi\\&-h(X,A_\xi(Y))+h(Y,A_\xi(X)),\end{aligned}\tag{2.7}$$

其中 $\mathcal{R}^{\perp}(X,Y):\Gamma(T^{\perp}M)\to\Gamma(T^{\perp}M)$ 是法联络 $\mathrm{D}^{\perp}$ 的曲率算子, 即

$$\mathcal{R}^{\perp}(X,Y)=\mathrm{D}^{\perp}_X\mathrm{D}^{\perp}_Y-\mathrm{D}^{\perp}_Y\mathrm{D}^{\perp}_X-\mathrm{D}^{\perp}_{[X,Y]}.$$

张量场 $A:\Gamma(T^{\perp}M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ 的协变微分

$$\mathrm{D}A:\Gamma(T^{\perp}M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$$

定义为

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}A)(\xi,Y,X)=&(\mathrm{D}_XA)(\xi,Y)\\=&\mathrm{D}_X(A_\xi(Y))-A_{\mathrm{D}^{\perp}_X\xi}(Y)-A_\xi(\mathrm{D}_XY).\end{aligned}\tag{2.8}$$

容易验证，$\mathrm{D}A$ 对每一个自变量具有 $C^\infty(M)$-线性性质，因此 $\mathrm{D}A$ 是一个张量场．这样，(2.7) 式可写成

$$\overline{\mathcal{R}}(X,Y)\xi = -(\mathrm{D}_X A)(\xi,Y) + (\mathrm{D}_Y A)(\xi,X) + \mathcal{R}^\perp(X,Y)\xi - h(X,A_\xi(Y)) + h(Y,A_\xi(X)).$$

分别写出它们的切分量和法分量得到

$$(\mathrm{D}_X A)(\xi,Y) - (\mathrm{D}_Y A)(\xi,X) = -(\overline{\mathcal{R}}(X,Y)\xi)^\top, \tag{2.9}$$

$$\mathcal{R}^\perp(X,Y)\xi = (\overline{\mathcal{R}}(X,Y)\xi)^\perp + h(X,A_\xi(Y)) - h(Y,A_\xi(X)). \tag{2.10}$$

方程 (2.9) 和 (2.5) 是等价的．事实上，对于 $\forall Z \in \mathfrak{X}(M)$，将 (2.9) 式的右端和 Z 作内积得

$$-\langle(\overline{\mathcal{R}}(X,Y)\xi)^\top, Z\rangle = -\langle\overline{\mathcal{R}}(X,Y)\xi, Z\rangle = \langle\overline{\mathcal{R}}(X,Y)Z,\xi\rangle,$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\langle(\mathrm{D}_X A)(\xi,Y), Z\rangle =& \langle\mathrm{D}_X(A_\xi(Y)), Z\rangle - \langle A_{\mathrm{D}^\perp_X\xi}(Y), Z\rangle \\ &- \langle A_\xi(\mathrm{D}_X Y), Z\rangle \\ =& X(\langle A_\xi(Y), Z\rangle) - \langle A_\xi(Y), \mathrm{D}_X Z\rangle \\ &- \langle h(Y,Z), \mathrm{D}^\perp_X\xi\rangle - \langle h(\mathrm{D}_X Y, Z), \xi\rangle \\ =& X(\langle h(Y,Z),\xi\rangle) - \langle h(Y,\mathrm{D}_X Z),\xi\rangle \\ &- \langle h(\mathrm{D}_X Y, Z),\xi\rangle - \langle h(Y,Z), \mathrm{D}^\perp_X\xi\rangle \\ =& \langle \mathrm{D}^\perp_X(h(Y,Z)) - h(Y,\mathrm{D}_X Z) \\ &- h(\mathrm{D}_X Y, Z),\xi\rangle \\ =& \langle(\mathrm{D}_X h)(Y,Z),\xi\rangle,\end{aligned}$$

因此，(2.9) 式成为

$$\langle(\mathrm{D}_X h)(Y,Z) - (\mathrm{D}_Y h)(X,Z) - (\overline{\mathcal{R}}(X,Y)Z)^\perp, \xi\rangle = 0, \quad \forall \xi \in \Gamma(T^\perp M).$$

这意味着 (2.5) 式成立．上述过程显然是可逆的，因而从 (2.5) 式可以导出 (2.9) 式．

由此可见，从 (2.2) 式得到的新方程只有 (2.10) 式，通常称为子流形 M 的 **Ricci 方程**.

对于子流形 $i: M \to N$ 来说，Gauss-Codazzi-Ricci 方程

$$\begin{aligned}R(X,Y,Z,W) =& \overline{R}(X,Y,Z,W) + \langle h(X,W), h(Y,Z)\rangle \\ &- \langle h(X,Z), h(Y,W)\rangle,\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$(\mathrm{D}_X h)(Y,Z) - (\mathrm{D}_Y h)(X,Z) = (\overline{\mathcal{R}}(X,Y)Z)^\perp, \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^\perp(X,Y)\xi =& (\overline{\mathcal{R}}(X,Y)\xi)^\perp + h(X,A_\xi(Y)) \\ &- h(Y,A_\xi(X))\end{aligned} \tag{2.10}$$

反映了诱导度量 $g = i^*\bar{g}$、第二基本形式 h、以及法丛上的法联络 $\mathrm{D}^\perp$ 与外围黎曼空间 N 的黎曼度量 $\bar{g}$ 之间应该满足的关系式．这三个方程合称为**子流形 $i: M \to N$ 的基本方程**.

现在把基本方程用子流形 $i: M \to N$ 上的活动标架表示出来．

设 $p \in M$，$\{e_A\}$ 是定义在 p 点附近的一个 Darboux 标架场，则有

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}q = \omega^i e_i, \qquad \omega^\alpha = 0, \\ &\overline{\mathrm{D}}e_i = \omega_i^j e_j + \omega_i^\alpha e_\alpha = \mathrm{D}e_i + h_{ij}^\alpha \omega^j e_\alpha \\ &\overline{\mathrm{D}}e_\alpha = \omega_\alpha^j e_j + \omega_\alpha^\beta e_\beta = -\sum_{j,k} h_{jk}^\alpha \omega^k e_j + \mathrm{D}^\perp e_\alpha,\end{aligned} \tag{2.11}$$

其中

$$\mathrm{D}e_i = \omega_i^j e_j, \quad \mathrm{D}^\perp e_\beta = \omega_\beta^\alpha e_\alpha, \quad h = h_{ij}^\alpha \omega^i \otimes \omega^j \otimes e_\alpha, \tag{2.12}$$

根据 $\mathrm{D}h$ 的定义

$$\mathrm{D}h = \omega^i \otimes \omega^j \otimes (\mathrm{d}h_{ij}^\alpha - \omega_i^k h_{kj}^\alpha - \omega_j^k h_{ik}^\alpha + \omega_\beta^\alpha h_{ij}^\beta) \otimes e_\alpha.$$

令

$$h^\alpha_{ijk}\omega^k = dh^\alpha_{ij} - \omega_i^k h^\alpha_{kj} - \omega_j^k h^\alpha_{ik} + \omega_\beta^\alpha h^\beta_{ij}. \tag{2.13}$$

由于 $h^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ji}$, 故有 $h^\alpha_{ijk} = h^\alpha_{jik}$. 因此，如果 R_{ijkl} 和 $\overline{R}_{ABCD}$ 分别是 M 和 N 上的黎曼曲率张量在 Darboux 标架场 $\{e_A\}$ 下的分量，则 Gauss-Codazzi-Ricci 方程可以表示为：

$$R_{ijkl} = \overline{R}_{ijkl} - \sum_\alpha (h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl} - h^\alpha_{il}h^\alpha_{jk}), \tag{2.14}$$

$$h^\alpha_{ijk} - h^\alpha_{ikj} = \overline{R}_{\alpha ijk}, \tag{2.15}$$

$$R^\perp_{\alpha\beta ij} = \overline{R}_{\alpha\beta ij} - \sum_k (h^\alpha_{ik}h^\beta_{jk} - h^\alpha_{jk}h^\beta_{ik}), \tag{2.16}$$

其中

$$R^\perp_{\alpha\beta ij} = \langle R^\perp(e_i, e_j)e_\alpha, e_\beta\rangle. \tag{2.17}$$

这些方程还可以从黎曼流形 (N, g) 的结构方程导出．事实上，第四章的定理 2.1 告诉我们，(N, h) 的曲率形式是

$$\overline{\Omega}_A^B = d\omega_A^B - \omega_A^C \wedge \omega_C^B = \frac{1}{2}\overline{R}^B_{ACD}\omega^C \wedge \omega^D, \tag{2.18}$$

并且

$$\overline{R}(e_A, e_B)e_C = \overline{\Omega}_C^D(e_A, e_B)e_D.$$

将 (2.18) 式中的 $\overline{\Omega}_i^j$ 拉回到子流形 $i: M \to N$ 上得到

$$\overline{\Omega}_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j - \omega_i^\alpha \wedge \omega_\alpha^j = \Omega_i^j + \sum_\alpha h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl}\omega^k \wedge \omega^l,$$

因此

$$\Omega_i^j = \overline{\Omega}_i^j - \frac{1}{2}\sum_\alpha (h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl} - h^\alpha_{il}h^\alpha_{jk})\omega^k \wedge \omega^l.$$

这就是 Gauss 方程．同理，还有

$$\overline{\Omega}_i^\alpha = d\omega_i^\alpha - \omega_i^j \wedge \omega_j^\alpha - \omega_i^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha$$

$$= d(h^\alpha_{ij}\omega^j) - h^\alpha_{jk}\omega_i^j \wedge \omega^k - h^\beta_{ik}\omega^k \wedge \omega_\beta^\alpha$$

$$= \sum_j (dh^\alpha_{ij} - h^\alpha_{ik}\omega_j^k - h^\alpha_{kj}\omega_i^k + h^\beta_{ij}\omega_\beta^\alpha) \wedge \omega^j$$

$$h^\alpha_{ijk}\omega^k \wedge \omega^j = -\frac{1}{2}(h^\alpha_{ijk} - h^\alpha_{ikj})\omega^j \wedge \omega^k,$$

以及

$$\overline{\Omega}_\alpha^\beta = d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^k \wedge \omega_k^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta$$

$$= \Omega^{\perp\beta}_\alpha + \sum_k h^\alpha_{ki}h^\beta_{kj}\omega^i \wedge \omega^j$$

$$= \Omega^{\perp\beta}_\alpha + \frac{1}{2}\sum_k (h^\alpha_{ki}h^\beta_{kj} - h^\alpha_{kj}h^\beta_{ki})\omega^i \wedge \omega^j,$$

这分别是 Codazzi 方程和 Ricci 方程．所以 Gauss-Codazzi-Ricci 方程等价于

$$\begin{cases} \overline{\Omega}_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \sum_\alpha \omega_i^\alpha \wedge \omega_j^\alpha, \\ \overline{\Omega}_i^\alpha = d\omega_i^\alpha - \omega_i^j \wedge \omega_j^\alpha - \omega_i^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha, \\ \overline{\Omega}_\alpha^\beta = d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta + \sum_k \omega_k^\alpha \wedge \omega_k^\beta, \end{cases}$$

或者

$$\begin{cases} \overline{\Omega}_i^j = \Omega_i^j + \frac{1}{2}\sum_\alpha (h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl} - h^\alpha_{il}h^\alpha_{jk})\omega^k \wedge \omega^l, \\ \overline{\Omega}_i^\alpha = -\frac{1}{2}(h^\alpha_{ijk} - h^\alpha_{ikj})\omega^j \wedge \omega^k, \\ \overline{\Omega}_\alpha^\beta = \Omega^{\perp\beta}_\alpha + \frac{1}{2}\sum_k (h^\alpha_{ki}h^\beta_{kj} - h^\alpha_{kj}h^\beta_{ki})\omega^i \wedge \omega^j, \end{cases} \tag{2.19}$$

其中左端是 (N, g) 的曲率形式在子流形 (M, g) 上的限制，右端的 ω_i^j, ω_α^β 分别是切丛 TM 和法丛 $T^\perp M$ 上的联络形式，

$$h = h^\alpha_{ij}\omega^i \otimes \omega^j \otimes e_\alpha$$

是子流形 $i: M \to N$ 的第二基本形式．

§7.3 欧氏空间中的子流形

子流形微分几何学的一个基本问题是：对于给定的两个黎曼流形

$$(M,g) \text{ 和 } (N,\bar{g}),\quad m=\dim M<n=\dim N,$$

是否存在浸入映射 $f:M\to N$，使得 $f^*\bar{g}=g$？换句话说，(M,g) 能否等距地浸入到 $(N,\bar{g})$ 中去成为后者的子流形？为了用微分方程来刻画这个问题，在 M 中取局部坐标系 $(U;u^i)$，在 N 中取局部坐标系 $(V;x^A)$，设

$$\bar{g}=\sum_{A,B}\bar{g}_{AB}\mathrm{d}x^A\otimes\mathrm{d}x^B,\quad g=\sum_{i,j}g_{ij}\mathrm{d}u^i\otimes\mathrm{d}u^j.$$

那么上面的问题可以改述为：是否存在一组函数

$$x^A=f^A(u^1,\cdots,u^m),\quad 1\leq A\leq n,$$

满足方程组

$$\sum_{A,B}\bar{g}_{AB}(f(u))\frac{\partial f^A}{\partial u^i}\frac{\partial f^B}{\partial u^j}=g_{ij}(u). \tag{3.1}$$

这是一组非常复杂的偏微分方程组，要在一般情况下求它的解是相当困难的.

不过，真正感兴趣的问题是：一个 m 维黎曼流形 (M,g) 能否实现为高维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一个浸入子流形？或者说，是否存在从黎曼流形 (M,g) 到 $\mathbb{R}^n$ 的等距浸入 f？如果在 $\mathbb{R}^n$ 中取标准的笛卡尔直角坐标系 $(x^1,\cdots,x^n)$，那么 $\mathbb{R}^n$ 的度量可以表示为

$$\bar{g}=\sum_A(\mathrm{d}x^A)^2=\sum_A\mathrm{d}x^A\otimes\mathrm{d}x^A,$$

即 $\bar{g}_{AB}=\delta_{AB}$. 于是方程组 (3.1) 成为

$$\sum_A\frac{\partial x^A}{\partial u^i}\frac{\partial x^A}{\partial u^j}=g_{ij}(u),\quad u\in U, \tag{3.2}$$

这仍然是一个复杂的方程组. 为了求解方程组 (3.2)，一种办法是考虑 $\mathbb{R}^n$ 中单位正交标架构成的集合 $\mathscr{P}$，它是一个 $n(n+1)/2$ 维光滑流形，并且 $\mathscr{P}$ 中任意两个成员都可以通过欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上唯一的一个等距变换彼此叠合. 因此，$\mathscr{P}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的等距变换群的几何表示. 利用空间 $\mathscr{P}$，可以把方程组 (3.2) 化为一个 Pfaff 方程组，从而使问题得到简化.

首先回顾一下 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上的标架空间 $\mathscr{P}$. 在 $\mathbb{R}^n$ 中取定一个单位正交标架 $\{O;\delta_A\}$，其中

$$\delta_A=(0,\cdots,\overset{(A)}{1},\cdots,0)^t,\quad 1\leq A\leq n.$$

那么，$\mathbb{R}^n$ 中的任意一个标架 $\{p;e_A\}$ 是由空间 $\mathbb{R}^n$ 中任意一点 p 和任意 n 个线性无关的向量 e_A 组成的，在固定的标架 $\{O;\delta_A\}$ 下，可以把点 p 和向量 e_A 分别表示为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Op}&=\sum_{A=1}^n a^A\delta_A,\\ e_A&=\sum_{B=1}^n a_A^B\delta_B,\qquad \det(a_A^B)\neq 0.\end{aligned} \tag{3.3}$$

于是，标架 $\{p;e_A\}$ 相当于一个 $n\times(n+1)$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} a^1 & a_1^1 & \cdots & a_n^1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a^n & a_1^n & \cdots & a_n^n\end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

它的第一列是 $\overrightarrow{Op}$ 的分量，后面各列分别是 e_A 的分量. 由此可见，标架空间 $\mathscr{P}$ 是 $\mathbb{R}^{n(n+1)}$ 中的一个开子集，以 (a^A,a_A^B) 为坐标系. 在 $\mathbb{R}^n$ 中协变微分就是普通微分，因此

$$\begin{aligned}\mathrm{d}p&=\sum_A\mathrm{d}a^A\delta_A=\sum_A\theta^A e_A,\\ \mathrm{d}e_A&=\sum_B\mathrm{d}a_A^B\delta_B=\sum_B\theta_A^B e_B,\end{aligned} \tag{3.5}$$

其中

$$\theta^A = \sum_B b^A_B \mathrm{d}a^B, \quad \theta^B_A = \sum_C b^B_C \mathrm{d}a^C_A, \tag{3.6}$$

这里 (b^B_A) 是 (a^B_A) 的逆矩阵，即 b^B_A 满足恒等式

$$\sum_C a^B_C b^C_A = \sum_C b^B_C a^C_A = \delta^B_A.$$

由此可见，θ^A, θ^B_A 是定义在 $\mathscr{P}$ 上的 1 次微分式，它们与固定单位正交标架 $\{O; \delta_A\}$ 的取法无关，称为在 $\mathbb{R}^n$ 中的活动标架 $\{p; e_A\}$ 的相对分量.

对 (3.6) 式求外微分得到

$$\mathrm{d}\theta^A = \sum_B \theta^B \wedge \theta^A_B, \quad \mathrm{d}\theta^B_A = \sum_C \theta^C_A \wedge \theta^B_C, \tag{3.7}$$

这就是 $\mathbb{R}^n$ 的结构方程. 其实，从黎曼几何的角度看，第一式表示联络 $\overline{\mathrm{D}} = \mathrm{d}$ 的无挠性，第二式表示 $\mathbb{R}^n$ 的曲率形式为零.

对于浸入在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的子流形，需要重新叙述它的基本公式和基本方程，然后再给出黎曼流形 (M, g) 能够局部地等距浸入到高维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中去的充分必要条件.

设 $i: M \to \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 m 维浸入子流形. 设 $(U; u^i)$ 是 M 的一个局部坐标系，则映射 i 的局部坐标表达式是

$$x^A = x^A(u^1, \cdots, u^m), \quad 1 \le A \le n. \tag{3.8}$$

于是在 U 上定义了 m 个切向量场

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_A \frac{\partial x^A}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial x^A}. \tag{3.9}$$

容易看出，映射 i 是浸入的条件等价于切向量场 $\dfrac{\partial}{\partial u^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial u^m}$ 在 U 上是处处线性无关的，即 $n \times m$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^1}{\partial u^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x^n}{\partial u^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial u^m} \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

的秩处处是 m. 在 $U \subset M$ 上，诱导度量 $i^* g$ 可以表示为

$$i^*\bar{g} = \sum_{A,i,j} \frac{\partial x^A}{\partial u^i} \frac{\partial x^A}{\partial u^j} \mathrm{d}u^i \otimes \mathrm{d}u^j.$$

换言之，

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle = g_{ij} = \sum_A \frac{\partial x^A}{\partial u^i} \frac{\partial x^A}{\partial u^j}.$$

在下面记

$$e_i = \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

由于矩阵 (3.10) 的秩为 m, 对于任意的 $p \in U$, 都有 p 的一个邻域 U_0 以及定义在 U_0 上的 $n-m$ 个光滑向量场

$$e_\alpha = \sum_A a^A_\alpha \frac{\partial}{\partial x^A}, \quad m+1 \le \alpha \le n,$$

使得

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, e_\alpha \right\rangle = 0, \quad \langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta},$$

即 $e_{m+1}, \cdots, e_n$ 是子流形 $i: M \to \mathbb{R}^n$ 的 $n-m$ 个彼此正交的单位法向量场. 这样，在子流形 $i: M \to \mathbb{R}^n$ 的每一点的一个邻域 U_0 上存在标架场 $\{q; e_i, e_\alpha\}$, 其中 $\{e_i\}$ 是 U_0 上的自然标架场，$\{e_\alpha\}$ 是单位正交法标架场. 注意到在 $\mathbb{R}^n$ 中的协变微分算子 $\overline{\mathrm{D}}$ 就是普通的微分算子 d, 所以

$$\begin{cases} \mathrm{d}q = \omega^i e_i, \quad \omega^\alpha = 0, \\ \mathrm{d}e_i = \omega^j_i e_j + \omega^\alpha_i e_\alpha, \\ \mathrm{d}e_\alpha = \omega^j_\alpha e_j + \omega^\beta_\alpha e_\beta, \end{cases} \tag{3.11}$$

其中

$$\begin{aligned} &\omega^i = \mathrm{d}u^i, \quad \omega_i^j = \Gamma_{ik}^j \mathrm{d}u^k, \\ &\omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \mathrm{d}u^j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha, \quad \omega_\alpha^j = -g^{ji}\omega_i^\alpha, \end{aligned} \tag{3.12}$$

而且 Γ_{ik}^j 是 g_{ij} 的 Christoffel 记号，h_{ij}^α 是第二基本形式的系数，$\omega_\alpha^\beta = -\omega_\beta^\alpha$ 是法丛 $T^\perp M$ 上的法联络 $\mathrm{D}^\perp$ 的联络形式.

由于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的曲率形式 Ω_A^B 恒为零，子流形的基本方程成为 (参看 (2.14)~(2.16) 式)

$$R_{ijkl} = -\sum_\alpha (h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha - h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha), \tag{3.13}$$

$$h_{ijk}^\alpha = h_{ikj}^\alpha, \tag{3.14}$$

$$R_{\alpha\beta ij}^\perp = -\sum_{k,l} g^{kl}(h_{ik}^\alpha h_{jl}^\beta - h_{jk}^\alpha h_{il}^\beta), \tag{3.15}$$

其中

$$\begin{gathered} R_{ijkl} = \langle \mathcal{R}(e_k, e_l)e_i, e_j\rangle, \quad R_{\alpha\beta ij}^\perp = \langle \mathcal{R}^\perp(e_i, e_j)e_\alpha, e_\beta\rangle, \\ \mathcal{R}(e_i, e_j)e_k = \mathrm{D}_{e_i}\mathrm{D}_{e_j}e_k - \mathrm{D}_{e_j}\mathrm{D}_{e_i}e_k - \mathrm{D}_{[e_i,e_j]}e_k = \Omega_k^l(e_i, e_j)e_l, \\ \mathcal{R}^\perp(e_i, e_j)e_\alpha = \mathrm{D}_{e_i}^\perp\mathrm{D}_{e_j}^\perp e_\alpha - \mathrm{D}_{e_j}^\perp\mathrm{D}_{e_i}^\perp e_\alpha - \mathrm{D}_{[e_i,e_j]}^\perp e_\alpha = \Omega_\alpha^{\perp\beta}(e_i, e_j)e_\beta, \\ \Omega_k^l = \mathrm{d}\omega_k^l - \omega_k^h \wedge \omega_h^l, \quad \Omega_\alpha^{\perp\beta} = \mathrm{d}\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta, \\ h_{ijk}^\alpha \omega^k = \mathrm{d}h_{ij}^\alpha - h_{kj}^\alpha \omega_i^k - h_{ik}^\alpha \omega_j^k + h_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha. \end{gathered}$$

根据 §7.2 最后一段的讨论，Gauss-Codazzi-Ricci 方程 (3.13), (3.14) 和 (3.15) 等价于 ω^A, ω_A^B 所满足的从 $\mathbb{R}^n$ 诱导的结构方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad \omega^j \wedge \omega_j^\alpha = 0, \\ \mathrm{d}\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = \omega_i^\alpha \wedge \omega_\alpha^j, \\ \mathrm{d}\omega_i^\alpha - \omega_i^j \wedge \omega_j^\alpha - \omega_i^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha = 0, \\ \mathrm{d}\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta = \omega_\alpha^k \wedge \omega_k^\beta, \end{cases} \tag{3.16}$$

这里，ω^A, ω_A^B 是由子流形 $i: M \to \mathbb{R}^n$ 给出的依赖 m 个独立参数的标架族的相对分量. 由此可见，若要把黎曼流形 (M, g) 局部地等距浸入到欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中去，除了 M 的黎曼度量外，还需要知道相当于子流形的第二基本形式以及法丛上的法联络等几何结构，而且它们必须满足 Gauss-Codazzi-Ricci 方程.

定理 3.1 设 (M, g) 是单连通的 m 维黎曼流形，并且在 M 上有一个秩为 k 的黎曼向量丛 $\tilde{\pi}: E \to M$，其纤维上的内积 (黎曼结构) 记为 $\{\cdot, \cdot\}$. 如果向量丛

$$\pi: \mathrm{Hom}(TM \otimes TM, E) \to M$$

有一个对称截面 σ(即在每一点 $p \in M$, $\sigma_p: T_pM \times T_pM \to E_p$ 是一个对称的双线性映射), 并且向量丛 $\tilde{\pi}: E \to M$ 有一个与其黎曼结构相容的联络 $\tilde{\nabla}$，它们和 M 上的黎曼联络 D 一起满足下列条件：$\forall X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, $\xi \in \Gamma(E)$,

(1) $\langle \mathcal{R}(X, Y)Z, W\rangle = \{\sigma(X, W), \sigma(Y, Z)\} - \{\sigma(X, Z), \sigma(Y, W)\}$;

(2) $(\tilde{\mathrm{D}}_X\sigma)(Y, Z) = (\tilde{\mathrm{D}}_Y\sigma)(X, Z)$, 其中 $\tilde{\mathrm{D}}_X\sigma$ 的定义是

$$(\tilde{\mathrm{D}}_X\sigma)(Y, Z) = \tilde{\nabla}_X(\sigma(Y, Z)) - \sigma(\mathrm{D}_XY, Z) - \sigma(Y, \mathrm{D}_XZ); \tag{3.17}$$

(3) $\tilde{\mathcal{R}}(X, Y)\xi = \sigma(A_\xi(Y), X) - \sigma(A_\xi(X), Y)$,

其中 $\tilde{\mathcal{R}}$ 是向量丛 $\tilde{\pi}: E \to M$ 的联络 $\tilde{\nabla}$ 的曲率算子, 映射 $A_\xi: \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ 的定义是

$$\langle A_\xi(X), Y\rangle = \{\sigma(X, Y), \xi\}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \tag{3.18}$$

则存在等距浸入 $f: M \to \mathbb{R}^{m+k}$ 和丛映射 $\tilde{f}: E \to T^\perp M$, 使得

$$\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi,$$

其中 $\pi: T^\perp M \to M$ 是法丛的投影映射，并且

$$\begin{aligned} &\langle \tilde{f}(\xi), \tilde{f}(\eta)\rangle = \{\xi, \eta\}, \quad \forall \xi, \eta \in E_p, \\ &\tilde{f}(\sigma(X, Y)) = h(X, Y), \quad \forall X, Y \in T_pM, \end{aligned}$$

$$\tilde{f}(\bar{\nabla}_X\xi) = \mathrm{D}^{\perp}_X(\tilde{f}(\xi)), \quad \forall X \in T_pM, \xi \in \Gamma(E),$$

其中 h 和 $\mathrm{D}^{\perp}$ 是等距浸入 f 的第二基本形式和法联络 (参看注记 1.1).

注记 3.1 关于向量丛 $\mathrm{Hom}(TM \otimes TM, E)$, 参看第一章例 9.5.

证明 设 $(U; u^i)$ 是点 $p \in M$ 的局部坐标系, 命

$$\begin{aligned} &\bar{e}_i = \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad \omega^i = \mathrm{d}u^i, \quad \omega^\alpha = 0, \\ &g_{ij} = g(\bar{e}_i, \bar{e}_j), \quad g|_U = \sum_{i,j} g_{ij}\omega^i \otimes \omega^j. \end{aligned} \tag{3.19}$$

用 (g^{ij}) 表示 (g_{ij}) 的逆矩阵, 并且用 Γ^k_{ij} 记 g_{ij} 的 Christoffel 记号. 命

$$\omega_i^j = \Gamma^j_{ik}\mathrm{d}u^k, \tag{3.20}$$

则由 $\mathrm{D}\bar{e}_i = \omega_i^j\bar{e}_j$ 给出 (M, g) 上的黎曼联络, 并且 $\mathrm{d}\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i$. 同时取向量丛 $\tilde{\pi}: E \to M$ 在 U 上的单位正交标架场

$$\{\bar{e}_\alpha\}, \quad m+1 \le \alpha \le n = m+k,$$

从而有 $\langle \bar{e}_\alpha, \bar{e}_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$. 令

$$\sigma(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = h^\alpha_{ij}\bar{e}_\alpha, \quad h^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ji},$$

则

$$\langle A_{\bar{e}_\alpha}(\bar{e}_i), \bar{e}_j \rangle = \langle \sigma(\bar{e}_i, \bar{e}_j), \bar{e}_\alpha \rangle = h^\alpha_{ij},$$

因而

$$A_{\bar{e}_\alpha}(\bar{e}_i) = \sum_{j,k} g^{jk}h^\alpha_{ij}\bar{e}_k.$$

定义

$$\omega_i^\alpha = h^\alpha_{ij}\omega^j, \qquad \omega_\alpha^i = -g^{ij}\omega_j^\alpha, \tag{3.21}$$

则有

$$\mathrm{d}\omega^\alpha = \omega^i \wedge \omega_i^\alpha = 0.$$

用 ω_α^β 表示向量丛 $\tilde{\pi}: E \to M$ 上的联络 $\bar{\nabla}$ 在单位正交标架场 $\{\bar{e}_\alpha\}$ 下的联络形式, 即

$$\bar{\nabla}\bar{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar{e}_\beta. \tag{3.22}$$

由 $\bar{\nabla}$ 和黎曼结构 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的相容性得知

$$\omega_\alpha^\beta = -\omega_\beta^\alpha.$$

至此, 已经有定义在 U 上的 $n+n^2$ 个 1 次微分式

$$\omega^i, \quad \omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^j, \quad \omega_i^\alpha = -g_{ij}\omega_\alpha^j, \quad \omega_\alpha^\beta = -\omega_\beta^\alpha,$$

其中 $\omega^1, \cdots, \omega^m$ 是处处线性无关的, 其余的 ω_A^B 是 $\omega^1, \cdots, \omega^m$ 的线性组合, 它们满足结构方程

$$\mathrm{d}\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A, \quad \omega_B^A - \omega_A^B = 0.$$

现在来考察定理所假设的条件 (1)~(3) 的意义. 注意到

$$\langle \mathcal{R}(\bar{e}_i, \bar{e}_j)\bar{e}_k, \bar{e}_l \rangle = \langle \Omega_k^h(\bar{e}_i, \bar{e}_j)\bar{e}_h, \bar{e}_l \rangle = g_{lh}\Omega_k^h(\bar{e}_i, \bar{e}_j),$$

而条件 (1) 的右边是

$$\begin{aligned} &\langle \sigma(\bar{e}_i, \bar{e}_l), \sigma(\bar{e}_j, \bar{e}_k) \rangle - \langle \sigma(\bar{e}_i, \bar{e}_k), \sigma(\bar{e}_j, \bar{e}_l) \rangle \\ &= \sum_\alpha (h^\alpha_{il}h^\alpha_{jk} - h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl}) \\ &= \sum_\alpha (\omega_l^\alpha(\bar{e}_i)\omega_k^\alpha(\bar{e}_j) - \omega_k^\alpha(\bar{e}_i)\omega_l^\alpha(\bar{e}_j)) \\ &= \sum_\alpha g_{lh}(\omega_k^\alpha(\bar{e}_i)\omega_\alpha^h(\bar{e}_j) - \omega_k^\alpha(\bar{e}_j)\omega_\alpha^h(\bar{e}_i)) \\ &= \sum_\alpha g_{lh}\omega_k^\alpha \wedge \omega_\alpha^h(\bar{e}_i, \bar{e}_j). \end{aligned}$$

所以, 条件 (1) 等价于

$$\Omega_k^l = \sum_\alpha \omega_k^\alpha \wedge \omega_\alpha^l,$$

即

$$\mathrm{d}\omega_k^l - \omega_k^i \wedge \omega_i^l - \omega_k^\alpha \wedge \omega_\alpha^l = \mathrm{d}\omega_k^l - \omega_k^A \wedge \omega_A^l = 0. \tag{3.23}$$

由定义式 (3.17) 得到

$$\begin{aligned}
(\tilde{\mathrm{D}}_{\tilde e_i}\sigma)(\tilde e_j, \tilde e_k) &= \tilde\nabla_{\tilde e_i}(\sigma(\tilde e_j, \tilde e_k)) - \sigma(\mathrm{D}_{\tilde e_i}\tilde e_j, \tilde e_k) - \sigma(\tilde e_j, \mathrm{D}_{\tilde e_i}\tilde e_k)\\
&= \tilde e_i(h_{jk}^\alpha)\tilde e_\alpha + h_{jk}^\alpha\omega_\alpha^\beta(\tilde e_i)\tilde e_\beta - \omega_j^l(\tilde e_i)h_{lk}^\alpha\tilde e_\alpha - \omega_k^l(\tilde e_i)h_{jl}^\alpha\tilde e_\alpha\\
&= (\tilde e_i(h_{jk}^\alpha) - \omega_j^l(\tilde e_i)h_{lk}^\alpha - \omega_k^l(\tilde e_i)h_{jl}^\alpha + \omega_\beta^\alpha(\tilde e_i)h_{jk}^\beta)\tilde e_\alpha\\
&= (\tilde e_i(\omega_k^\alpha(\tilde e_j)) - \omega_j^l(\tilde e_i)\omega_k^\alpha(\tilde e_l) - \omega_k^l(\tilde e_i)\omega_l^\alpha(\tilde e_j) + \omega_\beta^\alpha(\tilde e_i)\omega_k^\beta(\tilde e_j))\tilde e_\alpha.
\end{aligned}$$

这样，条件 (2) 等价于

$$\begin{aligned}
&\tilde e_i(\omega_k^\alpha(\tilde e_j)) - \tilde e_j(\omega_k^\alpha(\tilde e_i)) - \omega_k^\alpha(\tilde e_l)(\omega_j^l(\tilde e_i) - \omega_i^l(\tilde e_j)) - \omega_k^l(\tilde e_i)\omega_l^\alpha(\tilde e_j)\\
&\quad + \omega_k^l(\tilde e_j)\omega_l^\alpha(\tilde e_i) - \omega_k^\beta(\tilde e_i)\omega_\beta^\alpha(\tilde e_j) + \omega_k^\beta(\tilde e_j)\omega_\beta^\alpha(\tilde e_i)\\
&= \tilde e_i(\omega_k^\alpha(\tilde e_j)) - \tilde e_j(\omega_k^\alpha(\tilde e_i)) - \omega_k^\alpha([\tilde e_i, \tilde e_j])\\
&\quad - (\omega_k^l \wedge \omega_l^\alpha)(\tilde e_i, \tilde e_j)\\
&\quad - \omega_k^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha(\tilde e_i, \tilde e_j)\\
&= (\mathrm{d}\omega_k^\alpha - \omega_k^l \wedge \omega_l^\alpha - \omega_k^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha)(\tilde e_i, \tilde e_j) = 0,
\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{d}\omega_k^\alpha - \omega_k^A \wedge \omega_A^\alpha = 0. \tag{3.24}$$

直接求 $\omega_\alpha^k = -g^{ki}\omega_i^\alpha$ 的外微分得到

$$\mathrm{d}\omega_\alpha^k - \omega_\alpha^A \wedge \omega_A^k = 0. \tag{3.24$'$}$$

根据曲率算子和曲率形式之间的关系有

$$\tilde R(\tilde e_i, \tilde e_j)\tilde e_\alpha = \tilde\Omega_\alpha^\beta(\tilde e_i, \tilde e_j)\tilde e_\beta,$$

其中 $\tilde\Omega_\alpha^\beta$ 是联络 $\tilde\nabla$ 的曲率形式，即

$$\tilde\Omega_\alpha^\beta = \mathrm{d}\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta.$$

从条件 (3) 的右端得到

$$\begin{aligned}
&\sigma(A_{\tilde e_\alpha}(\tilde e_j), \tilde e_i) - \sigma(A_{\tilde e_\alpha}(\tilde e_i), \tilde e_j)\\
&= \sigma\left(\sum_{kl} g^{kl}h_{jk}^\alpha\tilde e_l, \tilde e_i\right) - \sigma\left(\sum_{kl} g^{kl}h_{ik}^\alpha\tilde e_l, \tilde e_j\right)\\
&= \sum_{k,\beta} g^{kl}(h_{jk}^\alpha h_{li}^\beta - h_{ik}^\alpha h_{lj}^\beta)\tilde e_\beta\\
&= \sum_{k,\beta} g^{kl}(\omega_k^\alpha(\tilde e_j)\omega_l^\beta(\tilde e_i) - \omega_k^\alpha(\tilde e_i)\omega_l^\beta(\tilde e_j))\tilde e_\beta\\
&= \sum_{k,\beta} \omega_\alpha^k \wedge \omega_k^\beta(\tilde e_i, \tilde e_j)\tilde e_\beta,
\end{aligned}$$

因此条件 (3) 等价于

$$\mathrm{d}\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta = \omega_\alpha^k \wedge \omega_k^\beta,$$

即

$$\mathrm{d}\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^A \wedge \omega_A^\beta = 0. \tag{3.25}$$

由此可见，上面所构造的 1 次微分式 ω_A^B 满足结构方程

$$\mathrm{d}\omega_A^B - \omega_A^C \wedge \omega_C^B = 0.$$

要求黎曼流形 (M, g) 在 $\mathbb{R}^n$ 中的等距浸入，就是把子流形基本公式 (3.11) 中的 $\{q; e_A\}$ 看作未知函数，求解该方程组. 在这里，点 q 相当于

$$\overrightarrow{Oq} = \sum_A a^A\delta_A$$

的 n 个分量 $(a^1, \cdots, a^n)$，每一个向量

$$e_A = \sum_B a_A^B\delta_B$$

相当于它的 n 个分量 $(a^1_A,\cdots,a^n_A)$，所以总共有 $n(n+1)$ 个未知函数．这样，求黎曼流形 (M,g) 在 $\mathbb{R}^n$ 中的等距浸入相当于解偏微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u^A}{\partial u^k}=a^A_k,\\ \dfrac{\partial a^A_i}{\partial u^k}=\Gamma^j_{ik}a^A_j+h^\alpha_{ik}a^A_\alpha,\\ \dfrac{\partial a^A_\alpha}{\partial u^k}=-g^{ji}h^\alpha_{ik}a^A_j+\Gamma^\beta_{\alpha k}a^A_\beta,\end{cases}\tag{3.26}$$

其中 $\Gamma^\beta_{\alpha k}$ 是法联络 $D^\perp$ 的系数，即 $\omega^\beta_\alpha=\Gamma^\beta_{\alpha k}du^k$. 如果用 (b^B_A) 记 (a^B_A) 的逆矩阵，则上面的方程可以改写为

$$\begin{cases}b^B_A\dfrac{\partial a^A}{\partial u^k}=\delta^B_k,\\ b^B_A\dfrac{\partial a^A_i}{\partial u^k}=\Gamma^j_{ik}\delta^B_j+h^\alpha_{ik}\delta^B_\alpha,\\ b^B_A\dfrac{\partial a^A_\alpha}{\partial u^k}=-g^{ji}h^\alpha_{ik}\delta^B_j+\Gamma^\beta_{\alpha k}\delta^B_\beta.\end{cases}$$

将偏微分方程组转换成全微分方程组，则上面的方程组等价于

$$\begin{cases}\theta^B=\delta^B_k du^k,\\ \theta^B_i=\delta^B_j\omega^j_i+\delta^B_\alpha\omega^\alpha_i,\\ \theta^B_\alpha=-\delta^B_j g^{ji}\omega^\alpha_i+\delta^B_\beta\omega^\beta_\alpha,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\theta^i=du^i=\omega^i,\quad \theta^\alpha=0=\omega^\alpha,\\ \theta^j_i=\omega^j_i,\quad \theta^\alpha_i=\omega^\alpha_i,\\ \theta^j_\alpha=-g^{ji}\omega^\alpha_i=\omega^j_\alpha,\quad \theta^\beta_\alpha=\omega^\beta_\alpha.\end{cases}\tag{3.27}$$

于是，问题归结为考虑定义在 $U\times\mathbb{R}^{n(n+1)}$ 上的 Pfaff 方程组

$$\begin{cases}\sigma^A\equiv\theta^A-\omega^A=0,\\ \sigma^B_A\equiv\theta^B_A-\omega^B_A=0.\end{cases}\tag{3.28}$$

由于 $\{\theta^A,\theta^B_A\}$ 和 $\{\omega^A,\omega^B_A\}$ 满足同一个结构方程，所以

$$\begin{aligned}d\sigma^A&=d\theta^A-d\omega^A=\theta^B\wedge\theta^A_B-\omega^B\wedge\omega^A_B\\&=(\theta^B-\omega^B)\wedge\theta^A_B+\omega^B\wedge(\theta^A_B-\omega^A_B)=0\mod\{\sigma^C,\sigma^D_C\},\\ d\sigma^B_A&=d\theta^B_A-d\omega^B_A=\theta^C_A\wedge\theta^B_C-\omega^C_A\wedge\omega^B_C\\&=(\theta^C_A-\omega^C_A)\wedge\theta^B_C+\omega^C_A\wedge(\theta^B_C-\omega^B_C)=0\mod\{\sigma^C,\sigma^D_C\}.\end{aligned}$$

由此可见，Pfaff 方程组 (3.28) 满足 Frobenius 条件．根据 Frobenius 定理，在 $U\times\mathbb{R}^{n(n+1)}$ 中任意指定一点 (u^i_0,a^A_0,a^B_{0A})，则必有 Pfaff 方程组 (3.28) 的唯一的一个 m 维积分流形经过该点．由于

$$\omega^i=du^i,\ 1\le i\le m$$

是线性无关的，因此该积分流形可以表示为从 (u^i_0) 的开邻域 $U_0\subset U$ 到 $\mathbb{R}^{n(n+1)}$ 内的映射

$$F:U_0\to\mathbb{R}^{n(n+1)}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n^2},$$

满足初始条件 $F(u^1_0,\cdots,u^m_0)=(a^A_0,a^B_{0A})$.

为了使上面得到的解 $F(u)=(a^A(u),a^B_A(u))$ 给出所要求的等距浸入，假定初始值 (a^A_0,a^B_{0A}) 满足条件

$$\begin{cases}\sum\limits_A a^A_{0i}a^A_{0j}=g_{ij}(u^1_0,\cdots,u^m_0),\\ \sum\limits_A a^A_{0i}a^A_{0\alpha}=0,\\ \sum\limits_A a^A_{0\alpha}a^A_{0\beta}=\delta_{\alpha\beta}.\end{cases}\tag{3.29}$$

换言之，要求矩阵 (a^B_{0A}) 的各个列向量的度量系数恰好是前面选定的

$$\left\{\bar{e}_i=\frac{\partial}{\partial u^i},\bar{e}_\alpha\right\}$$

的度量系数. 在关于初始值的上述假定下, 容易证明 Pfaff 方程组 (3.28) 的解 $F(u)=(a^A(u),a_A^B(u))$ 满足条件

$$\begin{cases}\sum_A a_i^A(u)a_j^A(u)=g_{ij}(u),\\ \sum_A a_i^A(u)a_\alpha^A(u)=0,\\ \sum_A a_\alpha^A(u)a_\beta^A(u)=\delta_{\alpha\beta}.\end{cases}\tag{3.30}$$

事实上, 如果引进函数

$$\begin{cases}f_{ij}(u)=\sum_A a_i^A(u)a_j^A(u)-g_{ij}(u),\\ f_{i\alpha}(u)=\sum_A a_i^A(u)a_\alpha^A(u),\\ f_{\alpha\beta}(u)=\sum_A a_\alpha^A(u)a_\beta^A(u)-\delta_{\alpha\beta},\end{cases}\tag{3.31}$$

则

$$f_{ij}(u_0)=f_{i\alpha}(u_0)=f_{\alpha\beta}(u_0)=0.$$

通过求偏导数, 并且利用方程组 (3.26) 得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{ij}}{\partial u^k}&=\Gamma_{ik}^l f_{lj}+\Gamma_{jk}^l f_{il},\\ \frac{\partial f_{i\alpha}}{\partial u^k}&=-g^{jl}h_{lk}^\alpha f_{ij}+\Gamma_{ik}^l f_{l\alpha}+\Gamma_{\alpha k}^\beta f_{i\beta}+h_{ik}^\beta f_{\beta\alpha},\\ \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial u^k}&=-g^{ji}h_{ik}^\alpha f_{j\beta}-g^{ji}h_{ik}^\beta f_{j\alpha}+\Gamma_{\alpha k}^\gamma f_{\gamma\beta}+\Gamma_{\beta k}^\gamma f_{\alpha\gamma}.\end{aligned}$$

由此可见 $f_{ij},f_{i\alpha},f_{\alpha\beta}$ 在 (u_0) 的初始值是零, 并且满足线性齐次偏微分方程组. 根据解的唯一性可知, 条件 (3.30) 在 U_0 上处处成立.

若把映射 $(u^i)\in U_0\mapsto(a^A(u))\in\mathbb{R}^n$ 记成 f, 则方程组 (3.26) 的第一式表明

$$e_i(u)=\sum_A a_i^A(u)\delta_A$$

是 $f_*(\tilde{e}_i)$, 而条件 (3.30) 的第一式意味着

$$\langle e_i(u),e_j(u)\rangle=g_{ij}(u)=\langle\tilde{e}_i(u),\tilde{e}_j(u)\rangle.$$

因此, $\{e_i(u)\}$ 在 U_0 上是处处线性无关的, 并且 f 是等距浸入. 条件 (3.30) 的第二式和第三式表明 $\{e_\alpha\}$ 是浸入 f 的单位正交法标架场, 于是方程组 (3.26) 的第二式和第三式意味着

$$h_{ij}^\alpha du^i\otimes du^j\otimes e_\alpha(u)$$

是 f 的第二基本形式, 并且 $\omega_\alpha^\beta=\Gamma_{\alpha k}^\beta(u)du^k$ 是浸入 f 的法丛上的法联络形式. 丛映射

$$\tilde{f}:E\to T^\perp M$$

由对应 $\tilde{e}_\alpha(u)\mapsto e_\alpha(u)$ 给出. 证毕.

如果黎曼流形 (M,g) 实现为 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的超曲面, 则 M 的法丛是秩为 1 的向量丛, 法联络是平凡的, 因而 Ricci 方程也就失去了存在的意义. 于是, 超曲面的基本方程只有 Gauss 方程和 Codazzi 方程. 另外, 此时 M 的第二基本形式 h 可以看作 M 上的一个对称的二阶协变张量场, 即对于任意的 $p\in M$,

$$h_p:T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$$

是对称的双线性形式. 在局部标架场下, h 可以表示为

$$h=h_{ij}\omega^i\otimes\omega^j.$$

因此有下面的推论:

推论 3.2 设 (M,g) 是单连通的 m 维黎曼流形, 并且在 M 上有一个对称的二阶协变张量场 σ, 它们满足下列条件: $\forall X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M)$,

(1) $(R(X,Y)Z,W)=\sigma(X,W)\sigma(Y,Z)-\sigma(X,Z)\sigma(Y,W)$;

(2) $(\tilde{D}_X\sigma)(Y,Z)=(\tilde{D}_Y\sigma)(X,Z)$, 其中 $\tilde{D}_X\sigma$ 的定义是

$$(\tilde{D}_X\sigma)(Y,Z)=X(\sigma(Y,Z))-\sigma(D_XY,Z)-\sigma(Y,D_XZ),$$

则存在等距浸入 $f:M\to\mathbb{R}^{m+1}$, 使得 σ 是它的第二基本形式.

定理 3.1 不是一个令人满意的结果，它只是给出了黎曼流形 (M,g) 能够（局部地）等距浸入到高维欧氏空间中的框架性条件，并没有指出黎曼流形 (M,g) 在何时具有如定理 3.1 所述的附加构造（如向量丛 $\pi: E \to M$ 和相应的联络 $\tilde{\nabla}$，以及在向量丛 $\mathrm{Hom}(TM \otimes TM, E)$ 上符合要求的对称截面 σ 等等）．事实上，几何学家们十分关注的问题是，一个 m 维黎曼流形 (M,g) 能否等距嵌入（或浸入）到一个高维的欧氏空间中去？在 (M,g) 能够等距嵌入（或浸入）到欧氏空间中去的情况下，最低的余维数应该是多少？关于这些问题，目前只有一些孤立的结果，很难说已经形成了完整的一般理论．虽然人们已经知道了一些局部的或整体的存在性定理和不存在性定理，但是离开完全解决这些问题尚远．这些具体的结果要用到各种代数的、拓扑的、或分析的技巧，不可能在这里对它们作详尽的介绍．下面仅列举几个较为重要的结果，有兴趣的读者可以参看参考文献 [20],[23], [30] 和 [35] 中的有关章节．

定理 3.3 (Hilbert) 设 (M,g) 是完备的二维黎曼流形，如果它的 Gauss 曲率 $K \le -a^2 < 0$，则 (M,g) 不能等距地嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中成为 $\mathbb{R}^3$ 的嵌入子流形．

定理 3.4 (Rosendorn) 设 H^2 是完备的负常曲率二维黎曼流形，则存在从 H^2 到 $\mathbb{R}^5$ 中的等距浸入．

定理 3.5 每一个 m 维的 C^r-黎曼流形 $M(2 < r \le \infty)$ 都容许一个 C^r-等距嵌入 $f: M \to \mathbb{R}^q$，其中 $q = m^2 + 10m + 3$.

当 $r > 4$ 时，外围空间的维数 q 可以降低到 $(m+2)(m+3)/2$.

类似于定理 3.5 的结果首先是由 J.F.Nash 在 1956 年得到的，他证明：当 $3 \le r \le \infty$ 时，

$$q = (m+1)\left(\frac{3}{2}m(m+1) + 4m\right).$$

现在尚不知道是否任何一个 C^2-黎曼流形都能够 C^2-等距浸入到某个 $\mathbb{R}^q$ 中去．

最后，我们要指出：本节的定理 3.1 以及欧氏空间中子流形的基本公式和基本方程在适当的修改之后在常曲率空间中也是成立的．相应的修改请读者自己给出，在此不再赘述了．

§7.4 极小子流形

在这一节，要研究一类重要的子流形—极小子流形，它们是测地线在高维的推广．我们知道，黎曼流形 $(N,\tilde{g})$ 中的测地线是在 N 中的一条光滑曲线，在它的任意一个有固定端点的变分下弧长泛函在该曲线上取临界值．本节要讨论的极小子流形是体积泛函在有固定边界的变分下取临界值的子流形．因此，在叙述极小子流形的概念之前，首先要导出子流形体积的第一变分公式．

定义 4.1 设 M 是一个紧致带边的 m 维光滑流形，$f: M \to N$ 是光滑浸入．若有光滑映射

$$F: M \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to N \ (\text{记}\ f_t(x) = F(x,t)),$$

满足下列条件：

(1) $f_0 = f$;

(2) $f_t|_{\partial M} = f|_{\partial M}, \quad \forall t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$;

(3) 每一个 $f_t: M \to N$ 是浸入，

则称 F 是浸入子流形 $f: M \to N$ 的 **具有固定边界的变分**.

与曲线的变分的定义相比较，在这里增加了条件 (3)．这是为了保证每一个映射 $f_t: M \to N$ 在 M 上诱导出一个黎曼度量，从而使得 $f_t(M)$ 的体积元素可以定义．在 $m = 1$，即 M 是曲线的情形，映射 f_t 的非正则点是有限的，因而在不假定 f_t 是正则曲线的情况下，它的弧长总是可以定义的．然而，当 $m > 1$ 时，情况就大不一样了．由于高维子流形的性态比较复杂，加上条件 (3) 之后可以使问题变得简单一点．

以后用 $\frac{\partial}{\partial t}$ 表示区间 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上的标准切向量. 在每一点 $p\in M$ 有切向量

$$W(p)=F_{*(p,0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\in T_{f(p)}N. \tag{4.1}$$

这是沿已知浸入子流形 $f:M\to N$ 定义的光滑向量场, 称为变分 F 的 **变分向量场**. 显然,

$$W|_{f(\partial M)}=0.$$

特别地, 如果 F 的变分向量场 W 与子流形 $f:M\to N$ 处处正交, 则称 F 是 f 的 **法向变分**.

反过来, 若沿着浸入子流形 $f:M\to N$ 给定一个光滑向量场 W, 使得

$$W|_{f(\partial M)}=0,$$

则必有 $f:M\to N$ 的一个有固定边界的变分

$$F:M\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to N$$

以 W 为其变分向量场. 事实上, 只要考虑光滑映射 $F:M\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to N$, 使得

$$F(p,t)=\exp_{f(p)}(t\cdot W(p)), \tag{4.2}$$

其中 $\exp_{f(p)}(p\in M)$ 是黎曼流形 $(N,\bar g)$ 在点 $f(p)$ 的指数映射. 显然 $F(p,0)=f(p)$, 并且当 $p\in\partial M$ 时,

$$F(p,t)=f(p).$$

特别地,

$$F_{*(p,0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=(\exp_{f(p)})_{*0}(W(p))=W(p).$$

由于 $(\exp_{f(p)})_{*0}=\mathrm{id}$, 并且 M 是紧致的, 故有正数 $\varepsilon>\varepsilon_1>0$, 使得当 $t\in(-\varepsilon_1,\varepsilon_1)$ 时 $f_t:M\to N$ 是浸入子流形. 由定义 4.1,

$$F:M\times(-\varepsilon_1,\varepsilon_1)\to N$$

是子流形 $f:M\to N$ 的有固定边界的变分, 并以 W 为它的变分向量场.

定理 4.1　设 M 是一个紧致带边的 m 维有向光滑流形,

$$f:M\to N$$

是从 M 到 n 维黎曼流形 $(N,\bar g)$ 中的光滑浸入, $F:M\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to N$ 是它的任意一个有固定边界的变分. 定义函数 $V(t)=\mathrm{Vol}(M,(f_t)^*\bar g)$, 则

$$V'(0)=-m\int_M\langle H,W\rangle\mathrm{d}V, \tag{4.3}$$

其中 H 是子流形 $f:M\to N$ 的平均曲率向量, W 是变分 F 的变分向量场, $\mathrm{d}V$ 是子流形 $f:M\to N$ 的体积元素.

(4.3) 式称为子流形 **体积的第一变分公式**.

证明　在 M 上取局部坐标系 $(U;u^i)$, 令

$$\begin{aligned}\tilde X_i(p,t)&=F_{*(p,t)}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)=(f_t)_*\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right),\\ X_i&=\tilde X_i|_{t=0},\quad 1\le i\le m,\\ \tilde W(p,t)&=F_{*(p,t)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),\end{aligned} \tag{4.4}$$

则 Φ 的变分向量场 $W=\tilde W\Big|_{t=0}$.

用 $\overline{\mathrm{D}}$ 表示 N 上的黎曼联络或它在拉回向量丛 F^*TN 上的诱导联络; 当 $\overline{\mathrm{D}}$ 表示 F^*TN 上的诱导联络时, 对于每一个固定的 t, $\overline{\mathrm{D}}$ 化为拉回丛 $(f_t)^*TN$ 上的诱导联络. 由第二章的 (8.7) 式知

$$\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde X_i-\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\tilde W+F_*\left(\left[\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial u^i}\right]\right)=\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\tilde W. \tag{4.5}$$

对于任意的 t, 诱导黎曼度量 $g_t=(f_t)^*\bar g$ 的分量是

$$(g_t)_{ij}=\langle\tilde X_i,\tilde X_j\rangle. \tag{4.6}$$

记

$$G_t = \det((g_t)_{ij}), \tag{4.7}$$

则黎曼流形 (M, g_t) 上的体积元素是

$$\mathrm{d}V_t = \sqrt{G_t}\mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^m. \tag{4.8}$$

特别地， $\mathrm{d}V_0 = \mathrm{d}V$. 这样， M 关于黎曼度量 g_t 的体积是

$$V(t) = \mathrm{Vol}(M, g_t) = \int_M \mathrm{d}V_t. \tag{4.9}$$

直接计算得到

$$\begin{aligned} V'(t) &= \int_M \frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{G_t})\,\mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^m \\ &= \int_M \frac{1}{2\sqrt{G_t}}\frac{\partial G_t}{\partial t}\,\mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^m \\ &= \int_M \frac{1}{2\sqrt{G_t}}\sum_{i,j}(a_t)_{ij}\frac{\partial (g_t)_{ij}}{\partial t}\,\mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^m \\ &= \frac{1}{2}\int_M \sum_{i,j}(g_t)^{ij}\frac{\partial (g_t)_{ij}}{\partial t}\mathrm{d}V_t, \end{aligned}$$

其中 $(a_t)_{ij}$ 表示在行列式 G_t 中元素 $(g_t)_{ij}$ 的代数余子式， $(g_t)^{ij}$ 是度量矩阵 $((g_t)_{ij})$ 的逆矩阵的元素，因此， $(g_t)^{ij} = (a_t)_{ji}/G_t$. 注意到 $(g_t)^{ij}$ 关于上指标 i, j 也是对称的，利用第二章的 (8.8) 式得

$$\frac{\partial (g_t)_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\langle \tilde{X}_i, \tilde{X}_j\rangle = \langle \overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{X}_i, \tilde{X}_j\rangle + \langle \tilde{X}_i, \overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{X}_j\rangle,$$

故有

$$V'(t) = \int_M \sum_{i,j}(g_t)^{ij}\langle \overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{X}_i, \tilde{X}_j\rangle \mathrm{d}V_t. \tag{4.10}$$

由 (4.5) 式得到

$$\langle \overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{X}_i, \tilde{X}_j\rangle = \langle \overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\tilde{W}, \tilde{X}_j\rangle = \frac{\partial}{\partial u^i}\langle \tilde{W}, \tilde{X}_j\rangle - \langle \tilde{W}, \overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\tilde{X}_j\rangle$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial u^i}\langle \tilde{W}, \tilde{X}_j\rangle - \left\langle \tilde{W}, (f_t)_*\left(\mathrm{D}^t_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right\rangle \\ &\quad - \left\langle \tilde{W}, h_t\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right\rangle, \end{aligned}$$

其中 D^t 是诱导度量 g_t 的黎曼联络， h_t 是子流形 $f_t : M \to N$ 的第二基本形式 (参看本章的注记 1.1)．把上式代入 (4.10) 式便得

$$\begin{aligned} V'(t) = \int_M \sum_{i,j}(g_t)^{ij}\Bigg\{ &\frac{\partial}{\partial u^i}\left\langle \tilde{W}, (f_t)_*\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right\rangle \\ &- \left\langle \tilde{W}, (f_t)_*\left(\mathrm{D}^t_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right\rangle \\ &- \left\langle \tilde{W}, h_t\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right\rangle\Bigg\}\mathrm{d}V_t. \end{aligned} \tag{4.11}$$

令

$$W_j = \left\langle \tilde{W}, (f_t)_*\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right\rangle, \quad \tau_t = \sum_{i,j}(g_t)^{ij}W_j\frac{\partial}{\partial u^i}, \tag{4.12}$$

则 τ_t 是定义在流形 M 上的光滑切向量场，并且 $\tau_t|_{\partial M} = 0$. 切向量场 τ_t 关于诱导度量 g_t 的散度是

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\tau_t) &= \sum_i (\tau_t)^i{}_{,i} = \sum_i\left(\frac{\partial}{\partial u^i}(\tau_t)^i + \sum_j (\Gamma_t)^i_{ji}(\tau_t)^j\right) \\ &= \sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial u^i}((g_t)^{ij}W_j) + \sum_{i,j,k}(\Gamma_t)^i_{ji}(g_t)^{jk}W_k \\ &= \sum_{i,j}\left(\frac{\partial (g_t)^{ij}}{\partial u^i}W_j + (g_t)^{ij}\frac{\partial W_j}{\partial u^i}\right) + \sum_{i,j,k}(\Gamma_t)^i_{ji}(g_t)^{jk}W_k \\ &= \sum_{i,j}(g_t)^{ij}\left(\frac{\partial W_j}{\partial u^i} - \sum_k (\Gamma_t)^k_{ji}W_k\right), \end{aligned} \tag{4.13}$$

其中 $(\Gamma_t)^k_{ij}$ 是诱导度量 $(g_t)_{ij}$ 的 Christoffel 记号，即

$$\mathrm{D}^t_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j} = (\Gamma_t)^k_{ji}\frac{\partial}{\partial u^k}. \tag{4.14}$$

综合 (4.11)~(4.14) 各式得到

$$V'(t) = \int_M (\mathrm{div}\tau_t)\mathrm{d}V_t - \int_M \sum_{i,j}(g_t)^{ij}\left\langle \bar{W}, h_t\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right\rangle \mathrm{d}V_t. \quad (4.15)$$

另一方面，根据散度定理 (看第二章定理 5.3) 又有

$$\int_M (\mathrm{div}\tau_t)\mathrm{d}V_t = -\int_{\partial M}\langle \tau_t, n_t\rangle \mathrm{d}V_{\partial M}^t = 0,$$

其中 $\mathrm{d}V_{\partial M}^t$ 是子流形 $f_t : M \to N$ 在边界 ∂M 上诱导的体积元素，n_t 是沿子流形 $f_t(M)$ 的边界 $f_t(\partial M)$ 定义、并且指向 $f_t(M)$ 的内部的单位法向量场. 因此，若令

$$H_t = \frac{1}{m}(g_t)^{ij}h_t\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right),$$

它是子流形 $f_t : M \to N$ 的平均曲率向量，则 (4.15) 式成为

$$V'(t) = -m\int_M \langle H_t, \bar{W}\rangle \mathrm{d}V_t. \quad (4.16)$$

在 (4.16) 式中令 $t=0$ 便得

$$V'(0) = -m\int_M \langle H, W\rangle \mathrm{d}V.$$

证毕.

现在引入极小子流形的概念.

定义 4.2 设 $f : M \to N$ 是黎曼流形 $(N, \bar{g})$ 中的 m 维浸入子流形，如果它的平均曲率向量 H 处处为零，则称 $f : M \to N$ 是 $(N, \bar{g})$ 中的 **极小子流形**.

定理 4.2 浸入子流形 $f : M \to N$ 是黎曼流形 (N, g) 中的极小子流形，当且仅当在每一点 $p \in M$ 有一个开邻域 U，使得 U 是紧的，并且在 $f|_{\overline{U}} : \overline{U} \to N$ 的任意一个有固定边界的变分

$$F : \overline{U} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$$

下，$f|_{\overline{U}} : \overline{U} \to N$ 是体积泛函 $V(t) = \mathrm{Vol}(M, g_t)$ 的临界点.

证明 根据体积的第一变分公式 (4.3)，必要性是显然的.

现证充分性. 对于任意的 $p \in M$，可取 p 的开邻域 U，使得 $\overline{U}$ 是紧致带边的光滑流形. 再取 p 的开邻域 U_1 使得 $\overline{U}_1 \subset U$，则存在光滑函数 $\lambda \in C^\infty(M)$，满足

$$0 \le \lambda \le 1, \quad \lambda|_{U_1} \equiv 1, \quad \lambda|_{M\setminus\overline{U}} \equiv 0.$$

命 $W = \lambda \cdot H$，则 $W|_{\partial\overline{U}} \equiv 0$. 选取 $f|_{\overline{U}} : \overline{U} \to N$ 的变分

$$F : \overline{U} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to N,$$

使得 W 是它的变分向量场. 由假设和体积的第一变分公式 (4.3) 得知

$$0 = V'(0) = -m\int_M \lambda \cdot |H|^2 \mathrm{d}V.$$

由于 $\lambda \cdot |H|^2 \ge 0$，上式蕴含着 $\lambda \cdot |H|^2 \equiv 0$，于是子流形 $f : M \to N$ 的平均曲率向量 H 在点 p 的邻域 U_1 上处处为零. 由于点 p 的任意性，平均曲率向量 H 处处为零，故 $f : M \to N$ 是 N 的极小子流形. 证毕.

从上面的定理可以得到几个有趣的推论:

推论 4.3 设 $(N, \bar{g})$ 是具有非正截面曲率的黎曼流形，则在 $(N, \bar{g})$ 中的极小子流形必有非正的 Ricci 曲率.

证明 设 $f : M \to N$ 是浸入在 $(N, \bar{g})$ 中的 m 维极小子流形，Ric 是 M 上的 Ricci 曲率，

$$g = f^*\bar{g}.$$

我们要证明：对于任意的 $p \in M$ 以及任意的单位切向量 $X \in T_pM$ 均有

$$\mathrm{Ric}(X) \le 0.$$

为此，任取 T_pM 的一个单位正交基底 $\{e_1, \cdots, e_m\}$，使得 $e_1 = X$. 以 $\mathcal{R}$ 和 $\overline{\mathcal{R}}$ 分别表示 (M, g) 和 $(N, \overline{g})$ 的曲率张量，则由 Ricci 曲率的定义，

$$\mathrm{Ric}(X) = \sum_{i=2}^{m} K(e_1, e_i) = \sum_{i=1}^{m} \langle \mathcal{R}(e_1, e_i)e_i, e_1\rangle,$$

其中 $K(e_1, e_i)$ 表示黎曼流形 (M, g) 在点 p 沿着由 e_1, e_i 张成的二维截面的截面曲率.

根据 Gauss 方程，

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{R}(e_1, e_i)e_i, e_1\rangle &= \langle \overline{\mathcal{R}}(e_1, e_i)e_i, e_1\rangle + \langle h(e_1, e_1), h(e_i, e_i)\rangle \\ &\quad - \langle h(e_1, e_i), h(e_1, e_i)\rangle \\ &= \overline{K}(e_1, e_i) + \langle h(e_1, e_1), h(e_i, e_i)\rangle - |h(e_1, e_i)|^2,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X) &= \sum_{i=2}^{m} \overline{K}(e_1, e_i) + m\langle h(e_1, e_1), H\rangle - \sum_{i=1}^{m} |h(e_1, e_i)|^2 \\ &= \sum_{i=2}^{m} \overline{K}(e_1, e_i) - \sum_{i=1}^{m} |h(e_1, e_i)|^2 \leq 0.\end{aligned}$$

推论 4.4 在具有非正截面曲率的单连通完备黎曼流形 $(N, \overline{g})$ 中不存在紧致无边的极小子流形.

证明 用反证法. 假定 $i : M \to N$ 是 N 中紧致无边的极小子流形. 固定一点 $p \in N \backslash M$，用 ρ 表示从 p 点到 M 中各点的距离函数. 因为 M 是紧致的，故有点 $q \in M$，使得 ρ 在点 q 达到最大值. 用 $\gamma : [0, l] \to N$ 表示连接点 p 和 q 的最短正规测地线，$l = \rho(q)$，则由弧长的第一变分公式 (参看第三章 (3.5) 式) 得知 γ 必与 M 在 q 处正交. 在 T_qM 中取定单位正交基底 $\{e_1, \cdots, e_m\}$；对于每一个固定的 i，在 M 中作测地线 $\sigma_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$，使得

$$\sigma_i(0) = q, \quad \sigma_i'(0) = e_i.$$

因为 N 是单连通的完备黎曼流形，且具有非正截面曲率，所以由 Cartan-Hadamard 定理 (第五章的定理 3.3)，$\exp_p : T_pN \to N$ 是光滑同胚. 于是可以考虑变分

$$\Phi_i : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to N,$$

使得对于任意的 $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$，变分曲线 $t \mapsto \Phi_i(t, u)$ 是在 N 中连接 $p, \sigma_i(u)$ 两点的最短测地线，比如可令

$$\Phi_i(t, u) = \exp_p\left(\frac{t}{l} \exp_p^{-1}(\sigma_i(u))\right).$$

于是 Φ_i 的变分向量场 W_i 是沿 γ 定义的 Jacobi 场，并且满足

$$W_i(0) = 0, \quad W_i(l) = e_i.$$

因此 $W_i(t) \perp \gamma'(t)$. 显然，对于任意的 $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$，变分曲线 $(\gamma_i)_u = \Phi_i(t, u)$ 的弧长

$$L_i(u) = L((\gamma_i)_u) = \rho(\sigma_i(u)).$$

由于 ρ 在点 q 达到最大值，故有

$$L_i''(0) = \left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\rho(\sigma_i(u))\right|_{u=0} \leq 0. \tag{4.17}$$

另一方面，根据弧长的第二变分公式 (参看第六章的定理 1.1)

$$\begin{aligned}L_i''(0) &= \langle \overline{\mathrm{D}}_{W_i} W_i, \gamma'\rangle|_0^l + \int_0^l \{|W_i'|^2 + \langle \overline{R}(\gamma', W_i)\gamma', W_i\rangle\}\mathrm{d}t \\ &= \langle h(e_i, e_i), \gamma'(l)\rangle + \int_0^l \{|W_i'|^2 - \|\gamma' \wedge W_i\|^2 \overline{K}(\gamma', W_i)\}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

因此根据 M 是极小子流形，以及 $\overline{K}_N \leq 0$ 的假定，

$$\sum_{i=1}^{m} L_i''(0) = m\langle H, \gamma'(l)\rangle + \sum_{i=1}^{m} \int_0^l \{|W_i'|^2 - \|\gamma' \wedge W_i\|^2 \overline{K}(\gamma', W_i)\}\mathrm{d}t$$

$$\geq \sum_{i=1}^{m} \int_0^l |W_i'|^2 \mathrm{d}t. \tag{4.18}$$

由于 $W_i(t)$ 是非零 Jacobi 场, $W_i'(0) \neq 0$, 因此

$$\sum_{i=1}^{m} L_i''(0) > 0,$$

这与 (4.17) 式相矛盾. 证毕.

注记 4.1 有另一种方法证明 $\sum_{i=1}^{m} L_i''(0) > 0$. 由于 $W_i(t)$ 是 Jacobi 场, 故

$$\begin{aligned} L_i''(0) =& \langle h(e_i, e_i), \gamma'(l)\rangle + \langle W_i'(t), W_i(t)\rangle|_0^l \\ =& \langle h(e_i, e_i), \gamma'(l)\rangle + \langle W_i'(l), W_i(l)\rangle, \end{aligned}$$

因此

$$\sum_{i=1}^{m} L_i''(0) = \sum_{i=1}^{m} \langle W_i'(l), W_i(l)\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=l} \langle W_i(t), W_i(t)\rangle.$$

因为 $\overline{K}_N \leq 0$, 由第五章引理 3.1 的证明过程可知 $\langle W_i(t), W_i(t)\rangle$ 是严格递增函数. 事实上,

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle W_i(t), W_i(t)\rangle = 2\langle W_i'(t), W_i(t)\rangle, \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle W_i'(t), W_i(t)\rangle = \langle W_i'(t), W_i'(t)\rangle + \langle W_i''(t), W_i(t)\rangle \\ &\qquad = |W_i'|^2 - \|\gamma' \wedge W_i\|^2 \overline{K}(\gamma', W_i) \geq |W_i'|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

因此 $\langle W_i'(t), W_i(t)\rangle$ 是单调递增的, 即

$$\langle W_i'(t), W_i(t)\rangle \geq \langle W_i'(0), W_i(0)\rangle = 0, \quad \forall t > 0.$$

上式中的等号不能成立. 若有 $t_0 > 0$ 使得

$$\langle W_i'(t_0), W_i(t_0)\rangle = 0,$$

则由 $\langle W_i'(t), W_i(t)\rangle$ 的单调性得知

$$\langle W_i'(t), W_i(t)\rangle = 0, \quad \forall\, 0 \leq t \leq t_0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|W_i(t)|^2 = 0, \quad |W_i(t)|^2 = |W_i(0)|^2 = 0, \quad \forall\, 0 \leq t \leq t_0.$$

换言之,

$$W_i(t) = 0, \ \forall \ 0 \leq t \leq t_0,$$

故 $W_i'(0) = 0$. 这意味着 $W_i(t)$ 是零 Jacobi 场, 与 $W_i(l) = e_i$ 相矛盾. 特别地, $\langle W_i'(l), W_i(l)\rangle > 0$, 因而有

$$\sum_{i=1}^{m} L_i''(0) > 0.$$

值得指出的是, 在这里再次使用了求和技巧 (参看第六章 §6.2, 定理 2.1 之后的说明).

关于极小子流形的深入研究取决于偏微分方程理论的应用, 其原因在于极小子流形是一类非线性椭圆型偏微分方程 (组) 的解. 下面把极小子流形的条件在局部坐标系下表达为偏微分方程组. 为此, 在 M 中取局部坐标系 $(u^1, \cdots, u^m)$, 在 $(N, \overline{g})$ 中取局部坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$, 则映射 $f: M \to N$ 在局部上表示为

$$f^A = x^A \circ f(u^1, \cdots, u^m), \quad 1 \leq A \leq n.$$

于是

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \sum_A \frac{\partial f^A}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial x^A}.$$

设

$$\overline{g}_{AB} = \overline{g}\left(\frac{\partial}{\partial x^A}, \frac{\partial}{\partial x^B}\right), \quad 1 \leq A, B \leq n,$$

则在 M 上的诱导黎曼度量 g 由

$$g_{ij}=\sum_{A,B}\bar{g}_{AB}\frac{\partial f^A}{\partial u^i}\frac{\partial f^B}{\partial u^j}$$

给出. 假定 $\bar{\Gamma}^C_{AB}$ 和 Γ^k_{ij} 分别是 $(\bar{g}_{AB})$ 和 (g_{ij}) 的 Christoffel 记号, 那么由拉回丛 f^*TN 上诱导联络 $\overline{\mathrm{D}}$ 的定义知

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}f_*\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)&=\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\left(\sum_B\frac{\partial f^B}{\partial u^j}\cdot\frac{\partial}{\partial x^B}\right)\\&=\sum_C\left(\frac{\partial^2 f^C}{\partial u^i\partial u^j}+\sum_{A,B}\frac{\partial f^A}{\partial u^i}\frac{\partial f^B}{\partial u^j}\bar{\Gamma}^C_{BA}\right)\frac{\partial}{\partial x^C}.\end{aligned}$$

另一方面, 由 Gauss 公式 (参看本章的注记 1.1),

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}f_*\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)&=f_*\left(\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}\right)+h\left(\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\\&=\sum_{k,C}\Gamma^k_{ij}\frac{\partial f^C}{\partial u^k}\frac{\partial}{\partial x^C}+h\left(\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}\right).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&h\left(\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\\&\quad=\sum_C\left(\frac{\partial^2 f^C}{\partial u^i\partial u^j}+\sum_{A,B}\frac{\partial f^A}{\partial u^i}\frac{\partial f^B}{\partial u^j}\bar{\Gamma}^C_{BA}-\sum_k\Gamma^k_{ij}\frac{\partial f^C}{\partial u^k}\right)\frac{\partial}{\partial x^C},\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}mH&=\sum_{i,j}g^{ij}h\left(\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\\&=\sum_{i,j,C}g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f^C}{\partial u^i\partial u^j}+\sum_{A,B}\frac{\partial f^A}{\partial u^i}\frac{\partial f^B}{\partial u^j}\bar{\Gamma}^C_{AB}-\sum_k\Gamma^k_{ij}\frac{\partial f^C}{\partial u^k}\right)\frac{\partial}{\partial x^C}.\end{aligned}\tag{4.19}$$

由此可见, 极小子流形 $f:M\to N$ 满足偏微分方程组

$$\sum_{i,j}g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f^C}{\partial u^i\partial u^j}\sum_{A,B}\frac{\partial f^A}{\partial u^i}\frac{\partial f^B}{\partial u^j}\bar{\Gamma}^C_{AB}-\sum_k\Gamma^k_{ij}\frac{\partial f^C}{\partial u^k}\right)=0,\quad(1\le C\le n).\tag{4.20}$$

还可以用黎曼流形的 Laplace 算子来改写条件 (4.20). 根据第二章 §2.5 中的定义, 黎曼流形 (M,g) 上的 Beltrami-Laplace 算子

$$\Delta_M=\operatorname{div}\circ\operatorname{grad}:C^\infty(M)\to C^\infty(M)$$

有局部坐标表达式

$$\Delta_M=\sum_{i,j}g^{ij}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^i\partial u^j}-\sum_k\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial u^k}\right).\tag{4.21}$$

于是由 (4.20) 式, 要寻求 (M,g) 在 $(N,\bar{g})$ 中的等距极小浸入

$$f:M\to N,$$

在局部上就是寻求 n 个函数

$$f^A\in C^\infty(M),\quad 1\le A\le n,$$

使得它们满足方程组

$$\Delta_M f^C+\sum_{i,j,A,B}g^{ij}\frac{\partial f^A}{\partial u^i}\frac{\partial f^B}{\partial u^j}\bar{\Gamma}^C_{AB}=0,\tag{4.22}$$

其中 $1\le C\le n$, $g_{ij}=\sum_{A,B}\frac{\partial f^A}{\partial u^i}\frac{\partial f^B}{\partial u^j}\bar{g}_{AB}$.

如果外围空间 $(N,\bar{g})$ 是 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$, 可以在 $\mathbb{R}^n$ 中选定笛卡尔直角坐标系 $(x^1,\cdots,x^n)$ 使得

$$\bar{\Gamma}^C_{AB}\equiv 0.$$

此时 m 维浸入子流形 $f: M\to\mathbb{R}^n$ 的平均曲率向量场可以表示为

$$H=\frac{1}{m}\Delta_M f^C\frac{\partial}{\partial x^C}=\frac{1}{m}\Delta_M f, \tag{4.23}$$

其中 $f=(f^1,\cdots,f^n)$ 是浸入子流形 $f:M\to\mathbb{R}^n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的位置向量. 由此得到

推论 4.5 m 维黎曼流形 (M,g) 在 $\mathbb{R}^n$ 中的等距浸入

$$f:M\to\mathbb{R}^n$$

是极小子流形, 当且仅当它的位置向量 f 是 M 上的 $\mathbb{R}^n$-值调和函数, 即 f 的所有分量都是 M 上的调和函数.

显然, 推论 4.5 可以直接从 (4.22) 式得到.

如果 $n=m+1$, 换句话说, 如果 $f:M\to\mathbb{R}^{m+1}$ 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的超曲面 (余维是 1 的浸入子流形), 那么 M 在局部上可以表示为一个光滑函数的图像. 不妨设 M 是光滑函数 $F: \mathrm{D}\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 的图像, 即

$$f=(u^1,\cdots,u^m,F(u^1,\cdots,u^m)),\quad (u^1,\cdots,u^m)\in \mathrm{D}, \tag{4.24}$$

其中 (u^i) 可以看作 M 上的局部坐标系. 如果 $(x^1,\cdots,x^{m+1})$ 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的笛卡尔直角坐标, 则浸入 f 在 M 上的诱导黎曼度量是

$$g=\sum_{i,j}\left(\delta_{ij}+\frac{\partial F}{\partial u^i}\frac{\partial F}{\partial u^j}\right)\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j=\sum_{i,j}(\delta_{ij}+F_iF_j)\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j, \tag{4.25}$$

其中 $F_i=\dfrac{\partial F}{\partial u^i}$. 于是

$$g_{ij}=\delta_{ij}+F_iF_j. \tag{4.26}$$

由此得到

$$g^{ij}=\delta_{ij}-\frac{F_iF_j}{1+\sum_k(F_k)^2};\quad \Gamma^k_{ij}=g^{kl}\frac{\partial^2 F}{\partial u^i\partial u^j}F_l. \tag{4.27}$$

根据推论 4.5, 浸入 $f:M\to\mathbb{R}^{m+1}$ 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的极小超曲面当且仅当

$$\Delta f=\sum_{i,j}\left(\delta_{ij}-\frac{F_iF_j}{1+\sum_k(F_k)^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i\partial u^j}-\sum_k\Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial u^k}\right)=0. \tag{4.28}$$

用 f 的分量 $f^l=u^l$ 代入上式得到

$$\sum_{i,j}\left(\delta_{ij}-\frac{F_iF_j}{1+\sum_k(F_k)^2}\right)\Gamma^l_{ij}=0,\quad 1\le l\le m; \tag{4.29}$$

用 f 的分量 $f^{m+1}=F$ 代入 (4.28) 式得到

$$\sum_{i,j}\left(\delta_{ij}-\frac{F_iF_j}{1+\sum_k(F_k)^2}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial u^i\partial u^j}=0. \tag{4.30}$$

由 (4.27) 的第二式可知, (4.29) 式是 (4.30) 式的推论. 因此, 浸入 (4.24) 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的极小超曲面当且仅当函数 F 满足偏微分方程

$$\sum_{i,j}\left(\left(1+\sum_k\left(\frac{\partial F}{\partial u^k}\right)^2\right)\delta_{ij}-\frac{\partial F}{\partial u^i}\frac{\partial F}{\partial u^j}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial u^i\partial u^j}=0. \tag{4.31}$$

上式可以改写成

$$\sum_i\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{F_i}{\sqrt{1+\sum_k(F_k)^2}}\right)=0. \tag{4.32}$$

另一个重要的特例是取 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中半径为 $r>0$ 的球面 $S^n(r)$ 为外围空间 N. 为了方便起见, 通常取 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的原点为 $S^n(r)$ 的球心. 假设 $i: S^n(r)\to\mathbb{R}^{n+1}$ 是包含映射, 则 m 维黎曼流形 M 在 $S^n(r)$ 中的等距浸入 $f: M\to S^n(r)$ 可以看作是在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的等距浸入

$$\tilde f=i\circ f: M\to\mathbb{R}^{n+1}.$$

如果 $\mathrm{D}, \bar{\mathrm{D}}, \hat{\mathrm{D}}$ 分别是黎曼流形 $M, S^n(r), \mathbb{R}^{n+1}$ 中的黎曼联络, h 和 $\tilde h$ 分别表示子流形

$$f: M\to S^n(r)\ \text{和}\ \tilde f: M\to\mathbb{R}^{n+1}$$

的第二基本形式 (参看注记 1.1), 则对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ 有

$$\tilde h(X,Y)=\hat{\mathrm{D}}_X\tilde f_*(Y)-\tilde f_*(\mathrm{D}_XY),$$

$$h(X,Y)=\mathrm{D}_X f_*(Y)-f_*(\mathrm{D}_X Y).$$

如果用上标 $(\ )^{\top}$ 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的向量 $(\ )$ 在 $S^n(r)$ 的切空间上的正交投影，并且和往常一样，在记法上忽略浸入 f 和 $\tilde f$ 以及它们的切映射的记号，则从上面的两个式子可以得到

$$\begin{aligned}h(X,Y)=&\mathrm{D}_X Y-\mathrm{D}_X Y=(\tilde{\mathrm{D}}_X Y)^{\top}-\mathrm{D}_X Y\\=&(\tilde{\mathrm{D}}_X Y-\mathrm{D}_X Y)^{\top}=(\tilde h(X,Y))^{\top}.\end{aligned}$$

特别地，如果 H 和 $\tilde H$ 分别是子流形 $f: M\to S^n(r)$ 和 $i\circ f: M\to\mathbb{R}^{n+1}$ 的平均曲率向量场，则从上式得到

$$H=(\tilde H)^{\top}.\tag{4.33}$$

由此便得如下的重要结论：

定理 4.6 (Takahashi)　m 维黎曼流形 (M,g) 在 $S^n(r)$ 中的等距浸入 $f: M\to S^n(r)\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 是极小子流形，当且仅当存在光滑函数 $\lambda\in C^\infty(M)$，使得复合映射 $\tilde f=i\circ f: M\to\mathbb{R}^{n+1}$ 满足条件

$$\Delta_M(\tilde f)=\lambda\tilde f,\tag{4.34}$$

即向量函数 $\Delta_M(\tilde f)$ 是 $S^n(r)$ 的法向量. 此外，当 (4.34) 成立时，必有 $\lambda=-m/r^2$.

证明　结合 (4.23) 及 (4.33) 两式可得

$$H=(\tilde H)^{\top}=\frac{1}{m}(\Delta_M(\tilde f))^{\top}.\tag{4.35}$$

因此，$H=0$ 当且仅当 $\Delta_M(i\circ f)\perp S^n(r)$.

为完成定理的证明，假定存在 $\lambda\in C^\infty(M)$ 使得 (4.34) 成立，则有

$$\langle\Delta_M(\tilde f),\tilde f\rangle=\lambda\langle\tilde f,\tilde f\rangle=\lambda|\tilde f|^2=r^2\lambda.\tag{4.36}$$

另一方面，如果选取 M 上的单位正交标架场 $\{e_i\}$，并且把 $\tilde f$ 看作定义在 $S^n(r)$ 上的 $\mathbb{R}^{n+1}$-值函数，则

$$\tilde f_i\equiv e_i(\tilde f)=\mathrm{d}\tilde f(e_i)=e_i,$$

并且

$$\Delta_M(\tilde f)=\sum_i\tilde f_{i,i},$$

其中 $\tilde f_{i,j}$ 是 $\tilde f_i$ 的协变导数，即 $\mathrm{d}\tilde f_i-\tilde f_j\omega_i^j=\tilde f_{i,j}\omega^j$. 这里，$\{\omega^i\}$ 是与 $\{e_i\}$ 对偶的余标架场，ω_i^j 是联络形式. 从而由恒等式 $\langle\tilde f,\tilde f\rangle\equiv r^2$ 以及黎曼联络与度量的相容性得到

$$\begin{aligned}\langle\Delta_M(\tilde f),\tilde f\rangle&=\sum_i\langle\tilde f_{i,i},\tilde f\rangle=\sum_i\langle e_i(\tilde f_i)-\sum_j\Gamma_{ii}^j\tilde f_j,\tilde f\rangle\\&=\sum_i\langle e_i(\tilde f_i),\tilde f\rangle=\sum_i(e_i(\langle\tilde f_i,\tilde f\rangle)-\langle\tilde f_i,\tilde f_i\rangle)\\&=-\sum_i\langle\tilde f_i,\tilde f_i\rangle=-\sum_i\delta_{ij}=-m.\end{aligned}$$

将此式与 (4.36) 式作比较即可得到 $\lambda=-m/r^2$. 证毕.

§7.5　体积的第二变分公式

在上一节导出了子流形体积的第一变分公式，并且证明了黎曼流形 $(N,\tilde g)$ 中的极小子流形恰好是在任意的有固定边界的变分下体积泛函的临界点，即体积泛函在极小子流形上取临界值. 在另一方面，对于一个给定的极小子流形 $f:(M,g)\to(N,\tilde g)$，如果它的任意一个有固定边界的变分的体积泛函在 f 上都有正的二阶导数，则该极小子流形的体积达到局部最小值 (也就是在该子流形保持边界不动的任意的扰动下达到体积的最小值). 因此在子流形微分几何中，计算体积泛函的二阶导数是十分重要的. 另外，在计算体积的第一变分时，已经发现变分向量场关于子流形的切分量在第一变分公式中是不起作用的. 因

此，在求体积的第二变分公式时，只考虑子流形的有固定边界的法向变分，即假定变分向量场 W 与已知的极小子流形是处处正交的.

设 $f:(M,g)\to(N,\tilde g)$ 是等距浸入子流形，

$$m=\dim M,\quad n=\dim N.$$

在求体积的第二变分公式之前，先介绍几个与子流形 f 密切相关的线性算子.

1. 法丛 $T^\perp M$ 上的 Beltrami-Laplace 算子 $\Delta_M^\perp$

对于任意给定的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$，先定义算子

$$\mathrm{Hess}^\perp(X,Y):\Gamma(T^\perp M)\to\Gamma(T^\perp M)$$

如下：

$$\mathrm{Hess}^\perp(X,Y)\xi=\mathrm{D}_X^\perp\mathrm{D}_Y^\perp\xi-\mathrm{D}_{\mathrm{D}_XY}^\perp\xi.\tag{5.1}$$

容易验证：对于任意的 $\lambda\in C^\infty(M)$ 有

$$\mathrm{Hess}^\perp(\lambda\cdot X,Y)=\mathrm{Hess}^\perp(X,\lambda\cdot Y)=\lambda\cdot\mathrm{Hess}^\perp(X,Y).$$

因此，算子 $\mathrm{Hess}^\perp(X,Y)$ 关于切向量场 X,Y 具有张量性质，并且

$$\mathrm{Hess}^\perp(X,Y)-\mathrm{Hess}^\perp(Y,X)=R^\perp(X,Y)$$

是法丛 $T^\perp M$ 上法联络 $\mathrm{D}^\perp$ 的曲率算子.

设 $\{e_i\}$ 是 M 上的任意一个局部标架场，$g_{ij}=g(e_i,e_j)$，并设 $(g^{ij})=(g_{ij})^{-1}$. 利用算子 $\mathrm{Hess}^\perp$，可以定义算子

$$\Delta_M^\perp:\Gamma(T^\perp M)\to\Gamma(T^\perp M),$$

使得

$$\begin{aligned}\Delta_M^\perp\xi&=g^{ij}\mathrm{Hess}^\perp(e_i,e_j)\xi\\&=g^{ij}(\mathrm{D}_{e_i}^\perp\mathrm{D}_{e_j}^\perp\xi-\mathrm{D}_{\mathrm{D}_{e_i}e_j}^\perp\xi),\quad\forall\xi\in\Gamma(T^\perp M).\end{aligned}\tag{5.2}$$

容易验证，上式右端与 M 上的局部标架场 $\{e_i\}$ 的选取无关. 特别地，如果 $\{e_i\}$ 是单位正交标架场，则有

$$\Delta_M^\perp\xi=\sum_{i=1}^m(\mathrm{D}_{e_i}^\perp\mathrm{D}_{e_i}^\perp\xi-\mathrm{D}_{\mathrm{D}_{e_i}e_i}^\perp\xi),\quad\forall\xi\in\Gamma(T^\perp M).\tag{5.3}$$

如果 (M,g) 是紧致的有向黎曼流形，则可以在 $\Gamma(T^\perp M)$ 中定义内积 $(\cdot,\cdot)$ 如下：对于任意的 $\xi,\eta\in\Gamma(T^\perp M)$，令

$$(\xi,\eta)=\int_M\langle\xi,\eta\rangle\mathrm{d}V_M.\tag{5.4}$$

一般地，如果 M 是非紧的有向黎曼流形，则可以考虑集合

$$\Gamma_0(T^\perp M)=\{\xi\in\Gamma(T^\perp M);\ \xi\text{ 具有紧致的支撑集}\}.$$

易知，$\Gamma_0(T^\perp M)$ 是 $\Gamma(T^\perp M)$ 的线性子空间，并且由 (5.4) 式定义的内积在 $\Gamma_0(T^\perp M)$ 中仍然是适用的.

命题 5.1　设 (M,g) 是紧致无边的有向黎曼流形，则

$$\Delta_M^\perp:\Gamma(T^\perp M)\to\Gamma(T^\perp M)$$

关于内积 $(\cdot,\cdot)$ 是自共轭算子，并且 $\Delta_M^\perp$ 是半负定的.

证明　设 $(U;u^i)$ 是 M 的一个局部坐标系，令

$$e_i=\frac{\partial}{\partial u^i},\quad g_{ij}=g(e_i,e_j),\quad \mathrm{D}_{e_i}e_j=\Gamma_{ji}^ke_k.$$

则对于任意的 $\xi,\eta\in\Gamma(T^\perp M)$ 有

$$\langle\mathrm{D}_{e_j}^\perp\xi,\eta\rangle=e_j(\langle\xi,\eta\rangle)-\langle\xi,\mathrm{D}_{e_j}^\perp\eta\rangle.$$

于是

$$\langle\mathrm{D}_{e_i}^\perp\mathrm{D}_{e_j}^\perp\xi,\eta\rangle=e_i(\langle\mathrm{D}_{e_j}^\perp\xi,\eta\rangle)-\langle\mathrm{D}_{e_j}^\perp\xi,\mathrm{D}_{e_i}^\perp\eta\rangle\tag{5.5}$$

$$= e_i(e_j\langle\xi,\eta\rangle) - e_i(\langle\xi, \mathrm{D}^\perp_{e_j}\eta\rangle) - e_j(\langle\xi, \mathrm{D}^\perp_{e_i}\eta\rangle) + \langle\xi, \mathrm{D}^\perp_{e_j}\mathrm{D}^\perp_{e_i}\eta\rangle.$$

由此得到

$$\begin{aligned}\langle\Delta^\perp_M\xi,\eta\rangle &= g^{ij}\langle \mathrm{D}^\perp_{e_i}\mathrm{D}^\perp_{e_j}\xi,\eta\rangle - g^{ij}\Gamma^k_{ij}\langle \mathrm{D}^\perp_{e_k}\xi,\eta\rangle\\
&= g^{ij}\{e_i(e_j\langle\xi,\eta\rangle) - 2e_i(\langle\xi,\mathrm{D}^\perp_{e_j}\eta\rangle)\\
&\quad + \langle\xi, \mathrm{D}^\perp_{e_j}\mathrm{D}^\perp_{e_i}\eta\rangle\\
&\quad - \Gamma^k_{ij}e_k(\langle\xi,\eta\rangle) + \Gamma^k_{ij}\langle\xi,\mathrm{D}^\perp_{e_k}\eta\rangle\}\\
&= g^{ij}\{e_i(e_j\langle\xi,\eta\rangle) - \Gamma^k_{ij}e_k(\langle\xi,\eta\rangle)\}\\
&\quad + \langle\xi, g^{ij}(\mathrm{D}^\perp_{e_j}\mathrm{D}^\perp_{e_i} - \Gamma^k_{ij}\mathrm{D}^\perp_{e_k})\eta\rangle\\
&\quad - 2g^{ij}(e_i\langle\xi,\mathrm{D}^\perp_{e_j}\eta\rangle - \Gamma^k_{ij}\langle\xi,\mathrm{D}^\perp_{e_k}\eta\rangle)\\
&= \Delta_M(\langle\xi,\eta\rangle) + \langle\xi,\Delta^\perp_M\eta\rangle\\
&\quad - 2g^{ij}(e_i\langle\xi,\mathrm{D}^\perp_{e_j}\eta\rangle - \Gamma^k_{ij}\langle\xi,\mathrm{D}^\perp_{e_k}\eta\rangle).\end{aligned}$$

令

$$X = g^{ij}\langle\xi, \mathrm{D}^\perp_{e_j}\eta\rangle e_i,$$

则 X 与局部坐标系 $(U;u^i)$ 的选取无关, 因而是 M 上的一个光滑切向量场. 其散度是

$$\mathrm{div}X = \sum_i X^i_{,i} = \sum_{i,j} g^{ij}\Big(e_i\langle\xi,\mathrm{D}^\perp_{e_j}\eta\rangle - \sum_k\Gamma^k_{ij}\langle\xi,\mathrm{D}^\perp_{e_k}\eta\rangle\Big),$$

所以

$$\langle\Delta^\perp_M\xi,\eta\rangle = \langle\xi,\Delta^\perp_M\eta\rangle + \Delta_M(\langle\xi,\eta\rangle) - 2\mathrm{div}X. \qquad (5.6)$$

根据散度定理及 Green 公式 (第二章, 定理 5.3 和定理 5.4) 得到

$$\begin{aligned}\int_M\langle\Delta^\perp_M\xi,\eta\rangle \mathrm{d}V_M &= \int_M\langle\xi,\Delta^\perp_M\eta\rangle \mathrm{d}V_M + \int_M \Delta_M(\langle\xi,\eta\rangle)\mathrm{d}V_M\\
&\quad - 2\int_M \mathrm{div}X\,\mathrm{d}V_M\end{aligned}$$

$$= \int_M\langle\xi,\Delta^\perp_M\eta\rangle \mathrm{d}V_M,$$

即

$$\langle\Delta^\perp_M\xi,\eta\rangle = \langle\xi,\Delta^\perp_M\eta\rangle, \quad \forall\xi,\eta\in\Gamma(T^\perp M).$$

这就证明了

$$\Delta^\perp_M:\Gamma(T^\perp M)\to\Gamma(T^\perp M)$$

关于内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是自共轭算子.

为了说明 $\Delta^\perp_M$ 的半负定性, 在 (5.5) 式中令 $\eta=\xi$ 便得

$$\langle \mathrm{D}^\perp_{e_i}\mathrm{D}^\perp_{e_j}\xi,\xi\rangle = e_i(\langle \mathrm{D}^\perp_{e_j}\xi,\xi\rangle) - \langle \mathrm{D}^\perp_{e_j}\xi, \mathrm{D}^\perp_{e_i}\xi\rangle,$$

从而有

$$\begin{aligned}\langle\Delta^\perp_M\xi,\xi\rangle &= g^{ij}(e_i(\langle \mathrm{D}^\perp_{e_j}\xi,\xi\rangle) - \langle \mathrm{D}^\perp_{\mathrm{D}_{e_i}e_j}\xi,\xi\rangle - \langle \mathrm{D}^\perp_{e_j}\xi, \mathrm{D}^\perp_{e_i}\xi\rangle)\\
&= \mathrm{div}\tilde X - g^{ij}\langle \mathrm{D}^\perp_{e_j}\xi, \mathrm{D}^\perp_{e_i}\xi\rangle,\end{aligned}$$

其中

$$\tilde X = g^{ij}\langle \mathrm{D}^\perp_{e_j}\xi,\xi\rangle e_i$$

是在 M 上的光滑切向量场. 因此

$$\langle\Delta^\perp_M\xi,\xi\rangle = -\int_M g^{ij}\langle \mathrm{D}^\perp_{e_i}\xi, \mathrm{D}^\perp_{e_j}\xi\rangle \mathrm{d}V_M \le 0,$$

即 $\Delta^\perp_M$ 是半负定算子. 证毕.

2. 法丛 $T^\perp M$ 上的 Ricci 曲率算子 $\mathrm{Ric}^\perp$

对于任意的 $p\in M$, 以及 T_pM 的任意一个基底 $\{e_i\}$, 可以定义算子 $\mathrm{Ric}^\perp: T^\perp_pM\to T^\perp_pM$, 使得

$$\mathrm{Ric}^\perp(\xi) = \sum_{i,j} g^{ij}\left(\overline{R}(\xi, f_*(e_i))f_*(e_j)\right)^\perp, \quad \forall\xi\in T^\perp_pM, \qquad (5.7)$$

其中 $\overline{\mathcal{R}}$ 是 N 中的曲率算子. 很明显, 上式右端与基底 $\{e_i\}$ 的选取无关. 特别地, 如果 $\{e_i\}$ 是 T_pM 中的单位正交基底, 则有

$$\mathrm{Ric}^\perp(\xi) = -\sum_i (\overline{\mathcal{R}}(f_*(e_i),\xi)f_*(e_i))^\perp, \quad \forall \xi \in T_p^\perp M, \tag{5.8}$$

命题 5.2 算子 $\mathrm{Ric}^\perp : T_p^\perp M \to T_p^\perp M$ 关于法丛 $T^\perp M$ 上的黎曼结构 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是自共轭的.

证明 对于任意的 $\xi,\eta \in T_p^\perp M$ 有

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Ric}^\perp(\xi),\eta\rangle &= \sum_{i,j} g^{ij}\langle(\overline{\mathcal{R}}(\xi,f_*(e_i))f_*(e_j))^\perp,\eta\rangle \\ &= \sum_{i,j} g^{ij}\langle\overline{\mathcal{R}}(\xi,f_*(e_i))f_*(e_j),\eta\rangle \\ &= \sum_{i,j} g^{ij}\langle\overline{\mathcal{R}}(f_*(e_j),\eta)\xi,f_*(e_i)\rangle \\ &= \langle\xi,\mathrm{Ric}^\perp(\eta)\rangle,\end{aligned}$$

即 $\mathrm{Ric}^\perp : T_p^\perp M \to T_p^\perp M$ 是自共轭的. 证毕.

3. 复合算子 $h\circ h^t$

对于 $p \in M$, 设

$$h : T_pM \times T_pM \to T_p^\perp M$$

是子流形 $f : M \to N$ 的第二基本形式 (参看注记 1.1), 它也可以看作映射

$$h : T_pM \otimes T_pM \to T_p^\perp M,$$

使得

$$h(v\otimes w) = h(v,w), \quad \forall v,w \in T_pM. \tag{5.9}$$

分别选取 T_pM 和 $T_p^\perp M$ 的基底 $\{e_i\}$ 和 $\{e_\alpha\}$, 并设

$$h(e_i,e_j) = h_{ij}^\alpha e_\alpha, \tag{5.10}$$

则有

$$h(e_i\otimes e_j) = h_{ij}^\alpha e_\alpha. \tag{5.11}$$

映射 $h : T_pM \otimes T_pM \to T_p^\perp M$ 的**转置**

$$h^t : T_p^\perp M \to T_pM \otimes T_pM$$

是一个线性映射, 它由下式确定:

$$h^t(e_\alpha) = \sum_{i,j,k,l} g^{ik}g^{jl}h_{ij}^\alpha e_k \otimes e_l. \tag{5.12}$$

很明显, h^t 的定义与基底 $\{e_i\}$ 和 $\{e_\alpha\}$ 的取法无关. 不难知道, 复合映射 $h\circ h^t : T_p^\perp M \to T_p^\perp M$ 具有表达式

$$\begin{aligned} h\circ h^t(e_\alpha) &= h\left(\sum_{i,j,k,l} g^{ik}g^{jl}h_{ij}^\alpha e_k\otimes e_l\right) \\ &= \sum_{i,j,k,l} g^{ik}g^{jl}h_{ij}^\alpha h(e_k\otimes e_l) = \sum_{i,j,k,l,\beta} g^{ik}g^{jl}h_{ij}^\alpha h_{kl}^\beta e_\beta. \end{aligned} \tag{5.13}$$

由此可见, 线性变换 $h\circ h^t : T_p^\perp M \to T_p^\perp M$ 在基底 $\{e_\alpha\}$ 下的矩阵是

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{i,j,k,l} g^{ik}g^{jl}h_{ij}^\alpha h_{kl}^\beta.$$

特别地, 如果 $\{e_A\}$ 是 T_pN 的单位正交基底, 并且 $e_i \in f_*(T_pM)$(因而有 $e_\alpha \in T_p^\perp M$), 则 (5.12) 式和 (5.13) 式可以分别简化为

$$h^t(e_\alpha) = \sum_{i,j} h_{ij}^\alpha e_i\otimes e_j, \tag{5.14}$$

$$h\circ h^t(e_\alpha) = \sum_{i,j,\beta} h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta e_\beta. \tag{5.15}$$

有了上面的准备, 现在可以叙述子流形体积的第二变分公式如下:

定理 5.3 设 (M,g) 是紧致带边的 m 维有向黎曼流形, $f: M\to N$ 是等距浸入在 n 维黎曼流形 $(N,\bar g)$ 中的极小子流形. 如果

$$F: M\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to N$$

是子流形 $f:M\to N$ 的任意一个有固定边界的法向变分, 其变分向量场为 W, 则有下列公式:

$$V''(0) = -\int_M \langle \Delta_{\bar M} W + \mathrm{Ric}^\perp(W) + h\circ h^t(W), W\rangle \mathrm{d}V_M. \tag{5.16}$$

(5.16) 式称为子流形**体积的第二变分公式**.

证明 由 (4.16) 式我们有

$$V'(t) = -m\int_M \langle H_t, \tilde W\rangle \mathrm{d}V_t, \tag{5.17}$$

其中 H_t 是 $f_t(M)$ 的平均曲率向量, $\tilde W = F_*(\frac{\partial}{\partial t})$, $\mathrm{d}V_t$ 是诱导度量 $g_t=(f_t)^*\bar g$ 的体积元素. 对 (5.17) 式再次求导得到

$$\begin{aligned}V''(t) &= -m\int_M \frac{\partial}{\partial t}\left(\langle H_t,\tilde W\rangle\sqrt{G_t}\right) \mathrm{d}u^1\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}u^m\\ &= -m\int_M\left(\langle \bar D_{\frac{\partial}{\partial t}} H_t, \tilde W\rangle + \langle H_t, \bar D_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde W\rangle\right.\\ &\qquad \left. + \langle H_t,\tilde W\rangle \frac{\partial \ln\sqrt{G_t}}{\partial t}\right)\mathrm{d}V_t.\end{aligned} \tag{5.18}$$

由于 $f_0=f: M\to N$ 是极小子流形, $H_0=H=0$. 于是在 (5.18) 式中令 $t=0$ 便有

$$V''(0) = -m\int_M \left\langle \left(\bar D_{\frac{\partial}{\partial t}} H_t\right)\Big|_{t=0}, W\right\rangle \mathrm{d}V_M. \tag{5.19}$$

注意到被积表达式 $\left\langle \left(\bar D_{\frac{\partial}{\partial t}} H_t\right)\Big|_{t=0}, W\right\rangle$ 与 M 上的局部坐标系 $(U;u^i)$ 的选取无关, 因此可以在每一点的附近选取适当的局部坐标

系对它进行计算, 只要最后所得到的表达式与局部坐标系的选取是无关的就行了. 设 $(U;u^i)$ 是 M 的一个局部坐标系, 令

$$\tilde X_i(q,t) = F_{*(q,t)}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = (f_t)_*\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right), \quad X_i = \tilde X_i|_{t=0}, \quad 1\le i\le m.$$

则由第二章的 (8.7) 式得知

$$\bar D_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde X_i = \bar D_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\tilde W, \quad \bar D_{\tilde X_j}\tilde X_i = \bar D_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\tilde X_j.$$

由于 $\tilde W(q,0)=W(q)$ 是法向变分 F 的变分向量场, 因此

$$\langle \tilde W, \tilde X_i\rangle|_{t=0}=0, \quad 1\le i\le m.$$

设 D^t 是诱导度量 g_t 的黎曼联络, 则由平均曲率向量的定义,

$$mH_t = (g_t)^{ij}\left(\bar D_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\tilde X_j - (f_t)_*\left(D^t_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right),$$

于是

$$\begin{aligned}m\bar D_{\frac{\partial}{\partial t}}H_t =&\frac{\partial}{\partial t}(g_t)^{ij}\left(\bar D_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\tilde X_j - (f_t)_*\left(D^t_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right)\\ &+ (g_t)^{ij}\bar D_{\frac{\partial}{\partial t}}\left(\bar D_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\tilde X_j - F_*\left(D^t_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right).\end{aligned} \tag{5.20}$$

直接计算得知

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(g_t)^{ij} &= -(g_t)^{ik}(g_t)^{jl}\frac{\partial}{\partial t}(g_t)_{kl}\\ &= -(g_t)^{ik}(g_t)^{jl}(\langle\bar D_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde X_k,\tilde X_l\rangle + \langle\tilde X_k,\bar D_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde X_l\rangle)\\ &= -((g_t)^{ik}(g_t)^{jl}+(g_t)^{il}(g_t)^{jk})\langle\bar D_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde X_k,\tilde X_l\rangle\\ &= -((g_t)^{ik}(g_t)^{jl}+(g_t)^{il}(g_t)^{jk})\langle\bar D_{\frac{\partial}{\partial u^k}}\tilde W,\tilde X_l\rangle\\ &=((g_t)^{ik}(g_t)^{jl}+(g_t)^{il}(g_t)^{jk})\left\langle h_t\left(\frac{\partial}{\partial u^k},\frac{\partial}{\partial u^l}\right),\tilde W\right\rangle,\end{aligned}$$

其中 h_t 是子流形 $f: M\to N$ 的第二基本形式 (参看注记 1.1). 由于

$$\left\langle (f_t)_*\left(D^t_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}\right),\tilde W\right\rangle\Big|_{t=0} = \left\langle f_*\left(D_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}\right), W\right\rangle = 0,$$

进而借助于 $\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial u^j}}\tilde{X}_i=\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\tilde{X}_j$ 可知，(5.20) 式右边的第一项与 W 的内积

$$
\begin{aligned}
&\left\langle\frac{\partial}{\partial t}(g_t)^{ij}\cdot\left(\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\tilde{X}_j-(f_t)_*\left(\mathrm{D}^t_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right),\tilde{W}\right\rangle\bigg|_{t=0}\\
&\quad=2g^{ik}g^{jl}\left\langle h\left(\frac{\partial}{\partial u^k},\frac{\partial}{\partial u^l}\right),W\right\rangle\langle\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\tilde{X}_j,\tilde{W}\rangle\bigg|_{t=0}\\
&\quad=2g^{ik}g^{jl}\left\langle h\left(\frac{\partial}{\partial u^k},\frac{\partial}{\partial u^l}\right),W\right\rangle\left\langle h\left(\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}\right),W\right\rangle\\
&\quad=2\langle h\circ h^\flat(W),W\rangle.
\end{aligned}\tag{5.21}
$$

另一方面，根据第四章习题第 3 题和本章的注记 1.1 直接计算

$$
\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial t}}\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\tilde{X}_j\ \text{和}\ \overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial t}}\left((f_t)_*\left(\mathrm{D}^t_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right)
$$

的法分量如下：

$$
\begin{aligned}
&\left(\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial t}}\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\tilde{X}_j\right)^\perp\bigg|_{t=0}\\
&\quad=\left(\overline{\mathcal{R}}(\tilde{W},\tilde{X}_i)\tilde{X}_j+\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{X}_j+\overline{\mathrm{D}}_{[\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial u^i}]}\tilde{X}_j\right)^\perp\bigg|_{t=0}\\
&\quad=\left(\left(\overline{\mathcal{R}}(\tilde{W},\tilde{X}_i)\tilde{X}_j+\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial u^j}}\tilde{W}\right)\bigg|_{t=0}\right)^\perp\\
&\quad=\left(\overline{\mathcal{R}}(W,X_i)X_j+\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\left(-f_*\left(A_W\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right)+\mathrm{D}^\perp_{\frac{\partial}{\partial u^j}}W\right)\right)^\perp\\
&\quad=\left(\overline{\mathcal{R}}(W,X_i)X_j-h\left(\frac{\partial}{\partial u^i},A_W\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right)+\mathrm{D}^\perp_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\mathrm{D}^\perp_{\frac{\partial}{\partial u^j}}W\right)^\perp,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial t}}\left(F_*\left(\mathrm{D}^t_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right)\right)^\perp\bigg|_{t=0}\\
&\quad=\left(\left(\overline{\mathrm{D}}_{\mathrm{D}^t_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}}\tilde{W}+F_*\left(\left[\frac{\partial}{\partial t},\mathrm{D}^t_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}\right]\right)\right)\bigg|_{t=0}\right)^\perp\\
&\quad=\left(\overline{\mathrm{D}}_{\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}}\tilde{W}+\frac{\partial}{\partial t}(\Gamma_t)^k_{ij}\bigg|_{t=0}X_k\right)^\perp\\
&\quad=\left(\mathrm{D}^\perp_{\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}}\tilde{W}-f_*\left(A_W\left(\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial t}(\Gamma_t)^k_{ij}\bigg|_{t=0}X_k\right)^\perp\\
&\quad=\left(\mathrm{D}^\perp_{\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}}\tilde{W}\right)^\perp,
\end{aligned}
$$

其中 $(\Gamma_t)^k_{ij}$ 是联络 D^t 的联络系数. 由此得知，(5.20) 式右边第二项与 W 的内积是

$$
\begin{aligned}
&\left\langle(g_t)^{ij}\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial t}}\left(\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\tilde{X}_j-(f_t)_*\left(\mathrm{D}^t_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right),\tilde{W}\right\rangle\bigg|_{t=0}\\
&\quad=\left\langle(g_t)^{ij}\left(\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial t}}\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\tilde{X}_j\right)^\perp\bigg|_{t=0}\right.\\
&\quad\quad\left.-(g_t)^{ij}\left(\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial t}}\left((f_t)_*\left(\mathrm{D}^t_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right)\right)^\perp\bigg|_{t=0},W\right\rangle\\
&\quad=\langle g^{ij}\overline{\mathcal{R}}(W,X_i)X_j,W\rangle\\
&\quad\quad+\left\langle g^{ij}\left(\mathrm{D}^\perp_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\mathrm{D}^\perp_{\frac{\partial}{\partial u^j}}W-\mathrm{D}^\perp_{\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}}W\right),W\right\rangle\\
&\quad\quad-\left\langle g^{ij}h\left(\frac{\partial}{\partial u^i},A_W\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right),W\right\rangle\\
&\quad=\left\langle\mathrm{Ric}^\perp(W),W\right\rangle+\langle\Delta^\perp_M W,W\rangle\\
&\quad\quad-\left\langle g^{ij}h\left(\frac{\partial}{\partial u^i},A_W\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right),W\right\rangle,
\end{aligned}\tag{5.22}
$$

此外，容易得知

$$
\begin{aligned}
\left\langle g^{ij}h\left(\frac{\partial}{\partial u^i},A_W\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right),W\right\rangle&=g^{ij}g^{kl}h^\alpha_{ik}h^\beta_{jl}W^\alpha W^\beta\\
&=\langle h\circ h^\flat(W),W\rangle.
\end{aligned}\tag{5.23}
$$

最后，综合 (5.20)~(5.23) 各式得到

$$
\begin{aligned}
&-m\left\langle\overline{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial t}}H_t\bigg|_{t=0},W\right\rangle\\
&\quad=-\left\langle\mathrm{Ric}^\perp(W),W\right\rangle-\langle\Delta^\perp_M W,W\rangle-\langle h\circ h^\flat(W),W\rangle.
\end{aligned}
$$

把上式代入 (5.19) 式便得

$$V''(0) = -\int_M \langle \Delta_M^{\perp} W + \mathrm{Ric}^{\perp}(W) + h \circ h^{t}(W), W\rangle \mathrm{d}V_M.$$

证毕.

注记 5.1 定理 5.3 有采用活动标架方法的证明，请参看参考文献 [18].

下面，在极小超曲面的情形下化简体积的第二变分公式.

设 $f: M \to N$ 是 $n = m+1$ 维黎曼流形 $(N, \bar{g})$ 中的极小超曲面，$\{e_i\}$ 是 M 上单位正交局部标架场. 若用 $\boldsymbol{n}$ 表示超曲面的单位法向量，则有 $\lambda \in C^{\infty}(M)$，使得 $W = \lambda \boldsymbol{n}$，并且 $\lambda|_{\partial M} = 0$. 容易看出，我们有

$$\Delta_M^{\perp} W = (\bar{\Delta}_M \lambda)\boldsymbol{n}.$$

另外，

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}^{-}(W) &= -\sum_i (\overline{\mathcal{R}}(f_*(e_i), W) f_*(e_i))^{-} \\ &= -\lambda \cdot \sum_i (\overline{\mathcal{R}}(f_*(e_i), \boldsymbol{n}) f_*(e_i))^{\perp},\end{aligned}$$

因而

$$\langle \mathrm{Ric}^{\perp}(W), W\rangle = -\lambda^2 \sum_i \langle \overline{\mathcal{R}}(f_*(e_i), \boldsymbol{n}) f_*(e_i), \boldsymbol{n}\rangle = \lambda^2 \overline{\mathrm{Ric}}(\boldsymbol{n}),$$

其中 $\overline{\mathrm{Ric}}(\boldsymbol{n})$ 是黎曼流形 $(N, \bar{g})$ 中沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的 Ricci 曲率. 此外，因为

$$h \circ h^{t}(W) = h \circ h^{t}(\lambda \boldsymbol{n}) = \lambda \sum_{i,j} (h_{ij})^2 \boldsymbol{n},$$

所以

$$\langle h \circ h^{t}(W), W\rangle = \lambda^2 \sum_{i,j} (h_{ij})^2 = \lambda^2 |h|^2,$$

其中

$$|h|^2 = \sum_{i,j} (h_{ij})^2$$

称为超曲面的第二基本形式的模长平方. 综上所述，极小超曲面体积的第二变分公式成为

$$V''(0) = -\int_M \{\lambda \bar{\Delta}_M \lambda + \lambda^2 (\overline{\mathrm{Ric}}(\boldsymbol{n}) + |h|^2)\} \mathrm{d}V_M. \tag{5.24}$$

正如本节开始所谈到的，推导体积第二变分公式的一个目的是给出判定一个极小子流形的体积是否达到 (局部) 最小值的手段；与此密切相关的一个重要概念是极小子流形的稳定性. 关于极小子流形的稳定性，已有丰富的研究成果. 在此仅利用体积的第二变分公式证明两个重要的定理，作为这个专题的入门.

定义 5.1 设 $f: (M, g) \to (N, \bar{g})$ 是等距极小浸入. 如果对于 M 中每一个紧致有向的带边区域 D，子流形 $f|_D$ 在任意的有固定边界的法向变分下其体积的第二变分都是非负的，则称 f 是**稳定的极小子流形**.

设 $f: M \to N$ 是一个等距浸入，如果对于 M 的每一个紧致有向的带边区域 D，以及任意一个子流形 $\tilde{f}: D \to N$，只要

$$\tilde{f}|_{\partial D} = f|_{\partial D},$$

便有 $V(f|_D) \le V(\tilde{f})$，则称子流形 f 是**体积最小的**，其中 $V(f|_D)$ 和 $V(\tilde{f})$ 分别表示带边黎曼流形 $(D, f^*\bar{g})$ 和 $(D, \tilde{f}^*\bar{g})$ 的体积.

显然，每一个体积最小的子流形都是稳定的极小子流形.

引理 5.4 设 $f: M \to N$ 是 n 维黎曼流形 $(N, \bar{g})$ 中的极小浸入超曲面，$n = m+1$. 如果 $\boldsymbol{n}$ 是子流形 f 在 N 中的单位法向量场，则 f 是稳定的充分必要条件是对于任何具有紧致支撑集的光滑函数 $\lambda \in C^{\infty}(M)$ 有

$$\int_M \lambda^2 (\overline{\mathrm{Ric}}(\boldsymbol{n}) + |h|^2) \mathrm{d}V_M \le \int_M |\nabla \lambda|^2 \mathrm{d}V_M, \tag{5.25}$$

其中 $\overline{\mathrm{Ric}}(n)$ 是在黎曼流形 $(N,\bar{g})$ 中沿方向 n 的 Ricci 曲率.

证明 在 M 上取单位正交局部标架场 $\{e_i\}$, 并设 $\lambda_i = e_i(\lambda)$, 则

$$\begin{aligned}\Delta_M(\lambda^2) &= \sum_i (\lambda^2)_{,ii} = \sum_i (\mathrm{D}_{e_i}\mathrm{D}_{e_i} - \mathrm{D}_{\mathrm{D}_{e_i}e_i})(\lambda^2)\\ &=2\sum_i(\lambda(\mathrm{D}_{e_i}\mathrm{D}_{e_i}\lambda) + (e_i(\lambda))^2 - \lambda(\mathrm{D}_{\mathrm{D}_{e_i}e_i})\lambda))\\ &=2\lambda\sum_i(\mathrm{D}_{e_i}\mathrm{D}_{e_i} - \mathrm{D}_{\mathrm{D}_{e_i}e_i})\lambda + 2\sum_i(\lambda_i)^2\\ &=2(\lambda\Delta_M\lambda + |\nabla\lambda|^2).\end{aligned}$$

于是

$$\lambda\Delta_M\lambda = \frac{1}{2}\Delta_M(\lambda^2) - |\nabla\lambda|^2;$$

将它代入 (5.24) 式得到

$$V''(0) = -\int_M \left\{\frac{1}{2}\Delta_M(\lambda^2) - |\nabla\lambda|^2 + \lambda^2(\overline{\mathrm{Ric}}(n) + |h|^2)\right\}\mathrm{d}V_M. \quad (5.24')$$

设 U 是 M 的开子集, 使得 $\overline{U}$ 是紧致的, 并且 $\mathrm{Supp}\lambda \subset U$, 那么由 Green 公式得到

$$\frac{1}{2}\int_M \Delta_M(\lambda^2)\mathrm{d}V_M = -\frac{1}{2}\int_{\partial\overline{U}}\langle\nabla(\lambda)^2, \bar{n}\rangle\mathrm{d}V_{\partial M} = 0,$$

其中 $\bar{n}$ 是指 $\partial\overline{U}$ 的指向 $\overline{U}$ 内的法向量. 因此, $V''(0) \geq 0$ 当且仅当 (5.25) 式成立. 证毕.

定理 5.5 设 $(N,\bar{g})$ 是具有正数量曲率的紧致有向的三维黎曼流形, (M,g) 是紧致有向的二维黎曼流形. 如果 $f: M \to N$ 是 N 中稳定极小的浸入曲面, 则 M 的亏格 $g(M)$ 必为零; 换句话说, 在满足定理条件的黎曼流形 N 中不存在亏格为正、并且紧致有向的稳定极小浸入曲面.

证明 设 $\overline{S}$ 是黎曼流形 N 的数量曲率, K 是曲面 M 的 Gauss 曲率, n 是 M 在 N 中的单位法向量场. 对于任意的 $p \in M$, 选取 M

在 p 点附近的单位正交标架场 $\{e_1, e_2\}$, 使得 M 的第二基本形式 h 的分量 $h_{ij} = h(e_i, e_j)$ 构成一个二阶对角方阵, 即存在局部定义的光滑函数 λ, μ, 使得

$$h_{11} = \lambda, \quad h_{22} = \mu, \quad h_{12} = h_{21} = 0. \quad (5.26)$$

由于 M 是 N 的极小曲面, $\mu = -\lambda$, 于是 $|h|^2 = 2\lambda^2$. 令 $e_3 = n$, 则 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是 N 上沿 M 定义的单位正交标架场. 从而由数量曲率的定义

$$\begin{aligned}\overline{S} &= \sum_{A,B=1}^{3}\overline{R}(e_A, e_B, e_B, e_A)\\ &=2\left(\sum_i \overline{R}(e_i, n, n, e_i) + \overline{R}(e_1, e_2, e_2, e_1)\right)\\ &=2\overline{\mathrm{Ric}}(n) + 2\overline{R}(e_1, e_2, e_2, e_1).\end{aligned} \quad (5.27)$$

再由 Gauss 方程 (2.6) 和 (5.26) 式,

$$\overline{R}(e_1, e_2, e_2, e_1) = R(e_1, e_2, e_2, e_1) + (h_{12})^2 - h_{11}h_{22} = K + \lambda^2.$$

把上式代入 (5.27) 得

$$\begin{aligned}\overline{S} &=2\overline{\mathrm{Ric}}(n) + 2K + 2\lambda^2 = 2\overline{\mathrm{Ric}}(n) + 2K + |h|^2\\ &=2(\overline{\mathrm{Ric}}(n) + |h|^2) + 2K - |h|^2.\end{aligned}$$

因此

$$K = -(\overline{\mathrm{Ric}}(n) + |h|^2) + \frac{1}{2}(\overline{S} + |h|^2). \quad (5.28)$$

另一方面, 由于 M 是紧致的稳定极小浸入曲面, 不等式 (5.25) 对于任意的 $\lambda \in C^\infty(M)$ 成立. 如果令 $\lambda \equiv 1$, 则得

$$\int_M(\overline{\mathrm{Ric}}(n) + |h|^2)\mathrm{d}V_M \leq 0.$$

最后, 根据 Gauss-Bonnet 定理和 (5.28) 式得到

$$4\pi(1-g(M))=\int_M K\mathrm{d}V_M > -\int_M(\overline{\mathrm{Ric}}(n)+|h|^2)\mathrm{d}V_M \geq 0,$$

其中利用了假设条件 $\overline{S}>0$. 所以 $g(M)<1$, 即 $g(M)=0$. 证毕.

下面的定理讨论欧氏空间中极小超曲面的稳定性.

定理 5.6　设 D 是欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 中的紧致带边区域, $F: D\to\mathbb{R}$ 是光滑函数, 使得 F 的图像

$$M=\{(u^1,\cdots,u^m,F(u^1,\cdots,u^m));\ \forall(u^1,\cdots,u^m)\in D\}$$

是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的一个带边极小浸入超曲面. 则对于 D 上任意一个光滑函数 $\tilde{F}$ 的图像 $\tilde{M}\subset\mathbb{R}^{m+1}$, 只要 $\partial\tilde{M}=\partial M$, 便有

$$V(M)\leq V(\tilde{M}),$$

其中等号成立当且仅当 $M=\tilde{M}$.

定理 5.6 说明, $\mathbb{R}^{m+1}$ 中由光滑函数 F 的图像给出的极小超曲面 M 是体积最小的.

证明　用 $(x^1,\cdots,x^{m+1})$ 记 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的笛卡尔坐标系, 则图像 M 由参数方程

$$\begin{cases} x^i=u^i, & 1\leq i\leq m,\\ x^{m+1}=F(u^1,\cdots,u^m) \end{cases}\tag{5.29}$$

给出. 因此 M 上的切标架场由下列切向量场组成:

$$X_i=\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{\partial F}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial x^{m+1}},\quad 1\leq i\leq m,\tag{5.30}$$

用 n 记 M 的单位法向量场, 使得 $\{X_1,\cdots,X_m,n\}$ 给出的定向与 $\mathbb{R}^{m+1}$ 一致. 不难求出

$$n=\frac{1}{P}\left(-\sum_i\frac{\partial F}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{\partial}{\partial x^{m+1}}\right),\tag{5.31}$$

其中

$$P=\sqrt{1+\sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial u^i}\right)^2}.$$

记

$$n_i=-\frac{1}{P}\frac{\partial F}{\partial u^i},\quad n_{m+1}=\frac{1}{P}.\tag{5.32}$$

注意到 M 是 F 的图像, 向量场 n 实际上是 u^i 的函数, 因而只依赖于坐标 x^i, $1\leq i\leq m$, 因此可以把 n 扩充成定义在 $D\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^{m+1}$ 上的光滑向量场, 使得 n 在坐标直线 $(x_0^1,\cdots,x_0^m,x^{m+1})$ 上是常向量场, 其中 $(x_0^1,\cdots,x_0^m)$ 是 D 中任意一个固定点. $\mathbb{R}^{m+1}$ 的体积元素是

$$\Omega=\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m\wedge\mathrm{d}x^{m+1},\tag{5.33}$$

令

$$\begin{aligned}\omega&=(-1)^m\cdot i(n)\Omega\\ &=\sum_{A=1}^{m+1}(-1)^{m+A+1}n_A\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^A}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{m+1},\end{aligned}\tag{5.34}$$

其中 $i(n)$ 是外微分式的内乘 (参看第一章习题第 51 题). 现在需要证明下面三个事实:

(1) $\mathrm{d}\omega=0$, 即 ω 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 上的闭形式;

(2) $\omega|_M=\mathrm{d}V_M$, 即 ω 在子流形 M 上的限制是 M 的体积元;

(3) 若 $\tilde{M}$ 是函数 $\tilde{F}:\overline{D}\to\mathbb{R}$ 的图像, $\tilde{n}$ 是 $\tilde{M}$ 的单位法向量, 则 $\omega|_{\tilde{M}}=(n,\tilde{n})\mathrm{d}V_{\tilde{M}}$.

先证明结论 (1). 对 (5.34) 式求外微分得到

$$\mathrm{d}\omega=(-1)^m\left(\sum_A\frac{\partial n_A}{\partial x^A}\right)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{m+1}.$$

现在, $x^i=u^i\ (1\leq i\leq m)$, 而 n_A 与 x^{m+1} 无关, 所以

$$\sum_A\frac{\partial n_A}{\partial x^A}=\sum_{i=1}^m\frac{\partial n_i}{\partial u^i}=-\sum_{i=1}^m\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{F_i}{\sqrt{1+\sum_k(F_k)^2}}\right).$$

因为函数 F 的图像是极小超曲面, $F(u^1,\cdots,u^m)$ 必满足方程 (4.32), 即上式的右端为零. 这意味着

$$\sum_A \frac{\partial n_A}{\partial x^A}=0, \text{ 即 } \mathrm{d}\omega=0.$$

(2) 的证明. 根据 (5.30) 式, R^{m+1} 在 M 上的诱导度量由

$$g_{ij}=(X_i,X_j)=\delta_{ij}+F_iF_j,\quad 1\le i,j\le m$$

给出. 容易得知

$$\det(g_{ij})=1+\sum_{k=1}^m(F_k)^2=P^2,$$

因此 M 的体积元素是

$$\mathrm{d}V_M=P\mathrm{d}u^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^m.$$

将 (5.29) 式代入 (5.34) 式得到

$$\begin{aligned}\omega|_M=&n_{m+1}\mathrm{d}u^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^m\\&+\sum_{i=1}^m(-1)^{m+i+1}n_i\mathrm{d}u^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}u^i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^m\wedge\left(\sum_{k=1}^m F_k\mathrm{d}u^k\right)\\=&P\mathrm{d}u^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^m=\mathrm{d}V_M.\end{aligned}$$

(3) 的证明. $\bar M$ 的单位法向量 $\bar n$ 的分量是

$$\bar n_i=-\frac{1}{\bar P}\cdot\frac{\partial\bar F}{\partial u^i},\quad \bar n_{m+1}=\frac{1}{\bar P},$$

其中

$$\bar P=\sqrt{1+\sum_k\left(\frac{\partial\bar F}{\partial u^k}\right)^2}.$$

显然, $\bar M$ 的体积元素是

$$\mathrm{d}V_{\bar M}=\bar P\mathrm{d}u^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^m.$$

直接计算得到

$$\begin{aligned}\omega|_{\bar M}=&n_{m+1}\mathrm{d}u^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^m\\&+\sum_{i=1}^m(-1)^{m+i+1}n_i\mathrm{d}u^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}u^i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^m\wedge\left(\sum_{k=1}^m \bar F_k\mathrm{d}u^k\right)\\=&\frac{1}{P}\left(1+\sum_{i=1}^m\frac{\partial F}{\partial u^i}\frac{\partial\bar F}{\partial u^i}\right)\mathrm{d}u^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^m\\=&(\bar n,n)\bar P\mathrm{d}u^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^m=(\bar n,n)\mathrm{d}V_{\bar M}.\end{aligned}$$

最后来完成定理的证明.

设 $\bar M$ 是光滑函数 $\bar F:D\to\mathbb{R}$ 的图像, 且 $\partial\bar M=\partial M$, 即

$$\bar F|_{\partial D}=F|_{\partial D},$$

则可假定 M 和 $\bar M$ 围成 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的一个紧致区域 G, 使得

$$\partial G=M-\bar M.$$

由 Stokes 定理,

$$\int_M\omega-\int_{\bar M}\omega=\int_{\partial G}\omega=\int_G\mathrm{d}\omega=0.$$

所以

$$\begin{aligned}V(M)=\int_M\omega=\int_{\bar M}\omega=\int_{\bar M}(\bar n,n)\mathrm{d}V_{\bar M}\\\le\int_{\bar M}\mathrm{d}V_{\bar M}=V(\bar M).\end{aligned}$$

如果 $\bar F\ne F$, 则在 D 的一个正测度子集上 $(\bar n,n)<1$, 因此

$$V(M)<V(\bar M).$$

证毕.

习 题 七

1. 设 (M_1, g_1), (M_2, g_2) 是两个黎曼流形, $M = M_1 \times M_2$, (M, g) 是 M_1 和 M_2 的黎曼乘积 (参看第二章的例 2.5). 用 $\mathrm{D}^{(1)}$, $\mathrm{D}^{(2)}$ 和 D 依次表示 M_1, M_2 和 M 上的黎曼联络.

(1) 对于任意的 $p \in M_1$, M 中的子集

$$(M_2)_p = \{(p, q) \in M;\ q \in M_2\}$$

是 M 中的一个与 M_2 光滑同胚的子流形. 证明: $(M_2)_p$ 是 M 的全测地子流形.

(2) 设 $p \in M_1$, $q \in M_2$, $v \in T_pM_1$, $w \in T_qM_2$, 并且 $v \neq 0$, $w \neq 0$. 证明: 若把 $T_{(p,q)}M$ 等同于 $T_pM_1 \oplus T_qM_2$, 则 M 上由 v 和 w 确定的截面曲率 $K(v, w) = 0$.

2. 设映射 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ 由下式定义:

$$f(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, \sin\theta, \cos\varphi, \sin\varphi), \qquad \forall(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2,$$

S^3 是 $\mathbb{R}^4$ 中的单位球面. 证明:

(1) $f(\mathbb{R}^2) \subset S^3$ 并且 $f: \mathbb{R}^2 \to S^3$ 是一个浸入, 但对于 $\mathbb{R}^2$ 上的标准度量而言, 它不是等距浸入;

(2) $f(\mathbb{R}^2) = S^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times S^1(\frac{1}{\sqrt{2}})$, 因而作为 S^3 的黎曼子流形, $f(\mathbb{R}^2)$ 的 Gauss 曲率恒为零.

3. 设 N 是黎曼流形, $S \subset M \subset N$ 是子流形. 证明: 如果 M 是 N 的全测地子流形, S 是 M 的全测地 (或极小) 子流形, 则 S 也是 N 的全测地 (或极小) 子流形.

4. 设 $M_i \subset N_i$ 是全测地子流形, $i = 1, 2$. 证明: $M_1 \times M_2$ 是 $N_1 \times N_2$ 的全测地子流形.

5. 设 S^2 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面, $M = S^2 \times S^2$ 具有乘积度量. 证明: M 的截面曲率 $K \geq 0$. 试求平坦环面 $T^2 = S^1 \times S^1$ 在 M 中的一个全测地的等距嵌入.

6. 设 G 是一个具有双不变黎曼度量的李群 (参看第二章习题第 16 题), $f: H \to G$ 是李群 H 到 G 的同态 (参看第一章习题第 45 题). 证明: 如果 $f: H \to G$ 是浸入, 则 f 关于诱导度量是全测地的.

7. (**Clifford 环面**) 设映射 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ 由下式定义:

$$f(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\sqrt{2}\theta, \sin\sqrt{2}\theta, \cos\sqrt{2}\varphi, \sin\sqrt{2}\varphi), \quad \forall(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2.$$

(1) 证明: $f(\mathbb{R}^2) \subset S^3 \subset \mathbb{R}^4$, 并且 $f: \mathbb{R}^2 \to S^3$ 是等距浸入.

(2) 令

$$\begin{aligned}
e_1 &= (-\sin\sqrt{2}\theta, \cos\sqrt{2}\theta, 0, 0),\\
e_2 &= (0, 0, -\sin\sqrt{2}\varphi, \cos\sqrt{2}\varphi),\\
e_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\sqrt{2}\theta, -\sin\sqrt{2}\theta, \cos\sqrt{2}\varphi, \sin\sqrt{2}\varphi),\\
e_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\sqrt{2}\theta, \sin\sqrt{2}\theta, \cos\sqrt{2}\varphi, \sin\sqrt{2}\varphi).
\end{aligned}$$

试验证 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 和 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 分别是子流形 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ 和 $f: \mathbb{R}^2 \to S^3$ 的 Darboux 标架场.

(3) 证明: 浸入 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ 的第二基本形式 h 关于 Darboux 标架场 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 的分量为

$$h_{11}^3 = -h_{22}^3 = -h_{11}^4 = -h_{22}^4 = 1, \quad h_{12}^\alpha = h_{21}^\alpha = 0, \quad \alpha = 3, 4.$$

可见, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ 不是极小子流形.

(4) 证明: 由 $f: \mathbb{R}^2 \to S^3$ 诱导的映射

$$i: S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \to S^3$$

是环面 $S^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times S^1(\frac{1}{\sqrt{2}})$ 在 S^3 中的等距极小嵌入 (称为 **Clifford 环面**).

8. 设 N 是 $m+1$ 维黎曼流形，$F: N \to \mathbb{R}$ 是光滑函数，$a = F(p_0)$，其中 $p_0 \in N$ 是 F 的一个**正则点**，即 F 在 p_0 点的梯度 $(\nabla F)(p_0) \neq 0$；此时，也把 a 称为光滑函数 F 的一个**正则值**. 设

$$M = \{p \in N;\ F(p) = a,\ |\nabla F|(p) \neq 0\},$$

则 M 是 N 中的超曲面.

(1) 证明：M 在 N 中的平均曲率

$$H = -\frac{1}{m}\mathrm{div}_N\left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|}\right),$$

其中 div_N 是 N 上的散度算子.

(2) 设 $\bar{M}$ 是 N 中的任意一个超曲面，$p \in \bar{M}$. 证明：存在点 p 在 N 中的一个开邻域 U，以及 U 上的光滑函数 F，使得 $U \cap \bar{M}$ 是 F 关于某个正则值的逆像集. 由此可见，超曲面 $\bar{M}$ 的平均曲率可以表示成

$$H = -\frac{1}{m}\mathrm{div}_N(\tilde{\xi}_0),$$

其中 $\tilde{\xi}_0$ 是 $\bar{M}$ 在 N 中的一个单位法向量场 ξ_0 的局部光滑扩充.

9. 设 $H^n(c)(c<0)$ 是截面曲率为 c 的 n 维双曲空间. 证明：如果 M 是 $H^n(c)$ 中的 m 维全测地闭子流形，则 M 与 $H^m(c)$ 等距；试决定 $H^n(c)$ 中所有的全测地子流形.

10. 设 N 是黎曼流形，$\varphi: N \to N$ 是 N 上的一个等距变换. 如果 $M \subset N$ 是 φ 在 N 中的不动点的集合，证明：在 M 上具有自然诱导的光滑流形结构，并且 M 关于诱导度量是 N 的全测地子流形.

11. 设 M 是 N 的子流形. 如果对于 M 中的每一条曲线 $\gamma: [0,1] \to M$ 有 $P_\gamma(T_{\gamma(0)}M) = T_{\gamma(1)}M$，则称 M 的切丛 TM 关于 N 的黎曼联络 $\bar{\mathrm{D}}$ 是**平行的**. 这里，P_γ 是 N 中沿 γ 的平行移动. 证明：TM 关于 $\bar{\mathrm{D}}$ 是平行的当且仅当对于任意的 $X, Y \in \Gamma(TM)$，都有 $\bar{\mathrm{D}}_X Y \subset \mathfrak{X}(M)$. 由此可见，$M$ 是 N 中的全测地子流形当且仅当 TM 关于 $\bar{\mathrm{D}}$ 是平行的.

12. 设 $f: M \to N$ 是等距浸入在 n 维黎曼流形 N 中的 m 维子流形，ξ 是 f 的一个法向量场，$\mathrm{D}^\perp$ 是 f 的法联络. 如果对于任意的 $X \in \mathfrak{X}(M)$，$\mathrm{D}^\perp_X \xi = 0$，则称法向量场 ξ 沿 f 是**平行的**. 证明：一个非零法向量场 ξ 是平行的当且仅当 $|\xi| = \text{const.}$，并且单位法向量场 $\xi_0 = \xi/|\xi|$ 是平行的.

13. 设 N 是一个 n 维常曲率空间，M 是 N 的浸入子流形，$\{e_i, e_\alpha\}$ 是沿 M 定义的一个 Darboux 标架场，h^α_{ij} 是 M 的第二基本形式 h 关于 $\{e_i, e_\alpha\}$ 的分量. 对于任意的 α，令 $H^\alpha = (h^\alpha_{ij})$. 证明：如果对于某个 α_0，单位法向量场 e_{α_0} 是平行的，则矩阵 H^{α_0} 满足

$$H^{\alpha_0}H^\alpha = H^\alpha H^{\alpha_0},\quad \forall \alpha.$$

14. 设 $f: M \to N$ 是等距浸入子流形，$H \in \Gamma(T^\perp M)$ 是 f 的平均曲率向量场. 如果 H 作为法向量场是平行的，则称浸入 f 具有**平行平均曲率向量场**. 证明：f 具有平行平均曲率向量场当且仅当在 Darboux 标架场 $\{e_i, e_\alpha\}$ 下，$\sum_i h^\alpha_{iij} = 0(\forall j, \alpha)$，其中 h^α_{ijk} 是 f 的第二基本形式 h 的协变微分在标架场 $\{e_i, e_\alpha\}$ 下的分量 (参看 (2.13) 式).

15. 试利用 Gauss 方程证明：$\mathbb{R}^{m+1}$ 中以 $a > 0$ 为半径的标准球面 $S^m(a)$ 具有常截面曲率 $c = 1/a^2$.

16. 设 M 是黎曼流形 N 的浸入子流形，$\mathrm{D}^\perp$ 是 M 的法联络. 如果对于任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$，$\mathrm{D}^\perp$ 的曲率算子 $R^\perp(X,Y) \equiv 0$，则称 M 是**具有平坦法丛的子流形**. 证明：如果 N 是常曲率空间，则 M 具有平坦法丛当且仅当在每一点 $p \in M$ 都有 p 点附近的标架场 $\{e_i\}$，使得对于任意的 $\xi \in \Gamma(T^\perp M)$，Weingarden 变换 A_ξ 在 $\{e_i\}$ 下的矩阵在 p 点是对角矩阵.

17. 双曲空间 $H^n(c)$ 可以看作是 Lorentz 空间在 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ 中的嵌入超曲面.

(1) 导出 $H^n(c)$ 在 Lorentz 空间 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ 中的基本公式和基本方程；

(2) 采用类似于本章习题第 15 题的办法，证明 $H^n(c)$ 具有常截面曲率 c.

18. 设 $f: M \to N$ 是黎曼流形 M 在 N 中的等距浸入，g 是 M 上的黎曼度量，h 是浸入 f 的第二基本形式，$p \in M$. 如果存在法向量 $\xi \in T_p^{\perp}M$，使得

$$h(v,w) = g(v,w)\xi, \quad \forall v,w \in T_pM,$$

则称 p 点为浸入 f 的脐点；如果 M 的每一点都是 f 的脐点，则称 f 是 **全脐的**.

(1) 证明：f 是全脐的当且仅当存在 f 的光滑法向量场 ξ，使得

$$h(X,Y) = g(X,Y)\xi, \quad \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

(2) 证明：当 (1) 中的等式成立时，ξ 必是浸入 f 的平均曲率向量场，即有 $\xi = H$.

19. 设 $f: M \to N$ 是 $m+1$ 维黎曼流形 N 中的浸入超曲面，g 是 M 上的诱导黎曼度量，ξ_0 是 f 的一个单位法向量场. 假定

$$\bar{h}: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(T^{\perp}M)$$

是 f 的第二基本形式，则存在 M 上的一个对称的二阶协变张量场 h，使得对于任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$，$\bar{h}(X,Y) = h(X,Y)\xi_0$. 显然，二阶协变张量场 h 和 $\bar{h}$ 互相确定，因而 h 也被称为超曲面 f 的 **第二基本形式**.

(1) 证明：f 是全脐的当且仅当存在 M 上的光滑函数 λ，使得

$$h(X,Y) = \langle \bar{h}(X,Y), \xi_0 \rangle = \lambda g(X,Y), \quad \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M),$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 N 上的黎曼度量. 此时，函数 λ 是超曲面 M 的平均曲率. 进一步说明：如果，$\bar{\mathrm{D}}$ 是 N 上的黎曼联络，则上式等价于

$$\langle \bar{\mathrm{D}}_X\xi_0, f_*(Y)\rangle = -\lambda g(X,Y), \quad \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

(2) 设 N 是常曲率空间，$m \geq 2$，$f: M \to N$ 是全脐的浸入超曲面，证明：(1) 中的函数 λ 是常值函数，并且 M 关于诱导的黎曼度量也是一个常曲率空间.

(3) 设 $f: M \to N$ 是到常曲率空间 N 内的全脐浸入超曲面. 试利用第二章习题第 21 题，证明：如果 $\tilde{g} = e^{2\rho}\bar{g}$ 是 N 上共形于 $\bar{g} = \langle\cdot,\cdot\rangle$ 的黎曼度量，$\rho \in C^{\infty}(N)$，则有

$$\tilde{g}(\tilde{\mathrm{D}}_X(e^{-\rho}\xi), f_*(Y)) = e^{-\rho}(\xi_0(\rho) - \lambda)(f^*\tilde{g})(X,Y),$$
$$\forall X,Y \in \mathfrak{X}(M),$$

其中 $\tilde{\mathrm{D}}$ 是黎曼流形 $(N,\tilde{g})$ 上的黎曼联络，$\xi_0(\rho)$ 是函数 ρ 沿 ξ_0 方向的方向导数. 由此可见，$f: M \to (N,\tilde{g})$ 仍然是全脐的浸入超曲面.

(4) 设 $N = \mathbb{R}^{m+1}$ 并赋予标准的欧氏度量. 证明：如果 $f: M \to \mathbb{R}^{m+1}$ 是全脐的浸入超曲面，则 $f(M)$ 是 m 维平面或 m 维球面的一部分.

20. 设 N 是 $n = m+1$ 维黎曼流形，$f: M \to N$ 是等距浸入在 N 中的超曲面，ξ_0 是沿 f 定义的单位法向量场. 对于任意的 $p \in M$，我们用 $A = A_{\xi_0}: T_pM \to T_pM$ 表示在 p 点的 Weingarten 变换，它的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 是 m 个实数，称为等距浸入 f 在 p 点的 **主曲率**，相应的特征向量的方向称为 f 在 p 点的 **主方向**；m 个主曲率的乘积 $K = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m$ 称为 f 在 p 点的 **Gauss-Kronecker 曲率**. 证明：浸入 f 是全脐的充分必要条件是 f 的 m 个主曲率处处都相等.

21. 设 $f: M \to \mathbb{R}^{m+1}$ 是等距浸入超曲面，S^m 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中以原点为中心的单位球面. 通过 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的平行移动，f 的单位法向量场 ξ_0 给出一个光滑映射 $G: M \to S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$，使得对于任意的 $p \in M$，$G(p) = \xi_0(p)$. 如此定义的映射称为等距浸入 f 的 **Gauss 映射**.

(1) 证明，如果对于任意的 $p \in M$，通过 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的平行移动把 $f_*(T_pM)$ 和 $T_{G(p)}S^m$ 等同起来，则有

$$G_*(v) = A(v), \quad \forall v \in T_pM,$$

其中 $A: T_pM \to f_*(T_pM)$ 是 f 的 Weingarten 变换.

(2) 设 M 是紧致可定向的连通黎曼流形，证明：如果等距浸入 f 的 Gauss-Kronecker 曲率处处不等于零，则 M 与单位球面光滑同胚.

22. 设 M 是常曲率空间 N 中的连通超曲面, λ 是 M 的一个主曲率. 对于任意的点 $p\in M$, $\lambda(p)$ 的重数记为 $r(p)$, Weingarten 变换 A 对应于 $\lambda(p)$ 的特征子空间记为 $\mathscr{D}_p$, 易知 $\dim\mathscr{D}_p=r(p)$. 证明:

(1) 如果 M 的每一个主曲率的重数都与点 $p\in M$ 无关, 则由 $p\mapsto\mathscr{D}_p$ 确定了 M 上的一个 r 维光滑分布 $\mathscr{D}$ (参看参考文献 [3, 第 148~151 页]), 即对于任意的点 $p\in M$, 存在 p 的开邻域 U 以及定义在 U 的 r 个光滑切向量场 $X_1,\cdots,X_r$, 使得在每一点 $q\in U$, $\{X_1(q),\cdots,X_r(p)\}$ 是 $\mathscr{D}_q$ 的一个基底;

(2) 在 (1) 的条件下, 分布 $\mathscr{D}$ 是**完全可积的**, 即对于任意的点 $p\in M$, 存在 M 的通过 p 点的子流形 M_1, 使得在每一点 $q\in M_1$, $T_pM_1=\mathscr{D}_p$; 此时称 M_1 是分布 $\mathscr{D}$ 的一个**积分流形**;

(3) 在 (1) 的条件下, 如果 $r\geq 2$, 则 λ 在分布 $\mathscr{D}$ 的每一个积分流形上等于常数.

23. 设 M 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的 m 维浸入子流形. 把点 $p\in M$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的向径记为 $x(p)$, 那么 x 可看作定义在 M 上的向量函数, 称为 M 在 $\mathbb{R}^n$ 中的**位置向量 (函数)**. 令 $n=m+1$, 再设 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 上的标准度量, ξ_0 是 M 的单位向量场, 令 $S=\langle x,\xi_0\rangle$, 它是 M 上的光滑函数, 称为浸入 f 的**支撑函数**. 证明: 如果 M 是紧致连通的, 则 M 是标准球面当且仅当函数 S 为常数, 并且 M 的 Gauss-Kronecker 曲率处处不为零 (参看本章习题第 21 题).

24. (Liebmann-Süss) 设 M 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中有向的紧致连通超曲面, 证明: M 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的标准球面的充分必要条件是 M 的支撑函数 S(参看本章习题第 23 题) 处处不为零, 并且具有常数平均曲率.

25. 设 $M\subset\mathbb{R}^{m+1}$ 是浸入超曲面, $p\in M$. 如果存在点 p 在 M 中的开邻域 U, 使得 U 上的所有点都位于切空间 T_pM 的同一侧, 则称 M 在 p 点是凸的; 如果存在点 p 在 M 中的开邻域 U, 使得 $U\cap T_pM=\{p\}$, 则称 M 在 p 点处是严格凸的. 如果 M 在每一点都是凸的 (或都是严格凸的), 则称 M 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的**凸超曲面**(或**严格凸超曲面**). 证明:

(1) 如果 M 在一点 p 是凸的, 则 M 在该点的第二基本形式 h 是半定的, 即 M 在点 p 的所有主曲率 (即 h, 或 A 在 p 点的特征值) 具有相同的符号; 如果 h 在点 p 是正定的或负定的, 即 M 在点 p 的所有主曲率都大于零或都小于零, 则 M 在点 p 是严格凸的.

(2) 如果 M 在一点 p 的所有截面曲率都大于零, 则 M 在该点是严格凸的; 反之, 如果 M 在一点 p 是凸的, 则 M 在 p 点的截面曲率全部非负.

26. 设 M 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的紧致连通超曲面. 证明:

(1) 下述三个条件互相等价:

(a) M 的截面曲率 K 恒不为零;

(b) M 的截面曲率 K 恒大于零;

(c) M 是可定向的, 并且 M 的 Gauss 映射 $G:M\to S^m$ 是光滑同胚 (参看本章习题第 22 题).

(2) 在 (1) 的条件下, M 是严格凸的.

27. 设 $M\subset\mathbb{R}^{m+1}$ 是浸入超曲面, 证明:

(1) 如果 M 是紧致连通的, 并且具有正截面曲率和常数平均曲率, 则 M 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的标准球面.

(2) 如果 M 的平均曲率和数量曲率均为常数, 并且具有正截面曲率, 则 M 是标准球面的一部分.

28. 设 M 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的超曲面 $m\geq 3$. 证明: 对于任意的点 $p\in M$, 存在单位正交的切向量 $e_1,e_2\in T_pM$, 使得 M 沿二维截面 $[e_1\wedge e_2]$ 的截面曲率 $K(e_1,e_2)\geq 0$.

29. 设 N 是完备的 n 维黎曼流形, M_1,M_2 是 N 中的两个紧致的全测地子流形. 证明:

(1) 如果 N 的截面曲率处处大于零, 并且

$$\dim M_1+\dim M_2>n,$$

则 $M_1\cap M_2\neq\emptyset$.

(2) 如果 N 的 Ricci 曲率处处大于零，并且

$$\dim M_1 = \dim M_2 = n-1,$$

则 $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$.

30. 设 N 是完备的 $m+1(m \geq 4)$ 维常曲率空间，M 是 N 中完备的连通超曲面. 证明：如果 M 具有平行的第二基本形式 h，即 h 的协变微分恒为零，则 M 是常曲率空间，或者是两个低维常曲率空间的直积.

31. 在具有非零截面曲率的空间形式中导出子流形的基本公式和基本方程，并给出与定理 3.1 对应的结论.

32. 设 M 是 $m+1$ 维单位球面 S^{m+1} 中紧致无边的连通超曲面. 证明：如果 M 的平均曲率为常数，并且具有非负的截面曲率，则 M 是 m 维球面或两个低维球面的直积.

33. 设 $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ 是紧致无边的嵌入超曲面. 证明：如果 M 是连通的并且具有常数量曲率，则它是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的标准球面.

34. 设 k,m 为自然数，$k<m$, S^{m+1} 是 $\mathbb{R}^{m+2}$ 中的单位球面. 作为向量空间，$\mathbb{R}^{m+2}$ 是 $\mathbb{R}^{k+1}$ 与 $\mathbb{R}^{m-k+1}$ 的直和. 现设 M 是 S^{m+1} 中的连通超曲面，x 是 M 在 $\mathbb{R}^{m+2}$ 中的位置向量 (参看本章习题第 23 题)，它可以唯一地表示为 $x = ae_1 + be_2$，其中

$$e_1 : M \to S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}, \quad e_2 : M \to S^{m-k} \subset \mathbb{R}^{m-k+1}$$

分别是 M 到单位球面 S^k 和 S^{m-k} 的光滑映射，$a, b \in C^\infty(M)$，且有 $a^2+b^2=1$. 设 $\xi_0 = -be_1 + ae_2$，证明：

(1) ξ_0 是 M 在 S^{m+1} 中的法向量场当且仅当 a,b 为非零常数，因而可以设 $a>0$, $b>0$;

(2) 以下假定 a,b 为两个正数，则 $M \subset S^k(a)\times S^{m-k}(b)$ 是开子流形，它在 S^{m+1} 中的第二基本形式是

$$h = -\langle \mathrm{d}x, \mathrm{d}\xi_0\rangle = ab(\langle \mathrm{d}e_1, \mathrm{d}e_1\rangle - \langle \mathrm{d}e_2, \mathrm{d}e_2\rangle);$$

(3) M 是 S^{m+1} 中的极小超曲面当且仅当

$$a = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad b = \sqrt{\frac{m-k}{m}},$$

此时，M 称为 S^{m+1} 中的 **Clifford 极小超曲面**. 本章习题第 7 题中的 Clifford 环面是它的特例.

35. 设 $a>0$, $S^2(a) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2=a^2\}$, $\pi : S^2(a) \to \mathbb{R}P^2$ 是从 $S^2(a)$ 到实射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 上的自然投影 (参看第二章习题第 4 题). $S^2(a)$ 上的标准度量在 $\mathbb{R}P^2$ 上有一个诱导度量 g_a，使得 $\pi : S^2(a) \to (\mathbb{R}P^2, g_a)$ 为局部等距. 以 $(u^1,\cdots,u^5)$ 表示 $\mathbb{R}^5$ 上的笛卡尔直角坐标. 定义映射 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^5$ 如下：

$$u^1 = \frac{\sqrt{3}}{a^2}xy, \quad u^2 = \frac{\sqrt{3}}{a^2}xz, \quad u^3 = \frac{\sqrt{3}}{a^2}yz,$$
$$u^4 = \frac{\sqrt{3}}{2a^2}(x^2-y^2), \quad u^5 = \frac{1}{2a^2}(x^2+y^2-2z^2).$$

易知，当 $(x,y,z)\in S^2(a)$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{5}(u^i)^2 = 1$，因而 f 确定了一个映射 $f: S^2(a) \to S^4$，这里 S^4 是 $\mathbb{R}^5$ 中的单位球面.

(1) 证明：映射 $f: S^2(a)\to S^4$ 是等距浸入；由此说明 f 诱导了一个等距嵌入

$$\tilde{f} : (\mathbb{R}P^2, g_a) \to S^4.$$

(2) 证明：$f: S^2(a) \to S^4$ (或等价地，$\tilde{f} : (\mathbb{R}P^2, g_a) \to S^4$) 是极小的当且仅当 $a=\sqrt{3}$. 相应的等距极小浸入 $f: S^2(\sqrt{3}) \to S^4$ 或等距极小嵌入 $\tilde{f}: (\mathbb{R}P^2, g_a) \to S^4$ 称为 S^4 中的 **Veronese 曲面**，它的进一步推广可以参看参考文献 [37].

36. 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形，$(N, \overline{\mathrm{D}})$ 是一个仿射联络空间，$f: M\to N$ 是光滑映射. 根据第二章的例 8.2，在拉回丛 $\pi: f^*TN \to M$ 上具有诱导联络，仍记为 $\overline{\mathrm{D}}$. 定义

$$B_f(X,Y) = \overline{\mathrm{D}}_X f_*(Y) - f_*(\mathrm{D}_X Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

其中 D 是 M 上的黎曼联络. 显然, $B_f(X,Y)\in\Gamma(f^*TN)$, 即 $B_f(X,Y)$ 是 N 中沿 f 定义的向量场. 上面定义的 B_f 称为光滑映射 f 的 **第二基本形式**; 如果 $B_f\equiv 0$, 则称映射 f 是 **全测地的**.

(1) 证明: 如果 $\overline{\mathrm{D}}$ 是无挠联络, 则 B_f 关于 X,Y 是对称的. 此时 B_f 它关于黎曼度量 g 的迹 $\tau(f)=\operatorname{tr}(B_f)$ 称为映射 f 的 **张力场**; 如果 f 的张力场 $\tau(f)$ 处处为零, 则称 f 是 **调和映射**. 下面假设 N 是黎曼流形, 并以 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 N 上的黎曼度量, $\overline{\mathrm{D}}$ 是它的黎曼联络.

(2) 对于 M 上的任意局部标架场 $\{e_i\}$, 令

$$e(f)=\frac{1}{2}\sum_{ij}g^{ij}\langle f_*(e_i),f_*(e_j)\rangle.$$

易知, $e(f)$ 与标架场 $\{e_i\}$ 的取法无关, 从而确定了 M 上的一个非负光滑函数 $e(f)$, 称为映射 f 的 **能量密度**. 当 M 是紧致黎曼流形时, 积分 $E(f)=\int_M e(f)dV_M$ 称为光滑映射 f 的 **能量**. 证明: 映射 f 为调和映射的充分必要条件是对于任意的紧致子集 $G\subset M$, 以及 f 在 G 上的任意一个具有固定边界的变分 $F:G\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to N$, $f|_G$ 是能量泛函 $E(u)=E(f_u)$ 的临界点, 其中映射 $f_u:G\to N$ 由 $f_u(p)=F(p,u)$ 确定, 满足条件 $f_u|_{\partial G}=f|_{\partial G}$.

(3) 设 $f:M\to N$ 是等距浸入, 则作为 N 的黎曼子流形, (M,f) 具有第二基本形式 h 和平均曲率向量 H. 试给出两种第二基本形式 B_f 和 h 之间的关系, 并证明: $\tau(f)=mH$. 因此, 一个等距浸入 $f:M\to N$ 是极小浸入当且仅当 f 是调和映射.

37. 设 $(N,\bar g)$ 是具有正 Ricci 曲率的黎曼流形, $f:M\to N$ 是 N 中的极小浸入超曲面. 证明: 如果 M 是紧致可定向的, 则 f 不是稳定的.

38. 设 $S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 是单位球面. 证明: 在 S^n 中不存在紧致无边的稳定极小子流形.

习题解答和提示

习 题 一

2. 利用多元函数求导的链式法则. 为说明局部坐标变换的 Jacobi 行列式恒不为零, 可以在本题结论中取 $(W,\chi;z^i)=(U,\varphi;x^i)$.

3. 取定 M 的一个定向 $\mathscr{W}_1=\{(U_\alpha,x^i_\alpha);\alpha\in I\}$. 由 $\mathscr{W}_1$ 可以构造出另一族局部坐标系 $\mathscr{W}_2=\{(U_\alpha;y^i_\alpha);\alpha\in I\}$, 其中对于任意的 $\alpha\in I$, $(y^1_\alpha,y^2_\alpha,\cdots,y^m_\alpha)=(-x^1_\alpha,x^2_\alpha,\cdots,x^m_\alpha)$. 可以验证, $\mathscr{W}_2$ 是 M 的一个不同于 $\mathscr{W}_1$ 的定向. 由于 M 是连通的, 每一点 $q\in M$ 都可以用分段光滑曲线与固定点 p 连接起来; 而 M 是可定向的, 因而 M 的任意一个定向在 T_qM 上给出的定向是由 T_pM 的定向唯一确定的. 然而 T_pM 的定向只有两种, 所以 M 的定向只有两个.

5. (1) 由正则曲面的定义, 适当缩小 D 后, 可使 $(U\cap S;u,v)$ 构成 S 的一个局部坐标系. 根据反函数定理, 可以证明这样得到的局部坐标系是 C^∞- 相关的.

(2) 圆环面 $(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2=r^2\,(0<r<R)$ 可以表示为以下四个正则参数曲面之像的并集:

$$S_1:\boldsymbol{r}=((R+r\cos\varphi)\cos\theta,(R+r\cos\varphi)\sin\theta,r\sin\varphi),$$
$$0<\varphi<2\pi,\ 0<\theta<2\pi;$$
$$S_2:\boldsymbol{r}=((R+r\cos\varphi)\cos\theta,(R+r\cos\varphi)\sin\theta,r\sin\varphi),$$
$$0<\varphi<2\pi,\ -\pi<\theta<\pi;$$
$$S_3:\boldsymbol{r}=((R+r\cos\varphi)\cos\theta,(R+r\cos\varphi)\sin\theta,r\sin\varphi),$$
$$-\pi<\varphi<\pi,\ 0<\theta<2\pi;$$
$$S_4:\boldsymbol{r}=((R+r\cos\varphi)\cos\theta,(R+r\cos\varphi)\sin\theta,r\sin\varphi),$$
$$-\pi<\varphi<\pi,\ -\pi<\theta<\pi.$$

6. (1) 定义 $\mathbb{C}P^n$ 的一个开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha;\ 1\le\alpha\ge n+1\}$ 如下:

$$U_\alpha=\{(z^1,\cdots,z^{n+1})\in\mathbb{C}^{n+1};\ z^\alpha\neq 0\},\quad 1\le\alpha\le n+1.$$

则 $\mathscr{U}$ 是 CP^n 的一个覆盖. 对于每一个 α, 定义映射 $\varphi_\alpha: U_\alpha \to \mathbb{R}^{2n}$, 使得

$$\begin{aligned}(u_\alpha^1, \cdots, u_\alpha^n, v_\alpha^1, \cdots, v_\alpha^n) &= \varphi_\alpha([(z^1, \cdots, z^{n+1})]) \\ &= \left(\mathrm{Re}\left(\frac{z^1}{z^\alpha}\right), \cdots, \mathrm{Re}\left(\frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha}\right), \mathrm{Re}\left(\frac{z^{\alpha+1}}{z^\alpha}\right),\right. \\ &\qquad \cdots, \mathrm{Re}\left(\frac{z^{n+1}}{z^\alpha}\right), \mathrm{Im}\left(\frac{z^1}{z^\alpha}\right), \cdots, \mathrm{Im}\left(\frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha}\right), \\ &\qquad \left.\mathrm{Im}\left(\frac{z^{\alpha+1}}{z^\alpha}\right), \cdots, \mathrm{Im}\left(\frac{z^{n+1}}{z^\alpha}\right)\right).\end{aligned}$$

可以验证, 每一个 φ_α 都是从 U_α 到 $\mathbb{R}^{2n}$ 的双射, 通过它们可以建立 CP^n 上的拓扑结构, 使得所有的映射 $\varphi_\alpha: U_\alpha \to \mathbb{R}^{2n}$ 都是同胚, 并且 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha; u_\alpha^i, v_\alpha^i); 1 \le \alpha \le n+1\}$ 还是 $C^\infty(M)$ 相关的, 因而确定了 CP^n 上的一个光滑流形结构. 此外, 对于任意的 α, 自然投影 π 在 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上的局部坐标表示是

$$\pi(z^1, \cdots, z^{n+1}) = \left(\frac{z^1}{z^\alpha}, \cdots, \frac{\widehat{z^\alpha}}{z^\alpha}, \cdots, \frac{z^{n+1}}{z^\alpha}\right).$$

因此, π 是光滑映射.

(2) 先说明映射 $\tilde\pi: S^{2n+1} \to CP^n$ 是一个满射. 由于 $\tilde\pi = \pi|_{S^{2n+1}}$, 对于任意的点 $p \in S^{2n+1}$,

$$\tilde\pi^{-1}([p]) = \{e^{\sqrt{-1}\theta} \cdot p; \ \theta \in [0, 2\pi]\} \cong S^1,$$

$$\ker \tilde\pi_* = T_pS^{2n+1} \cap \ker \pi_* = T_p\tilde\pi^{-1}([p]).$$

于是 $\dim \ker \tilde\pi_* = 1$. 所以映射 $\tilde\pi$ 的秩处处等于 CP^n 的维数, 因而是一个淹没.

7. 可以验证, $\sigma(S^2) \subset S^2$, $\sigma^2 = \mathrm{id}_{S^2}$. 令 $\tilde\sigma = \sigma|_{S^2}$, 则 $\tilde\sigma$ 可逆且有 $\tilde\sigma^{-1} = \tilde\sigma$. 适当选取 S^2 的局部坐标系, 利用 $\tilde\sigma$ 的局部坐标表示说明 $\tilde\sigma$ 是光滑映射.

8. 参看参考文献 [3, 第 18~19 页]. 另一个证明方法是利用压缩映射定理, 其体的作法可以参阅参考文献 [14, 第 42~46 页], 或 [6, 第 8~12 页].

9. 利用微分流形的局部欧氏性质, 可以通过局部坐标映射把问题转化为欧氏空间的情形, 然后利用本章习题第 8 题的结论.

10. 本题的证明可以参阅参考文献 [14, 第 47~49 页] 或参考文献 [6, 第 14~16 页].

11. 结论的第一部分请参阅参考文献 [3, 第一章习题 26 的提示](见该书的第 343~344 页). 此外, 采用上述映射 f 的存在性不难说明, 本题结论对于一般的 $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ 也是成立的, 证明的细节可以参阅参考文献 [34, 第 65~66 页].

12. 利用本章习题第 11 题在 $\mathbb{R}^n$ 情形的结果, 先证明: 若 (U, φ) 是 M 的一个坐标卡, 则对于任意的两点 $p, q \in U$, 存在光滑同胚 $f: M \to M$, 使得 $f(p) = q$. 然后利用 M 的连通性证明上述结论对于任意的 $p, q \in M$ 均成立.

13. CP^1 可以用两个局部坐标卡 (U_1, φ_1) 和 (U_2, φ_2) 覆盖 (参看本章习题第 6(1) 题的解答), 其中

$$U_1 = \{[(z^1, z^2)]; \ z^1 \ne 0\}, \quad U_2 = \{[(z^1, z^2)]; \ z^2 \ne 0\},$$

$$(u^1, u^2) = \varphi_1([(z^1, z^2)]) = \left(\frac{x^1x^2 + y^1y^2}{(x^1)^2 + (y^1)^2}, \frac{x^1y^2 - x^2y^1}{(x^1)^2 + (y^1)^2}\right),$$

$$(v^1, v^2) = \varphi_2([(z^1, z^2)]) = \left(\frac{x^1x^2 + y^1y^2}{(x^2)^2 + (y^2)^2}, \frac{x^2y^1 - x^1y^2}{(x^2)^2 + (y^2)^2}\right),$$

其中 $z^1 = x^1 + \sqrt{-1}\,y^1$, $z^2 = x^2 + \sqrt{-1}\,y^2$. 则 φ_1 和 φ_2 分别是从 U_1 和 U_2 到 $\mathbb{R}^2$ 的微分同胚. 另一方面, 利用 2 维单位球面 $S^2 = \{(\tilde x^1, \tilde x^2, \tilde x^3) \subset \mathbb{R}^3; \ (\tilde x^1)^2 + (\tilde x^2)^2 + (\tilde x^3)^2 = 1\}$ 关于南北极的球极投影 (参看本章习题第 4 题), 可以定义 S^2 上的两个局部坐标覆盖 $(U_+, \tilde\varphi_+)$ 和 (U_-, φ_-), 使得

$$U_+ = S^2 \backslash \{(0, 0, -1)\}, \quad U_- = S^2 \backslash \{(0, 0, 1)\},$$

$$(\tilde u^1, \tilde u^2) = \tilde\varphi_-(\tilde x^1, \tilde x^2, \tilde x^3) = \left(\frac{\tilde x^1}{1 + \tilde x^3}, -\frac{\tilde x^2}{1 + \tilde x^3}\right),$$

$$(\tilde v^1, \tilde v^2) = \varphi_-(\tilde x^1, \tilde x^2, \tilde x^3) = \left(\frac{\tilde x^1}{1 - \tilde x^3}, \frac{\tilde x^2}{1 - \tilde x^3}\right).$$

其中 $\tilde\varphi_+$ 是球极投影 $\varphi_+: U_+ \to \mathbb{R}^2$ 和 $\tilde u^2$ 轴的对称变换的复合映射. 显然,

$$\varphi_1(U_1) = \tilde\varphi_+(U_+) = \varphi_2(U_2) = \varphi_-(U_-) = \mathbb{R}^2.$$

容易算出 $\tilde\varphi_+$ 和 φ_- 的逆映射分别为

$\tilde\varphi_+^{-1}(\tilde u^1, \tilde u^2)$

$$= \left(\frac{2\tilde{u}^1}{1+(\tilde{u}^1)^2+(\tilde{u}^2)^2}, -\frac{2\tilde{u}^2}{1+(\tilde{u}^1)^2+(\tilde{u}^2)^2}, \frac{1-(\tilde{u}^1)^2-(\tilde{u}^2)^2}{1+(\tilde{u}^1)^2+(\tilde{u}^2)^2} \right),$$

$$\varphi_-^{-1}(\tilde{v}^1, \tilde{v}^2)$$
$$= \left(\frac{2\tilde{v}^1}{1+(\tilde{v}^1)^2+(\tilde{v}^2)^2}, \frac{2\tilde{v}^2}{1+(\tilde{v}^1)^2+(\tilde{v}^2)^2}, \frac{(\tilde{v}^1)^2+(\tilde{v}^2)^2-1}{1+(\tilde{v}^1)^2+(\tilde{v}^2)^2} \right).$$

建立两个映射

$$\psi_1 : U_1 \to U_+, \quad \psi_2 : U_2 \to U_-,$$

使得

$$\psi_1 = \varphi_+^{-1} \circ \varphi_1, \quad \psi_2 = \varphi_-^{-1} \circ \varphi_2,$$

则 ψ_1 和 ψ_2 都是微分同胚. 可以验证,

$$\psi_1|_{U_1 \cap U_2} = \psi_2|_{U_1 \cap U_2}.$$

因此, 可以把 ψ_1 和 ψ_2 拼接起来得到 CP^1 和 S^2 之间的微分同胚 $\psi : CP^1 \to S^2$. 通过直接计算不难得到映射 ψ 的具体表达式为 $\psi([(z^1, z^2)]) = (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$, 其中

$$\tilde{x}^1 = \frac{2(x^1x^2 + y^1y^2)}{(x^1)^2+(y^1)^2+(x^2)^2+(y^2)^2},$$

$$\tilde{x}^2 = \frac{2(y^1x^2 - x^1y^2)}{(x^1)^2+(y^1)^2+(x^2)^2+(y^2)^2},$$

$$\tilde{x}^3 = \frac{(x^1)^2+(y^1)^2-(x^2)^2-(y^2)^2}{(x^1)^2+(y^1)^2+(x^2)^2+(y^2)^2}.$$

14. $\forall t \in (-\delta, \delta), p \in U$, 令

$$g(t, p) = \int_0^1 \left. \frac{\partial f(u, p)}{\partial u} \right|_{u=ts} ds.$$

15. (充分性) 设 $(U, \varphi; x^i) \in \mathscr{A}$, $(V, \psi; y^i) \in \mathscr{A}'$. 根据定理 3.3, 可以证明每一个 x^i 关于 $\mathscr{A}'$ 都是 $U \cap V$ 上的光滑函数, 因而有 $\varphi \circ \psi^{-1} \in C^\infty$. 同理, $\psi \circ \varphi^{-1} \in C^\infty$. 所以 $(U; x^i)$ 和 $(V; y^i)$ 是 C^∞ 相关的. 由 $(V; y^i)$ 的任意性, $(U; x^i) \in \mathscr{A}'$. 因此, $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}'$. 同理可证 $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$.

16. 参看参考文献 [3, 第 62~64 页].

17. 不妨设 $A \neq \emptyset$. 则存在开覆盖 $\{M\backslash A, M\backslash B\}$ 的两个局部有限的开加细 $\Sigma_1 = \{V_\alpha; \alpha \in I\}$ 和 $\Sigma_2 = \{U_\alpha; \alpha \in I\}$, 使得对于任意的 $\alpha \in I$, $\overline{V}_\alpha$ 是紧集并且 $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$. 定义 I 的子集 $I_1 = \{\alpha \in I; U_\alpha \subset M\backslash B\}$. 则当 $\alpha \notin I_1$ 时, 必有 $U_\alpha \cap (M\backslash B) = \emptyset$, 因而有 $U_\alpha \cap A = \emptyset$. 由此可知 $I_1 \neq \emptyset$. 根据引理 3.2, 对于任意的 $\alpha \in I_1$, 存在 $h_\alpha \in C^\infty(M)$, 满足 $h_\alpha|_{V_\alpha} \equiv 1$, $0 \leq h_\alpha \leq 1$, 并且 $h_\alpha|_{M\backslash U_\alpha} \equiv 0$. 根据覆盖 Σ_2 的局部有限性, 函数 $f = \prod_{\alpha \in I_1} (1 - h_\alpha)$ 是在 M 上处处有定义的光滑函数. 令 $F = 1 - f$, 则 F 是 M 上的光滑函数并且满足题目的要求.

18. 由乘积拓扑和 α_1, α_2 的定义容易证明 $\alpha_i : M_i \to M (i = 1, 2)$ 都是嵌入. 再说明

$$\alpha_{1*}(T_pM_1) \cap \alpha_{2*}(T_qM_2) = \{0\}$$

并利用

$$\dim(T_{(p,q)}M) = \dim(\alpha_{1*}(T_pM_1)) + \dim(\alpha_{2*}(T_qM_2)).$$

19. 先说明映射 f 在每一个局部坐标邻域内是常值映射, 然后利用 M 的连通性.

20. 由于

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = -e^{x_2} < 0,$$

f 处处是浸入, 因而是局部光滑同胚. 易知映射 f 还是可逆的, 其逆映射 f^{-1} 具有如下的表达式:

$$x_1 = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}(y_2 - y_1)}(y_1 + y_2), \quad x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2).$$

此外, f_* 和 f^* 在自然基底下的矩阵是映射 f 的 Jacobi 矩阵 $J_{x;y}$ 和该矩阵的转置, 其中

$$J_{x;y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x_2} & x_1e^{x_2} + 1 \\ e^{x_2} & x_1e^{x_2} - 1 \end{pmatrix}.$$

23. 根据秩定理 (定理 2.4), 可以把 f 的局部表示化为欧氏空间中的开集到坐标面的投影. 由此说明 f 把内点映射为内点.

24. 利用本章习题第 23 题的结论和 $\mathbb{R}^m$ 的连通性和非紧性.

25. 参阅参考文献 [3, 定理 4.4, 第 86 页].

26. (2) 在由 (1) 所给出的局部坐标系下, π_1 和 π_2 的局部表示是欧氏空间到坐标面的投影.

(3) 包含映射 $i: T^n \to \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ 关于相对拓扑是同胚. 对于任意的 $p = (z_0^1, \cdots, z_0^n) \in T^n$, 取正数 $\varepsilon < 1$, 并设

$$\tilde{U}_p = \{((1+r_1)e^{\sqrt{-1}\theta_1} z_0^1, \cdots, (1+r_n)e^{\sqrt{-1}\theta_n} z_0^n);$$
$$-\varepsilon < r_i, \theta < \varepsilon, 1 \le i \le n\}.$$

定义映射 $\psi_p: \tilde{U}_p \to \mathbb{R}^{2n}$, 使得

$$\psi_p((1+r_1)e^{\sqrt{-1}\theta_1} z_0^1, \cdots, (1+r_n)e^{\sqrt{-1}\theta_n} z_0^n)$$
$$= (\theta_1, \cdots, \theta_n, r_1, \cdots, r_n).$$

容易看出, $(\tilde{U}_p, \psi_p)$ 是 p 点在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的一个局部坐标系, 且有 $\psi_p(p) = (0, \cdots, 0)$. 如果令 $U_p = \tilde{U}_p \cap T^n$, 那么

$$U_p = \{(e^{\sqrt{-1}\theta_1} z_0^1, \cdots, e^{\sqrt{-1}\theta_n} z_0^n); -\varepsilon < \theta_i < \varepsilon, 1 \le i \le n\}.$$

再定义映射 $\varphi_p: U_p \to \mathbb{R}^n$, 使得

$$\varphi_p(e^{\sqrt{-1}\theta_1} z_0^1, \cdots, e^{\sqrt{-1}\theta_n} z_0^n) = (\theta_1, \cdots, \theta_n).$$

那么 (U_p, φ_p) 就是 T^n 在点 p 的一个局部坐标卡. 可以验证, $\mathscr{A}_0 = \{(U_p, \varphi_p); p \in T^n\}$ 是 T^n 上的一个 C^∞ 相关的坐标卡集, 因而确定了 T^n 上的一个光滑结构. 包含映射 i 关于局部坐标卡 (U_p, φ_p) 和 $(\tilde{U}_p, \psi_p)$ 的局部表示为

$$\tilde{i} = \psi_p \circ i \circ \varphi_p^{-1}: (\theta_1, \cdots, \theta_n) \mapsto (\theta_1, \cdots, \theta_n, 0, \cdots, 0).$$

因此, 映射 i 在任意点 p 附近是光滑浸入因而是一个嵌入. 所以 T^n 是 $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ 的嵌入子流形. 最后, 根据 T^n 上的微分结构的构造可以看出, 微分流形 T^n 实际上就是 n 个圆周的直积, 即 $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\text{ 个}}$.

27. 参阅参考文献 [14, 引理 6.7, 第 83 页].

28. 参阅参考文献 [14, 定理 5.8, 第 79 页].

29. 设 $\dim M = m$, $\dim N = n$, 则由假设, $\operatorname{rank}_p F = m$. 再由映射的连续性, F 在点 p 的一个开邻域内的秩恒为 m. 根据映射的秩定理, 存在点 p 在 M 中的一个局部坐标系 $(U, \varphi; x^i)$ 和点 $f(p)$ 在 N 中的局部坐标系 $(V, \psi; y^\alpha)$, 满足

$$F(U) \subset V, \quad x^i(p) = 0, \quad y^\alpha(F(p)) = 0,$$

并且

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x^1, \cdots, x^m) = (x^1, \cdots, x^m, 0, \cdots, 0).$$

因此, $\tilde{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开子集 $\varphi(U)$ 到 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集 $\psi(V)$ 内的嵌入, 因而

$$F|_U = \psi^{-1} \circ \tilde{F} \circ \varphi: U \to V \subset N$$

是嵌入映射.

30. 将 M 和 $\varphi(M)$ 等同起来, 则嵌入子流形 $\varphi: M \to N$ 化为包含 $i: M \to N$. 利用嵌入子流形的典型局部坐标系 (参看本章习题第 25 题), 可以将光滑函数 g 光滑地扩充到 p 点在 N 中的一个开邻域 U_p 上, 从而得到函数 $\tilde{g}_p \in C^\infty(U_p)$, 满足 $\tilde{g}_p|_{U_p \cap M} = g|_{U_p \cap M}$. 由假设, M 是 N 的闭子集, 因而 $U_0 = N \backslash M$ 是 N 的开集, 并且 $\{U_0, U_p;\ p \in M\}$ 是 N 的一个开覆盖. 如果定义 U_0 上的光滑函数 $g_0 = 0$, 则利用单位分解定理, 容易从 $\{g_0, \tilde{g}_p; p \in M\}$ 构造出 N 上的光滑函数 $\tilde{g}$, 使得 $\tilde{g}|_M = g$.

31. 由于 φ 是一一的, 通过映射 φ 可以把 M 的微分结构移植到 $\varphi(M)$. 根据定理 4.4, φ 在局部上是嵌入. 利用条件 $\dim M = \dim N$ 容易证明 φ 是局部光滑同胚. 由此易知 $\varphi(M)$ 是 N 的一个开子流形.

32. 分别取点 p 和 $f(p)$ 的局部坐标系 $(U; x^i)$ 和 $(V; y^\alpha)$, 使得 $f(U) \subset V$, 并且 $x^i(p) = 0$, $y^\alpha(f(p)) = 0$. 设曲线 γ 的局部坐标方程为 $x^i = x^i(t)$, 则有 $x^i(0) = 0$, $\frac{dx^i}{dt} = v^i$, 其中 v^i 由 $v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ 确定. 如果令 $y^\alpha(t) = y^\alpha \circ f \circ \gamma(t)$, 则 $y^\alpha = y^\alpha(t)$ 是曲线 $f \circ \gamma$ 的局部坐标方程. 由定

义,

$$(f\circ\gamma)'(0)=\frac{\mathrm{d}y^\alpha}{\mathrm{d}t}(0)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\Big|_{f(p)}=\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}(0)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\Big|_{f(p)}$$
$$=\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}v^i\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\Big|_{f(p)},$$

其右端与曲线 γ 的取法无关.

33. 作为欧氏空间之间的映射, α 的可微性等价于其分量的可微性. 显然函数 $t\mapsto|t|$ 在点 $t=0$ 处是不可微的.

34. 映射 α 在点 $t=0$ 处的秩为 0.

35. 映射 α 显然是光滑的. 通过计算, 容易知道, $\operatorname{rank}\alpha\equiv 1=\dim\mathbb{R}$, 因而 α 是一个浸入. 但是 $\alpha(\pm 2)=(0,0)$, 故 α 不是单浸入, 因而不是嵌入.

36. 由定义可以看出, 映射 α 是一一的光滑映射, 并且 $\alpha'(t)$ 处处不为零. 因此, α 是一个单浸入. 当 $t\in(1,3)$ 时, 区间 $(1,3)$ 是点 t 的开邻域, 但是相对于诱导拓扑, $f((1,3))$ 却不是点 $f(t)$ 在 $f((0,3))$ 中的开邻域. 可见, 相对于 $\mathbb{R}^2$ 在 $f((0,3))$ 上的诱导拓扑, α 不是从 $(0,3)$ 到 $f((0,3))\subset\mathbb{R}^2$ 的同胚映射, 因而不是嵌入.

37. 任意选取 $\delta=\{\delta_i\}\in L(V)$. 由 δ 可以作出 $L(V)$ 的另一个元素 $\tilde{\delta}=\{\tilde{\delta}_i\}$, 其中 $\tilde{\delta}_1=-\delta_1$, $\tilde{\delta}_i=\delta_i(i=2,\cdots,m)$. 若设 $\tilde{\delta}=\delta\cdot a$, 则显然有 $\det(a)<0$. 所以 $[\delta]$ 和 $[\tilde{\delta}]$ 是 V 上的两不同的定向. 下面证明 V 上只有这两个定向. 为此, 设 $[\delta']$ 是 V 上的任意一个定向, $\delta'\in L(V)$, 并且 $\delta'=\delta\cdot b$. 于是有 $\delta'=(\tilde{\delta}\cdot a^{-1})\cdot b=\tilde{\delta}\cdot(a^{-1}b)$. 如果 $[\delta']\neq[\delta]$, 则 $\det(b)<0$. 因为 $\det(a^{-1})=(\det(a))^{-1}<0$, 所以 $\det(a^{-1}b)=\det(a^{-1}b)=(\det(a))^{-1}\cdot\det b>0$. 因而有 $[\delta']=[\tilde{\delta}]$.

38. (必要性) M 的一个定向相符的坐标覆盖 $\mathscr{U}=\{(U_\alpha;x^i_\alpha);\alpha\in I\}$, 定义 M 上的定向分布 μ 如下: 对于任意的 $p\in M$, 可取 $\alpha\in I$, 使得 $p\in U_\alpha$. 令 $\mu_p=[\frac{\partial}{\partial x^1_\alpha}|_p,\cdots,\frac{\partial}{\partial x^m_\alpha}|_p]$. 说明: μ_p 是 M 上的一个连续的定向分布.
(充分性) 设 μ 是 M 上的一个连续的定向分布. 定义

$$\mathscr{U}=\{(U;x^i);\ (U;x^i)\text{是 } M \text{ 上的容许局部坐标系, 并且}$$
$$\text{对于任意的 } p\in U,\mu_p=[\tfrac{\partial}{\partial x^1}|_p,\cdots,\tfrac{\partial}{\partial x^m}|_p]\}.$$

根据连续定向分布的定义容易验证 $\mathscr{U}$ 满足定义 1.5 中的条件.

40. (必要性) 设 $X\in\mathfrak{X}(M)$, $f\in C^\infty(M)$. 对于任意的 $p\in M$, 取 p 点的局部坐标系 $(U;x^i)$, 并设 $X|_U=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, 则 $X^i\in C^\infty(U)$. 当 $q\in U$ 时, $(Xf)(q)=X^i(q)\frac{\partial f}{\partial x^i}(q)$, 即有 $X(f)|_U=X^i\frac{\partial f}{\partial x^i}$. 因为 $\frac{\partial f}{\partial x^i}\in C^\infty(U)$, 所以 $(Xf)|_U\in C^\infty(U)$. 特别地, 函数 Xf 在点 p 附近是光滑的. 由 p 点的任意性, $Xf\in C^\infty(M)$.
(充分性) 设 $(U;x^i)$ 是 M 上的任意一个局部坐标系, 并且 $X|_U=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$. 对于任意的 $p\in U$, 存在 p 点的开邻域 V, 使得 $\overline{V}$ 紧致, 并且 $\overline{V}\subset U$, 以及 $\tilde{x}^i\in C^\infty(M)$, 使得 $\tilde{x}^i|_V\equiv x^i|_V(1\leq i\leq\dim M)$. 于是有 $X^i|_V=(X|_U(x^i))|_V=(X(\tilde{x}^i))|_V\in C^\infty(V)$. 特别地, $X^i\in C^\infty_p$, 从而由点 $p\in U$ 的任意性, $X^i\subset C^\infty(U)$. 再由 $(U;x^i)$ 的任意性, $X\in\mathfrak{X}(M)$.

41. (1) 不难验证 f_*X 作为从 $C^\infty(N)$ 到 $C^\infty(N)$ 的映射满足定理 5.1 中的条件, 故 $f_*X\in\mathfrak{X}(N)$. 此外, 对于任意的 $p\in M$ 和 $g\in C^\infty_{f(p)}$,

$$((f_*X)(f(p)))(g)=((f_*X)(g))_{f(p)}=(X(g\circ f)f^{-1})_{(f(p))}$$
$$=(X(g\circ f))(p)=X_p(g\circ f)=f_{*p}(X(p)).$$

(2) 对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, $g\in C^\infty(N)$,

$$[f_*X,f_*Y](g)=(f_*X)(f_*Y)(g)-(f_*Y)(f_*X)(g)$$
$$=(f_*X)(Y(g\circ f))\circ f^{-1})-(f_*Y)((X(g\circ f))\circ f^{-1})$$
$$=X(Y(g\circ f))f^{-1}-Y(X(g\circ f))f^{-1}$$
$$=(XY(g\circ f)-YX(g\circ g))f^{-1}$$
$$=([X,Y](g\circ f))\circ f^{-1}=(f_*([X,Y]))(g).$$

43. 参阅参考文献 [14, 例 6.9 和例 6.10, 第 84 页], 并注意到 $SO(n)$ 是 $O(n)$ 的单位连通分支.

44. (1) 由乘积运算和求逆运算的光滑性易知左移动和右移动都是光滑的.
(2) 设 $X,Y\in\mathfrak{g}$ 是 G 上的左不变向量场. 对于任意的 $a\in G$, 因为 L_a 是光滑同胚, 所以 $(L_a)_*X,(L_a)_*Y\in\mathfrak{X}(G)$, 并且由本章习题第 41 题, $(L_a)_*([X,Y])=[(L_a)_*X,(L_a)_*Y]=[X,Y]$, 即 $[X,Y]$ 是左不变的. 所以

$\mathfrak{g}$ 关于 Poisson 括号积 $\{\cdot,\cdot\}$ 是封闭的, 因而由定理 5.2, $\mathfrak{g}$ 构成一个李代数. 定义映射 $F:\mathfrak{g}\to T_eG$, 使得对于任意的 $X\in\mathfrak{g}$, $F(X)=X|_e$. 易知 F 是一个双射. 因此可以在 T_eG 上引入乘法 $[\cdot,\cdot]$, 使得

$$[F(X),F(Y)]=[X_e,Y_e]=[X,Y]_e,\quad \forall X,Y\in\mathfrak{g}.$$

此时, T_eG 关于乘法 $[\cdot,\cdot]$ 构成一个李代数, 而 $F:\mathfrak{g}\to T_eG$ 则是李代数同构.

(4) 由例 1.2, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的开子流形, 它关于矩阵的乘法构成群. 因为矩阵的乘积和求逆运算分别是矩阵元素的多项式和有理分式, 它们都是光滑的, 所以 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 是一个李群. 利用本章习题第 27、第 28 和第 43 题的结论可以进一步说明 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$ 和 $\mathrm{SO}(n)$ 也是李群. 把一个李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 和 G 在单位元处的切空间 T_eG 等同起来, 那么, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 和 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ 的李代数分别是

$$\begin{aligned}\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})&=M(n,\mathbb{R})=\{\text{全体 } n \text{ 阶实数方阵}\};\\ \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})&=\{A\in M(n,\mathbb{R});\ \operatorname{tr}A=0\};\end{aligned}$$

同时, $\mathrm{O}(n)$ 和 $\mathrm{SO}(n)$ 的李代数是相同的:

$$\mathfrak{o}(n)=\mathfrak{so}(n)=\{A\in M(n,\mathbb{R});\ A+A^t=0\}.$$

上面各个李代数的乘法都是矩阵的普通乘法的交换子.

45. (1) 和 (2) 参阅参考文献 [3, 定理 3.6, 第 293~295 页]; 也可以参看第二章习题第 7(1) 题.
(3) 利用本章习题第 39 题.
(4) 参阅参考文献 [3, 定理 4.2, 第 303~304 页].

46. 利用本章习题第 43 题和第 44(4) 题.

48. 本题结论的证明可以参阅参考文献 [3, 定理 4.1, 第 147 页]. 方程 $Xu=f$ 在点 p 附近的解为 $u=\int f(x^1,\cdots,x^m)\mathrm{d}x^1$.

49. 由积分曲线的唯一性, 对于充分小的 s,t, 有 $\varphi(t,\varphi(s,p))=\varphi(t+s,p)$. 因此, 对于点 p_0 附近的点 p 和任意的 $f\in C^\infty(M)$,

$$(Xf)(p)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(f(\varphi(t,p))),$$

$$\begin{aligned}(X^2f)(p)&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}f(\varphi(t,\varphi(s,p)))\right)\\ &=\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s\mathrm{d}t}(f(\varphi(t+s,p)))\right|_{s=0,t=0}\\ &=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}f(\varphi(u,p))\right|_{u=0}=\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(\varphi(t,p))\right|_{t=0}.\end{aligned}$$

用归纳法证明等式

$$(X^kf)(p)=\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}f(\varphi(t,p))|_{t=0}.$$

再由一元函数的泰勒公式, 证明, 当 t 充分小时

$$f(\gamma(t^2))-f(p_0)=t^2([X,Y]f)(p_0)+o(t^2).$$

51. 根据定理 6.1, 只需验证以下两个事实:
(1) 对于任意的 $\alpha\in A^1(M)$, $X\in\mathfrak{X}(M)$ 有

$$\tilde{\varphi}(\alpha,X)\in C^\infty(M);$$

(2) 映射

$$\tilde{\varphi}:A^1(M)\times\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M)$$

是二重线性的.

53. 仿照定理 7.2 的证明方法, 把欲证等式的右端记作

$$\alpha(X_1,\cdots,X_r),$$

得到映射

$$\alpha:\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)}_{r+1\ \text{个}}\to C^\infty(M).$$

首先说明, α 是 $r+1$ 次外微分式, 因而只需要证明 $\mathrm{d}\omega$ 和 α 在任意一个局部坐标系 $(U;x^i)$ 下具有相同的表达式即可. 即证明等式

$$\mathrm{d}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_{r+1}}}\right)=\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_{r+1}}}\right).$$

本题还可以采用数学归纳的方法证明, 细节请参阅参考文献 [29, Vol.I, 第 36 页, 命题 3.11].

54. (3) 设 $X_1=X, X_2, \cdots, X_{r+s}\in\mathfrak{X}(M)$, 则

$$
\begin{aligned}
i(X)(\varphi\wedge\psi)(X_2,\cdots,X_{r+s}) &= \varphi\wedge\psi(X_1,X_2,\cdots,X_{r+s})\\
&=\frac{1}{r!s!}\delta_{1\cdots r+s}^{i_1\cdots i_{r+s}}\varphi(X_{i_1},\cdots,X_{i_r})\psi(X_{i_{r+1}},\cdots,X_{i_{r+s}})\\
&=\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_r\\ i_{r+1}<\cdots<i_{r+s}\\ \text{且 }(i_1\cdots i_{r+s})\text{ 是}\\ 1,\cdots,r+s\text{ 的排列}}}\delta_{1\cdots r+s}^{i_1\cdots i_{r+s}}\varphi(X_{i_1},\cdots,X_{i_r})\psi(X_{i_{r+1}},\cdots,X_{i_{r+s}})\\
&=\sum_{\substack{1<i_2<\cdots<i_r\\ i_{r+1}<\cdots<i_{r+s}\\ \text{且 }(i_2\cdots i_{r+s})\text{ 是}\\ 2,\cdots,r+s\text{ 的排列}}}\delta_{2\cdots r+s}^{i_2\cdots i_{r+s}}\varphi(X_1,X_{i_2},\cdots,X_{i_r})\psi(X_{i_{r+1}},\cdots,X_{i_{r+s}})\\
&\quad+\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_r\\ 1<i_{r+2}<\cdots<i_{r+s}\\ \text{且 }(i_1\cdots\widehat{i_{r+1}}\cdots i_{r+s})\\ \text{是 }2,\cdots,r+s\text{ 的排列}}}(-1)^r\delta_{2\cdots r+s}^{i_1\cdots\widehat{i_{r+1}}\cdots i_{r+s}}\varphi(X_{i_1},\cdots,X_{i_r})\cdot\\
&\qquad\cdot\psi(X_1,X_{i_{r+2}},\cdots,X_{i_{r+s}})\\
&=i(X_1)\varphi\wedge\psi(X_2,\cdots,X_{r+s})+(-1)^r\varphi\wedge i\psi(X_2,\cdots,X_{r+s}).
\end{aligned}
$$

因此

$$i(X)(\varphi\wedge\psi)=i(X)\varphi\wedge\psi+(-1)^r\varphi\wedge i(X)\psi.$$

55. (1) $f^*\varphi$ 显然是反对称的. 直接验证 $f^*\varphi$ 是多重 $C^\infty(M)$- 线性的即可.
(3) 对于任意的 $\varphi\in A^r(N)$, 在 M 和 N 的局部坐标系下分别写出 $d_M f^*\varphi$ 和 $f^*d_N\varphi$ 的表达式. 细节可以参阅参考文献 [3, 定理 2.4, 第 191 页].

56. (1) $\mathrm{d}\omega=-x\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-(1+z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$.
(2) $\mathrm{d}\eta=2yz\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$.
(3) $\mathrm{d}\omega\wedge\eta-\omega\wedge\mathrm{d}\eta=(2x^2-x(1+z)-2xy^2z-2z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$.
(4) $f^*\omega=(u^3v^2+6u^2+2uv-9u^3-3u^2v)\mathrm{d}u+(u^4v-3u^3-u^2v)\mathrm{d}v$,
$f^*\mathrm{d}\omega=(2u^3v-6u^2-2uv-2u)\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$.

57. (1) (必要性) 取 M 的一个定向 $\mathscr{W}=\{(U_\alpha;x_\alpha^i);\alpha\in\mathbb{N}\}$, 使得坐标覆盖 $\mathscr{W}$ 是局部有限的. 设 $\{g_\alpha\}$ 是从属于开覆盖 $\mathscr{W}$ 的一个单位分解, $\omega=\sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}}g_\alpha\mathrm{d}x_\alpha^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\alpha^m$, 其中对于任意的 $p\in M$,

$$g_\alpha\mathrm{d}x_\alpha^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\alpha^m(p)=\begin{cases}g_\alpha(p)\cdot\mathrm{d}x_\alpha^1|_p\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\alpha^m|_p, & p\in U_\alpha;\\ 0, & p\notin U_\alpha.\end{cases}$$

可以验证, ω 是 M 上大范围定义并且处处不为零的 m 次外微分式.
(充分性) 设 ω 是 M 上的一个处处不为零的 m 次外微分式. 定义一个由容许的局部坐标系构成集族

$$\mathscr{W}=\{(U;x^i);\ \omega|_U=\lambda\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m,\lambda>0\}.$$

可以验证, $\mathscr{W}$ 满足定义 1.5 中的两个条件, 因而 M 是可定向的.
(2) 利用李群 G 上的左移动构造出一个左不变的非零 m 次外微分式, 这里 $m=\dim G$.

59. 取点 p 的局部坐标系 $(U;x^i)$, 使得 $x^i(p)=0$. 令 $\omega_1=x^1\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{r+1}$. 则 $\mathrm{d}\omega_1=\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{r+1}$. 显然有 $\omega_1(p)=0$, $\mathrm{d}\omega_1(p)\neq0$. 根据引理 3.2 或直接利用本章习题第 58 题的结论, 把上述的 ω_1 扩充为 M 上的一个 r 次外微分式, 使得 ω 在点 p 的一个邻域 $V\subset U$ 上与 ω_1 恒等.

60. 令 $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$. 则 $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$, 且有 $\mathrm{d}f=\omega$.

61. $\mathrm{d}\omega=0$ 等价于 A,B,C 满足条件 $\dfrac{\partial A}{\partial x}+\dfrac{\partial B}{\partial y}+\dfrac{\partial C}{\partial z}=0$.

62. 取 $S^2(r_0)$ 的参数方程:

$$x=r_0\cos\theta\cos\varphi,\quad y=r_0\cos\theta\sin\varphi,\quad z=r_0\sin\theta,$$
$$-\pi/2\le\theta\le\pi/2,\quad 0\le\varphi\le2\pi.$$

则 $\omega|_{S^2(r_0)}=\cos\theta\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta$. 因此

$$\int_{S^2(r_0)}\omega=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\theta=4\pi.$$

63. (1) $\mathrm{d}\omega=\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{\partial f_i}{\partial x^i}\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$, 其中 $\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{\partial f_i}{\partial x^i}=(n-m)\|x\|^{-m}$.
(2) 由 (1) 即知, 当 $m=n$ 时, ω 是一个闭微分式.

(3) (反证法) 如果存在 $\varphi \in A^{n-2}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ 使得 $\omega = \mathrm{d}\varphi$, 那么, 在单位球面 $S^{n-1}(1)$ 上应用 Stokes 定理可知

$$\int_{S^{n-1}(1)} \omega = \int_{S^{n-1}(1)} \mathrm{d}\varphi = \int_{\partial S^{n-1}(1)} \varphi = 0.$$

另一方面, 可以证明积分 $\int_{S^{n-1}(1)} \omega$ 是球面 $S^{n-1}(1)$ 的体积, 不可能等于零, 这就得到了矛盾.

65. 2 次外微分式是非退化的当且仅当它在每一个局部余切标架场 $\{e^i\}$ 下的分量矩阵 A 是处处非奇异的, 而线性映射 I 在 $\{e_i\}$ 和 $\{e^i\}$ 下的矩阵正是 2 次外微分式 ω 在 $\{e^i\}$ 下的分量矩阵 A.

66. ω 显然是一个闭形式, 它在局部余切标架场 $\{\mathrm{d}x^i, \mathrm{d}y^i\}$ 下的非零分量是 $\omega_{i,m+i} = 1$. 因此, 相应的分量行列式处处不为零.

67. 设 $\pi : TM \to M$ 是丛投影. 任取 M 的一个局部坐标覆盖 $\mathscr{U} = \{(U_\alpha; x^i_\alpha); \alpha \in I\}$. 对于任意的 $\alpha \in I$, 令 $V_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$, 则得 TM 在 V_α 上的容许局部坐标系 $(V_\alpha; x^i_\alpha, y^i_\alpha)$, 使得对于任意的 $v \in V_\alpha$, v 的局部坐标 (x^i, y^i) 由 $v = y^i \left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_{(x^1,\cdots,x^m)}$ 确定. 显然, $\mathscr{V} = \{(V_\alpha; x^i_\alpha, y^i_\alpha); \alpha \in I\}$ 是 TM 的一个坐标覆盖, 并且对于任意的 $\alpha, \beta \in I$, 当 $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ 时, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 同时在 $V_\alpha \cap V_\beta$ 上成立

$$\frac{\partial(x^1_\alpha, \cdots, x^m_\alpha, y^1_\alpha, \cdots, y^m_\alpha)}{\partial(x^1_\beta, \cdots, x^m_\beta, y^1_\beta, \cdots, y^m_\beta)} = \left(\frac{\partial(x^1_\alpha, \cdots, x^m_\alpha)}{\partial(x^1_\beta, \cdots, x^m_\beta)}\right)^2 > 0.$$

69. 按照切向量场和向量丛截面的定义, M 上的切向量场和切丛 TM 的截面是一回事. 因此, 对于任意一个切向量场 (或等价地, TM 的任意一个截面) X, 只需要说明 X 作为切向量场的光滑性和作为映射 $X : M \to TM$ 的光滑性是一致的. 为此, 对于任意的点 $p \in M$, 取 M 在点 p 处的一个局部坐标系 $(U; x^i)$, 那么, $X_p = X(p)$ 在 TM 中的一个局部坐标系是 $(\pi^{-1}U; x^i, y^i)$, 其中 $\pi : TM \to M$ 是丛投影. 作为 M 到 TM 的映射, X 的局部坐标表示为

$$x^i = x^i, \ y^i = y^i \circ X = X^i, \ 1 \le i \le m,$$

其中的后 m 个函数恰好是 X 作为切向量场在自然标架场 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 下的分量, 即 $X|_U = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. 由此容易看出, X 作为映射 $X : M \to TM$ 的光滑性等价于它作为切向量场的光滑性.

70. 定义映射 $\pi : f^*TN \to M$, 使得对于任意的 $p \in M$, $\pi(\{p\} \times T_{f(p)}) = \{p\}$. 任意选取 N 的一族局部坐标系 $\mathscr{V} = \{(V_\alpha; y^\lambda); \alpha \in I\}$, 使得 $f(M) \subset \bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha$. 对于任意的点 $p \in M$, 存在点 p 的一局部坐标系 $(U_p; x^i_p)$ 以及 $\alpha \in I$, 满足 $U_p \subset U_\alpha$. 我们可以在 $\pi^{-1}U_p$ 上引入局部坐标系 (x^i_p, v^λ_p), 使得对于任意的 $(q, v) \in \pi^{-1}U$, (q, v) 的局部坐标 $(x^i_p(q, v), v^\lambda_p(q, v))$ 由 $x^i_p(q, v) = x^i_p(q)$, $v = v^\lambda_p(q, v)\frac{\partial}{\partial y^\lambda_\alpha}\big|_{f(q)}$ 确定. 验证, f^*TN 的局部坐标覆盖

$$\{(U_p; x^i_p, v^\lambda_p); p \in M\}$$

确定了 f^*TN 的一个光滑结构, 使之成为光滑流形. 对于任意的 $\alpha \in I$, 定义映射 $\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}U_\alpha$ 如下:

$$\psi_\alpha(p, v^\lambda) = \left(p, v^\lambda \left.\frac{\partial}{\partial y^\lambda_\alpha}\right|_{f(p)}\right), \ \forall p \in U_\alpha, \ (v^\lambda) \in \mathbb{R}^n.$$

那么, ψ_α 是光滑同胚; 并且, 以 $\{\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}U_\alpha; \alpha \in I\}$ 为局部平凡化结构即可使得 f^*TN 成为 M 上的一个秩为 $n = \dim N$ 的向量丛.

71. 要证明 E^* 是一个秩为 q 的向量丛, 关键是构造 M 上的一个坐标覆盖 $\{(U_\alpha; x^i_\alpha); \alpha \in I\}$, 使得 E^* 在每个 U_α 上存在局部截面 e^a_α, $1 \le a \le q$, 使得对于任意的 $p \in U_\alpha$, $\{e^a_\alpha(p)\}$ 是 $E^*_p = \pi^{-1}(p)$ 的基底.

72. T^*M 上的光滑结构由上一题给出. 按对偶丛的定义验证 T^*M 和 TM 是互为对偶向量丛.

73. 首先容易看出, M 上存在一个坐标覆盖 $\{U_\alpha; x^i_\alpha); \alpha \in I\}$, 使得对于任意的 $\alpha \in I$, E 和 $\tilde{E}$ 在 U_α 上存在光滑标架场 $\{e^{(\alpha)}_a\}$ 和 $\{f^{(\alpha)}_\lambda\}$. 由此可以定义映射 $\pi_1 : E \oplus \tilde{E} \to M$ 和 $\pi_2 : E_p \otimes \tilde{E} \to M$, 使得对于任意的 $p \in M$, $\pi_1(E_p \oplus \tilde{E}_p) = \{p\}$, $\pi_2(E \otimes \tilde{E}_p) = \{p\}$. 当 $\alpha \in I$ 时, 令

$$\psi_\alpha(p, v^a_\alpha, w^\lambda_\alpha) = \sum_a v^a_\alpha e^{(\alpha)}_a(p) + \sum_\lambda w^\lambda_\alpha f^{(\alpha)}_\lambda(p),$$

$$\tilde{\psi}_\alpha(p, v^{a\lambda}_\alpha) = \sum_{a,\lambda} v^{a\lambda}_\alpha e^{(\alpha)}_a(p) \otimes f^{(\alpha)}_\lambda(p),$$

$$\forall p \in U_\alpha,\ \forall(v_\alpha^a, w_\alpha^\lambda) \in \mathbb{R}^{q+\tilde{q}},\ \forall(v_\alpha^{a\lambda}) \in \mathbb{R}^{q\tilde{q}}.$$

则 $(\pi_1^{-1}U_\alpha; x_\alpha^i, v_\alpha^a, w_\alpha^\lambda)$ 和 $(\pi_2^{-1}U_\alpha; x_\alpha^i, v_\alpha^{a\lambda})$ 分别是 $E\oplus\tilde{E}$ 和 $E\otimes\tilde{E}$ 上的局部坐标系. 易知, 对于任意的 $\alpha,\beta\in I$,

$$(\pi_1^{-1}U_\alpha; x_\alpha^i, v_\alpha^a, w_\alpha^\lambda) \text{ 和 } (\pi_1^{-1}U_\beta; x_\beta^i, v_\beta^a, w_\beta^\lambda)$$

是 C^∞ 相关的,

$$(\pi_2^{-1}U_\alpha; x_\alpha^i, v_\alpha^{a\lambda}) \text{ 和 } (\pi_2^{-1}U_\beta; x_\beta^i, v_\beta^{a\lambda})$$

也是 C^∞ 相关的. 它们分别确定了 $E\oplus\tilde{E}$ 和 $E\otimes\tilde{E}$ 上的光滑结构. 同时可以验证映射族 $\{\psi_\alpha: U_\alpha\times\mathbb{R}^{q+\tilde{q}}\to\pi_1^{-1}U_\alpha; \alpha\in I\}$ 和 $\{\tilde{\psi}_\alpha: U_\alpha\times\mathbb{R}^{q\tilde{q}}\to\pi_2^{-1}U_\alpha; \alpha\in I\}$ 都满足定义 9.1 中的条件. 因而 $E\oplus\tilde{E}$ 和 $E\oplus\tilde{E}$ 和 $E\otimes\tilde{E}$ 都是 M 上的向量丛, 它们的秩分别是 $q+\tilde{q}$ 和 $q\tilde{q}$.

74. 设 $\dim M = m$, 令 $\bigwedge^r(T^*M) = \bigcup_{p\in M}\bigwedge^r(T_p^*M)$. 定义映射 $\pi:\bigwedge^r(T^*M)\to M$, 使得对于任意的 $p\in M$, $\pi(\bigwedge^r(T_p^*M)) = \{p\}$. 取 M 的一个坐标覆盖 $\{(U_\alpha; x_\alpha^i); \alpha\in I\}$, 则对于任意的 $\alpha\in I$, 可以建立映射 $\psi_\alpha: U_\alpha\times\mathbb{R}^{C_m^r}\to\pi^{-1}U_\alpha$, 满足

$$\psi_\alpha(p,(a_{i_1\cdots i_r})) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le m} a_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x_\alpha^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\alpha^{i_r}.$$

可以证明, $\{(U_\alpha; x_\alpha^i, a_{i_1\cdots i_r}); \alpha\in I\}$ 是 M 上的一个 C^∞ 相关的坐标覆盖因而确定了 $\bigwedge^r(T^*M)$ 上的一个光滑结构. 再验证, 映射族 $\{\psi_\alpha; \alpha\in I\}$ 满足定义 9.1 的条件.

75. 首先, 对于任意的 $(p,q)\in M = M_1\times M_2$, T_pM_1 和 T_qM_2 都可以视为向量空间 $T_{(p,q)}M$ 的子空间. 事实上, 对于任意的 $f\in C^\infty_{(p,q)}(M)$, 通过固定 q 的值, 我们可以把 f 看作是 M_1 上定义于点 p 附近的光滑函数 $f(\cdot,q)$. 因此, 对于任意的 $v\in T_pM_1$, 它可以视为 $T_{(p,q)}M$ 中由 $f\mapsto v(f) = v(f(\cdot,q))$ 所确定的切向量, 因而 T_pM_1 可以视为 $T_{(p,q)}M$ 的一个子空间, 即有 $T_pM_1\subset T_{(p,q)}M$. 同理, $T_qM_2\subset T_{(p,q)}M$. 此外, 不难看出, 作为 $T_{(p,q)}M$ 的线性子空间, $T_pM_1\cap T_qM_2 = \{0\}$. 结合等式 $\dim T_{(p,q)}M = \dim T_pM_1 + \dim T_qM_2$ 便知 $T_{(p,q)}M = T_pM_1\oplus T_qM_2$(参看本章习题第 18 题). 在此意义下, 可以定义映射 $\Phi: TM\to\pi_1^*(TM_1)\oplus\pi_2^*(TM_2)$ 如下:

$$\Phi(v_1+v_2) = ((p,q),v_1) + ((p,q),v_2), \quad \forall v_1\in T_pM_1, v_2\in T_qM_2,$$
$$\forall(p,q)\in M = M_1\times M_2.$$

根据拉回丛 $\pi_1^*(TM_1)$ 和 $\pi_2^*(TM_2)$ 的构造以及向量丛直和的定义, 不难证明, 映射 Φ 是向量丛 TM 到 $\pi_1^*(TM_1)\oplus\pi_2^*(TM_2)$ 的同构.

76. 设 $\pi: T^*M\to M$ 是丛投影, $\dim M = m$. 任取 M 的一个局部坐标覆盖 $\{(U_\alpha; x_\alpha^i); \alpha\in I\}$, 则有 T^*M 上的局部平凡化结构 $\{\psi_\alpha: U_\alpha\times\mathbb{R}^m\to\pi^{-1}U_\alpha\}$, 其中对于任意的 $p\in U_\alpha$, $(v_{(\alpha)i})\in\mathbb{R}^m$, $\psi_\alpha(p,v_{(\alpha)i}) = \sum_i v_{(\alpha)i}\mathrm{d}x_\alpha^i$; 同时 $\{\pi^{-1}U_\alpha; x_\alpha^i, v_{(\alpha)i}); \alpha\in I\}$ 是 T^*M 上的一个局部坐标覆盖. 对于每一个 $\alpha\in I$, 令 $\omega_\alpha = \sum_i \mathrm{d}x_\alpha^i\wedge\mathrm{d}v_{(\alpha)i}$. 当 $\alpha,\beta\in I$ 并且 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ 时, 有

$$v_{(\beta)i} = v_{(\alpha)j}\frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^i},$$

从而

$$\mathrm{d}x_\beta^i = \frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j}\mathrm{d}x_\alpha^j,\ \mathrm{d}v_{(\beta)i} = \frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^i}\mathrm{d}v_{(\alpha)j} + v_{(\alpha)j}\mathrm{d}\left(\frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^i}\right).$$

于是在 $\pi^{-1}(U_\alpha)\cap\pi^{-1}(U_\beta)$ 上,

$$\begin{aligned}\sum_i \mathrm{d}x_\beta^i\wedge\mathrm{d}v_{(\beta)i} =& \frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j}\mathrm{d}x_\alpha^j\wedge\left(\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^i}\mathrm{d}v_{(\alpha)k}\right.\\ &\left.+v_{(\alpha)k}\frac{\partial}{\partial x_\alpha^l}\left(\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^i}\right)\mathrm{d}x_\alpha^l\right)\\ =&\frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j}\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^i}\mathrm{d}x_\alpha^j\wedge\mathrm{d}v_{(\alpha)k}\\ &+v_{(\alpha)j}\frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^k}\cdot\frac{\partial^2 x_\alpha^k}{\partial x_\beta^p\partial x_\beta^i}\cdot\frac{\partial x_\beta^p}{\partial x_\alpha^l}\mathrm{d}x_\alpha^j\wedge\mathrm{d}x_\alpha^l\\ =&\mathrm{d}x_\alpha^j\wedge\mathrm{d}v_{(\alpha)j},\end{aligned}$$

其中的第二个等式利用了

$$\frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j}\cdot\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^i} = \delta_j^k$$

和系数

$$v_{(\alpha)k}\frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j}\cdot\frac{\partial^2 x_\alpha^k}{\partial x_\beta^p\partial x_\beta^r}\cdot\frac{\partial x_\beta^r}{\partial x_\alpha^l}$$

关于指标 j, l 的对称性. 这说明, 在 $\pi^{-1}(U_\alpha)\cap\pi^{-1}(U_\beta)$ 上恒成立 $\omega_\alpha=\omega_\beta$. 因此, 局部定义的 2 次外微分式 $\{\omega_\alpha;\alpha\in I\}$ 确定了 T^*M 上的一个整体定义的 2 次外微分式 ω, 使得对于任意的 $\alpha\in I$, $\omega|_{\pi^{-1}U_\alpha}=\omega_\alpha$. 显然 ω 是一个非退化的 2 次闭微分式.

77. 线性空间 T_pM 上的线性变换可以看作是 M 在点 p 的一个 $(1,1)$ 型张量, 反之亦然. 由此易知, $L(p)=T_pM\otimes T_p^*M$. 如果 $\{e_i\}$ 是 T_pM 的一个基, $\{\omega^i\}$ 是它的对偶基, 则可以证明 $\{e_i\otimes\omega^j;1\le i,j\le m\}$ 是 $L(p)$ 的一个基. 取 M 的一个坐标覆盖 $\{(U_\alpha;x^i);\alpha\in I\}$, 利用 $\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\otimes dx_\alpha^j;1\le i,j\le m\}$ 可以定义映射 $\psi_\alpha:U_\alpha\times\mathbb{R}^{m^2}\to\pi^{-1}U_\alpha$, 使得对于任意的 $p\in U_\alpha$, $(a_j^i)\in\mathbb{R}^{m^2}$, $\psi_\alpha(p,a_j^i)=a_j^i\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\otimes dx_\alpha^j$. 以 $\{(\pi^{-1}U_\alpha;x_\alpha^i,a_j^i);\alpha\in I\}$ 为一个坐标覆盖, 可以在 $L(M)$ 上确定一个光滑结构使之成为 $m(m+1)$ 维光滑流形. 容易验证, 映射族 $\{\psi_\alpha;\alpha\in I\}$ 满足向量丛定义 9.1 中的条件. 故 $L(M)$ 是一个秩为 m^2 的向量丛. 同时, 上面的构造方法也说明了 $L(M)$ 正是 $(1,1)$ 型张量丛 $T_1^1(M)=TM\otimes T^*M$.

78. 采用例 1.6 中的记号, 令 $V_\alpha=\{[(x^1,\cdots,x^{n+1})]\in\mathbb{R}P^n;\ x^\alpha\neq 0\}$, $1\le\alpha\le n+1$. 定义映射 $\psi_\alpha:V_\alpha\times\mathbb{R}\to\pi^{-1}(U_\alpha)$, 使得

$$\psi_\alpha([(x^1,\cdots,x^{n+1})],\lambda)=\lambda\left(\frac{x^1}{x^\alpha},\cdots,\frac{x^{\alpha-1}}{x^\alpha},1,\frac{x^{\alpha+1}}{x^\alpha},\cdots,\frac{x^{n+1}}{x^\alpha}\right),$$
$$\forall[(x^1,\cdots,x^{n+1})]\in V_\alpha,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

首先说明 $E=\bigcup\limits_{p\in\mathbb{R}P^n}E_p$ 上存在一个 T_2 的拓扑结构, 使得每一个 ψ_α 都是同胚. 利用 $\mathbb{R}P^n$ 在 V_α 上的局部坐标映射 φ_α, 可以构造 E 上的局部坐标卡 $(\pi^{-1}V_\alpha,\psi_\alpha^{-1}\circ(\varphi_\alpha\times\mathrm{id}))$. 容易验证, 这些局部坐标卡都是 C^∞ 相关的, 因而在 E 上确定了一个光滑结构. 最后验证映射族 $\{\psi_\alpha;\alpha\in I\}$ 满足定义 9.1 中的条件.

习 题 二

1. 按照乘积度量的定义直接验证即可. 比如, $g=g_1\times g_2$ 的正定性证明如下: 设 $(p,q)\in M_1\times M_2$, $\forall v\in T_pM_1$, $w\in T_qM_2$, 则由 g_1 和 g_2 的正定

性, $g_1(v,v)\ge 0$, $g_2(w,w)\ge 0$, 其中的两个等号成立的充分必要条件分别是 $v=0$ 和 $w=0$. 因此,

$$(g_1\times g_2)((\alpha_1)_*v+(\alpha_2)_*w,(\alpha_1)_*v+(\alpha_2)_*w)=g_1(v,v)+g_2(w,w)\ge 0,$$

其中等号成立当且仅当 $v=w=0$, 即 $v+w=0$.

2. 设 $(\tilde{U};\tilde{x}^i)$ 是 M 的另一个与定向相符的局部坐标系,

$$\tilde{g}_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^i},\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^j}\right),\quad \tilde{G}=\det(\tilde{g}_{ij}).$$

当 $U\cap\tilde{U}\neq\emptyset$ 时, 在 $U\cap\tilde{U}$ 上,

$$\frac{\partial(\tilde{x}^1,\cdots,\tilde{x}^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}>0,\quad g_{ij}=\frac{\partial\tilde{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial\tilde{x}^l}{\partial x^j}\tilde{g}_{kl},$$
$$dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m=\frac{\partial(x^1,\cdots,x^m)}{\partial(\tilde{x}^1,\cdots,\tilde{x}^m)}d\tilde{x}^1\wedge\cdots\wedge d\tilde{x}^m,$$
$$G=\det(g_{ij})=\tilde{G}\left(\frac{\partial(\tilde{x}^1,\cdots,\tilde{x}^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}\right)^2.$$

3. 设 $(U;x^i)$ 和 $(V;y^i)$ 分别是 M 和 N 上的任意两个与定向相符的局部坐标系, $f(U)\cap V\neq\emptyset$, 则

$$\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right),\cdots,f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)\right)=\left(\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^m}\right)\cdot J_{x;y}(f),$$

其中 $J_{x;y}(f)$ 是 f 关于 $(U;x^i)$ 和 $(V;y^i)$ 的 Jacobi 矩阵.

4. (1) 由 $A(p)=-p$ 易知 A 是光滑同胚且有 $A_*(dp)=-dp$, 其中 dp 表示 S^n 在任意点 p 处的切向量. 因此, $\langle A_*(dp),A_*(dp)\rangle=\langle dp,dp\rangle$.
(2) 易知, $\pi\circ A=\pi$. 根据 (1), 映射 $A:S^n\to S^n$ 是等距. 因此, 以 π 为局部等距在 $\mathbb{R}P^n$ 上可以确定唯一的一个黎曼度量, 其定义是显然的.

5. 设 $A:S^n\to S^n$ 为对径点映射 (参看本章习题第 4 题), 证明: A 保持 S^n 的定向不变 (参看本章习题第 3 题) 当且仅当 n 为奇数. 由此说明, $\mathbb{R}P^n$ 可定向当且仅当 n 为奇数.

6. (1) 设 $(\tilde{U};\tilde{x}^i)$ 是 M 上另一个与定向相符的局部坐标系, $\tilde{g}_{ij}=g(\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^i},\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^j})$, $\tilde{G}=\det(\tilde{g}_{ij})$. 当 $U\cap\tilde{U}\neq\emptyset$ 时, 在 $U\cap\tilde{U}$ 上,

$$dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m=\frac{\partial(x^1,\cdots,x^m)}{\partial(\tilde{x}^1,\cdots,\tilde{x}^m)}d\tilde{x}^1\wedge\cdots\wedge d\tilde{x}^m,$$

$$G=\det(g_{ij})=\tilde{G}\left(\frac{\partial(\tilde{x}^1,\cdots,\tilde{x}^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}\right)^2;$$

$$\sum_i(-1)^{i+k}\frac{\partial x^i}{\partial\tilde{x}^j}A_{ik}=\delta_{jk}\frac{\partial(x^1,\cdots,x^m)}{\partial(\tilde{x}^1,\cdots,\tilde{x}^m)},$$

其中 $(-1)^{i+k}A_{ik}$ 是 $\frac{\partial x^i}{\partial\tilde{x}^k}$ 在 Jacobi 矩阵 $J_{\tilde{x}x}$ 中的代数余子式.

(2) 在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下进行计算，并利用

$$\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_m}}\right)$$
$$=\sum_i(-1)^{i+1}\delta^i_{i_1}\mathrm{d}x^1\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_2}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_m}}\right).$$

7. (1) 先求出映射 φ 的 Jacobi 矩阵

$$J(\varphi)=\begin{pmatrix}-f\sin u & f'\cos u\\ f\cos u & f'\sin u\\ 0 & g'\end{pmatrix}.$$

验证 $J(\varphi)$ 的秩处处为 2.

8. (1) 设 $q\in N$. 首先利用映射的秩定理可以构造 $F_q=f^{-1}(q)$ 上的一族 C^∞ 相关的局部坐标系，从而确定了 F_q 上的光滑结构. 然后再证明包含映射 $i:F_q\to M$ 是嵌入.

(2) 显然，π_1，π_2 都是浸没. 对于任意的 $p\in M_1$，$q\in M_2$，$\pi_1^{-1}(p)=\{p\}\times M_2$，$\pi_2^{-1}(q)=M_1\times\{q\}$. 由乘积度量的定义，$(\sigma_1)_*(T_pM_1)$ 是浸没 $\pi_1:M_1\times M_2\to M_1$ 在点 (p,q) 的水平切空间，它在 $(\pi_1)_*$ 下与 T_pM_1 等距同构；$(\sigma_2)_*(T_qM_2)$ 是浸没 $\pi_2:M_1\times M_2\to M_2$ 在点 (p,q) 的水平切空间，它在 $(\pi_2)_*$ 下与 T_qM_2 等距同构.

9. (1) 设 $x_0\in K$，$\varepsilon>0$，$v_0=(v_0^i)\in\mathbb{R}^m$ 是 $g(x_0)$ 的属于特征值 $\lambda(x_0)$ 的单位特征向量，则 $g_{ij}(x_0)v_0^iv_0^j=\lambda(x_0)\sum(v_0^i)^2=\lambda(x_0)$. 由于 $g_{ij}(x)$ 在点 x_0 处的连续性，存在 x_0 点的邻域 U，使得不等式 $\sum_{i,j}|g_{ij}(x)-g_{ij}(x_0)|<\frac{1}{2}\varepsilon$ 在 U 上处处成立. 由此得知，存在正数 M，使得在 U 上，$|g_{ij}(x)|<M$. 取单位向量 $v=(v^i)\in\mathbb{R}^m$，使得 $|v^iv^j-v_0^iv_0^j|<\frac{1}{2M}\varepsilon$. 于是

$$\lambda(x)-\lambda(x_0)=\lambda(x)\sum(v^i)^2-\lambda(x_0)\sum(v_0^i)^2$$

$$\leq\sum(g_{ij}(x)v^iv^j-g_{ij}(x_0)v_0^iv_0^j)$$
$$\leq\sum|g_{ij}(x)||v^iv^j-v_0^iv_0^j|$$
$$+\sum|g_{ij}(x)-g_{ij}(x_0)||v_0^iv_0^j|<\varepsilon.$$

另一方面，对于任意的 $x\in U$，取 $g(x)$ 的一个属于特征值 $\lambda(x)$ 的单位特征向量 $v(x)=(v^i(x))\in\mathbb{R}^m$，再取一个单位向量 $v_0=(v_0^i)\in\mathbb{R}^m$，使得 $|v_0^iv_0^j-v^iv^j|<\frac{1}{2M}\varepsilon$，则仿照上面的不等式可得

$$\lambda(x_0)-\lambda(x)=\lambda(x_0)\sum(v_0^i)^2-\lambda(x)\sum(v^i(x))^2$$
$$\geq\sum(g_{ij}(x_0)v_0^iv_0^j-g_{ij}(x)v^i(x)v^j(x))$$
$$\geq-|g_{ij}(x)v^i(x)v^j(x)-g_{ij}(x_0)v_0^iv_0^j|$$
$$\geq-\left(\sum|g_{ij}(x)||v^i(x)v^j(x)-v_0^iv_0^j|\right.$$
$$\left.+\sum|g_{ij}(x)-g_{ij}(x_0)||v_0^iv_0^j|\right)>-\varepsilon.$$

于是当 $x\in U$ 时，有 $|\lambda(x)-\lambda(x_0)|<\varepsilon$. 这说明 $\lambda(x)$ 在 K 中的任意一点 x_0 处连续. 同理可证 $\Lambda(x)$ 的连续性.

11. 利用反函数定理 (参看第一章习题第 9 题).

12. (1) $\forall q\in M$，T_qM 的自然基底为 $\frac{\partial}{\partial u^i}=(\frac{\partial f^1}{\partial u^i},\cdots,\frac{\partial f^{m+1}}{\partial u^i})$. 通过求解关于 $N^1,\cdots,N^{m+1}$ 的方程组

$$\sum_{A=1}^{m+1}\frac{\partial f^A}{\partial u^i}\cdot N^A=0,\quad 1\leq i\leq m,$$

证明：$W^1:\cdots:W^{m+1}=N^1:\cdots:N^{m+1}$.

(2) 诱导度量是 $g=\sum g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$，其中

$$g_{ij}=\sum_{A=1}^{m+1}\frac{\partial f^A}{\partial u^i}\frac{\partial f^A}{\partial u^j},\quad 1\leq i,j\leq m.$$

利用行列式的性质计算 $G=\det(g_{ij})$.

(3) 直接计算得

$$i(\xi)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{m+1}|_M$$
$$=\sum_A(-1)^{A+1}\frac{W^A}{W}\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^A}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{m+1}|_M$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{A}\frac{W^{A}}{W}\frac{\partial f^{1}}{\partial u^{i_1}}\cdots\widehat{\frac{\partial f^{A}}{\partial u^{i_A}}}\cdots\frac{\partial f^{m+1}}{\partial u^{i_{m+1}}}\cdot \mathrm{d}u^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}u^{i_A}}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}u^{i_{m+1}}\\
&=\frac{1}{W}\sum_{A}(W^{A})^{2}\mathrm{d}u^{1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}u^{m}=W\mathrm{d}u^{1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}u^{m}=\mathrm{d}V_{M}.
\end{aligned}
$$

13. $\mathbb{C}^n$ 作为光滑流形等同于 $\mathbb{R}^{2n}$. 此时 $z^i=x^i+\sqrt{-1}y^i$, 于是 $(z^1,\cdots,z^n)$ 等同于 $(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n)$. 映射 φ 的相应表达式是

$$\varphi([u^1,\cdots,u^n])=(\cos u^1,\cdots,\cos u^n,\sin u^1,\cdots,\sin u^n),$$

它与 $[u^1,\cdots,u^n]$ 的代表元的选取无关. 其余的是常规的计算.

14. (1) G 上的乘法用 $\mathbb{R}^2_+$ 中的元素可以表示为 $(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(y_1x_2+x_1,y_1y_2)$, 因而 $(x,y)^{-1}=(-x/y,1/y)$. 左不变黎曼度量 g 在点 (x,y) 处的值是 $(L_{(x,y)^{-1}})^*g_e$.
(2) 在复坐标下 $g=-4\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}/(z-\bar{z})^2$.

16. (1) 取 $\omega_0\in\bigwedge^n(T_e^*G)$, $\omega_0\neq 0$. 令 $\omega_a=(L_{a^{-1}})^*\omega_0$, $\forall a\in G$. 则对于任意的 $b\in G$,

$$
\begin{aligned}
((L_b)^*\omega)_g&=(L_b)^*\omega_{bg}=(L_b)^*(L_{g^{-1}b^{-1}})^*\omega_0\\
&=(L_{g^{-1}b^{-1}}\circ L_b)^*\omega_0=(L_{g^{-1}})^*\omega_0=\omega_g,\quad \forall g\in G.
\end{aligned}
$$

(2) 先证明: 对于任意的 $a\in G$, $R_a^*\omega$ 仍然是左不变的, 因而可设 $R_a^*\omega=f(a)\omega(\forall a\in G)$. 再证明: 对于任意的 $a\in G$, $f(a)=1$. 这就证明了 $R_a^*\omega=\omega$, $\forall a\in G$.
(3) 内积 $(\cdot,\cdot)$ 的左不变性是显然的. 利用 ω 的左不变性和流形上积分的变量替换公式 (参阅参考文献 [14, 定理 2.2(iv), 第 239 页]) 直接证明:

$$((R_a)_*(u),(R_a)_*(v))_{ya}=(u,v)_y,\quad u,v\in T_yG,\quad y,a\in G.$$

双不变黎曼度量的存在性的另一个证明可以参阅参考文献 [14, 推论 3.7, 第 274 页].

18. (1) 利用第一章习题第 28 题和内积 $(\cdot,\cdot)$ 的不变性证明: 对于任意的左不变向量场 X,Y,Z, $([X,Y],Z)=-([Z,Y],X)$, 从而有 $(\mathrm{D}_XX,Y)=0$.
(2) $\mathrm{D}_XY+\mathrm{D}_YX=\mathrm{D}_{X+Y}(X+Y)=0$.

19. 因为联络具有局部性, 并且局部等距在局部上是等距. 所以可以设 φ 是等距. 在此条件下, 对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, 成立如下的关系式 (参看第一章习题第 39 题)

$$(\varphi_*(X),\varphi_*(Y))=(X,Y),\quad \varphi_*([X,Y])=[\varphi_*(X),\varphi_*(Y)].$$

再利用本章习题第 9 题中有关黎曼联络的公式.
如果把题目中的条件 "局部等距" 换为 "等距浸入", 结论不一定成立. 原因在于 $\varphi_*(\mathrm{D}_vX)\in\varphi_*(T_pM)$, 但在一般情况下 $\bar{\mathrm{D}}_{\varphi_*(v)}\varphi_*(X)$ 不一定与 $\varphi(M)$ 相切. 比如考虑等距浸入 $i:S^2\to\mathbb{R}^3$.

21. 根据梯度的定义, 对于任意的 $Z\in\mathfrak{X}(M)$, $g(\mathrm{grad}_g\rho,Z)=Z(\rho)$. 再利用本章习题第 18 题中关于黎曼联络的恒等式. 本题也可以采用如下的办法直接证明: 令

$$\overline{\mathrm{D}}_XY=\mathrm{D}_XY+S(X,Y),\quad \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M),$$

则 $\overline{\mathrm{D}}$ 显然是 M 上的一个无挠联络. 因此, 为了证明结论, 我们只需证明 $\overline{\mathrm{D}}$ 与度量 $\bar{g}$ 是相容的, 即证明等式

$$X(\bar{g}(Y,Z))=\bar{g}(\overline{\mathrm{D}}_XY,Z)+\bar{g}(X,\mathrm{D}_XZ).$$

22. (1) 仿照定理 4.5 的证明并参照本章习题第 18 题的结论和方法.
(2) $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的黎曼联络是作用于光滑切向量场上的普通微分算子 d. 说明它满足伪黎曼联络的条件.

23. (1) X 是 Killing 向量场当且仅当 X 所生成的单参数变换群 φ_t 是等距变换群, 即对于任意的 $q\in M$ 以及任意的 t,

$$((\varphi_t)_*Y,(\varphi_t)_*Z)|_{\varphi(t,q)}=(Y,Z)|_q.$$

由此导出:

$$((\mathrm{D}_YX,Z)+(\mathrm{D}_ZX,Y))(q)=0,\quad \forall q\in M.$$

(2) 利用结论 (1) 以及本章习题第 20 题.
(3) 由连续性, 在点 p 的一个邻域上, X 处处不为零. 设 S 是通过 p 点且在 p 点与 $X(p)$ 垂直的超曲面. 取 S 在 p 点的一个局部坐标系 $(V;x^\alpha)$, 使

得 $(V\times(-\varepsilon,\varepsilon);x^\alpha,x^m)$ 是 M 在点 p 的局部坐标系，且有 $X=\frac{\partial}{\partial x^m}$. 则由结论 (1)，

$$\frac{\partial}{\partial x^m}(g_{ij})=\left\langle \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}X,\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle+\left\langle \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^j}}X,\frac{\partial}{\partial x^i}\right\rangle=0.$$

(4) 作为定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的向量函数，$\mathbb{R}^n$ 上的一个 Killing 向量场 X 具有如下的一般表达式：

$$X=x\cdot A+v,\quad \forall x=(x^1,\cdots,x^n)\in\mathbb{R}^n,$$

其中 $A+A^t=0$，$v\in\mathbb{R}^n$.

24. 设联络 D 在局部坐标系 $(U\times V;u^i,v^\alpha)$ 下的联络系数为 Γ^C_{AB}. 如果 M_1 和 M_2 的黎曼度量分别为 g 和 h，则 $M_1\times M_2$ 上的黎曼度量是 $G=g\times h$. 根据黎曼度量乘积的定义，有 $G_{ij}=g_{ij}\circ\pi_1$，$G^{ij}=g^{ij}\circ\pi_1$ 仅与 u^i 有关，$G_{\alpha\beta}=h_{\alpha\beta}\circ\pi_2$，$G^{\alpha\beta}=h^{\alpha\beta}\circ\pi_2$ 仅与 v^α 有关，并且 $G_{i\alpha}=G_{\alpha i}=G^{i\alpha}=G^{\alpha i}=0$. 于是

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial u^k}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\circ\pi_1,\quad \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial v^\gamma}=\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial v^\gamma}\circ\pi_2.$$

把上述式子代入 Γ^C_{AB} 的计算公式即可得到所需的结果.

25. (1) 设 $\tilde M$ 上的黎曼度量为 $\tilde g$. 对于任意的 $\tilde p\in\tilde M$，记 $p=f(\tilde p)$. 由本章习题第 9(1) 题，需设 f 在点 p 处的纤维 $F_p=f^{-1}(p)$ 是 $\tilde M$ 的嵌入子流形. 利用映射的秩定理证明 X 的局部水平提升是存在唯一的.

(2) 设 $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$，$\tilde T\in\mathfrak{X}(\tilde M)$ 是一个铅垂向量场. 利用关系式

$$\langle\overline{X},\tilde T\rangle=\langle\overline{Y},\tilde T\rangle=\langle\overline{Z},\tilde T\rangle=0,\quad \overline{X}\langle\overline{Y},\overline{Z}\rangle=X\langle Y,Z\rangle\circ f,$$
$$[X,Y]\circ f=[f_*(\overline{X}),f_*(\overline{Y})]=f_*([\overline{X},\overline{Y}]),$$
$$f_*([\overline{X},\tilde T])=0,\quad \tilde T(\langle\overline{X},\overline{Y}\rangle)=0,$$

可得

$$\langle[\overline{X},\overline{Y}],\overline{Z}\rangle=\langle[X,Y],Z\rangle\circ f,\quad \langle[\overline{X},\tilde T],\overline{Y}\rangle=0.$$

从而根据本章习题第 18 题有

$$\langle\tilde{\mathrm{D}}_{\overline{X}}\overline{Y},\overline{Z}\rangle=\langle\mathrm{D}_XY,Z\rangle,\quad 2\langle\tilde{\mathrm{D}}_{\overline{X}}\overline{Y},\tilde T\rangle=\langle\tilde T,[\overline{X},\overline{Y}]\rangle.$$

(3) 利用等式 $\langle[\overline{X},\overline{Y}],\tilde T\rangle=\langle\tilde{\mathrm{D}}_{\overline{X}}\overline{Y}-\tilde{\mathrm{D}}_{\overline{Y}}\overline{X},\tilde T\rangle$.

26. $\varphi(x)=x\cdot A+b(\forall x\in\mathbb{R}^m)$，其中 $A=(a^i_j)\in GL(m,\mathbb{R})$，$b\in\mathbb{R}^m$.

27. 显然，等式与局部标架场 $\{e_i\}$ 的选取无关. 因此，我们可以在一个局部坐标系 $(U;x^i)$ 下令 $e_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$，从而 $\omega^i=\mathrm{d}x^i$. 由于算子 d 和 D 都是实线性的，可以设 $\theta=f\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}$，其中 $r\geq0$，$f\in C^\infty(U)$. 设 $\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma^k_{ji}\frac{\partial}{\partial x^k}$，则 $\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\mathrm{d}x^k=-\Gamma^k_{ji}\mathrm{d}x^j$. 说明 $\sum_i\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r})=0$. 于是

$$\sum_i\omega^i\wedge\mathrm{D}_{e_i}\theta=\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}=\mathrm{d}\theta.$$

28. 利用第一章的定理 7.3 或本章习题第 28 题.

29. (2) 利用嵌入子流形的典型局部坐标系证明如下更一般的结果：设 $M\subset N$ 为嵌入子流形，$X\in\mathfrak{X}(N)$，如果对于任意的 $p\in M$，都有 $X(p)\in T_pM$，则 $X|_M\in\mathfrak{X}(M)$.

(3) 利用本章习题第 18 题中的公式，度量 g 的联络 D 由下列各式确定：

$$\mathrm{D}_{e_1}e_2=\tfrac12e_3,\quad \mathrm{D}_{e_2}e_1=-\tfrac12e_3,\quad \mathrm{D}_{e_1}e_3=-\tfrac12e_2,\quad \mathrm{D}_{e_3}e_1=\tfrac12e_2,$$
$$\mathrm{D}_{e_2}e_3=\tfrac12e_1,\quad \mathrm{D}_{e_3}e_2=-\tfrac12e_1,\quad \mathrm{D}_{e_1}e_1=\mathrm{D}_{e_2}e_2=\mathrm{D}_{e_3}e_3=0.$$

30. 在局部坐标系 $(U;x^i)$ 和 $(\tilde U;\tilde x^i)$ 下，利用等式

$$\frac{\partial(\tilde x^{j_1},\cdots,\tilde x^{j_m})}{\partial(x^{j_1},\cdots,x^{j_m})}=\frac{\partial(\tilde x^1,\cdots,\tilde x^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)},$$

其中 $j_1\cdots j_m$ 是 $1\cdots m$ 的任意一个排列.

31. Δ 关于坐标系 (r,φ,θ) 的表达式是

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac2r\frac{\partial}{\partial r}+\frac1{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-\frac1{r^2}\tan\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac1{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.$$

32. 度量 $\tilde g$ 可以用 g 表示为 $\tilde g=\mathrm{d}r^2+r^2g$.

33. 设 $r=\sqrt{\sum_i(x^i)^2}$，则

$$*\alpha=\frac1{r^n}\sum_ix^i*\mathrm{d}x^i=\frac1{r^n}\sum(-1)^{i+1}x^i\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\widehat{\mathrm{d}x^i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n.$$

34. 利用本章习题第 6 题以及散度的计算公式 (5.1) 立即可得本题的结论；该结论也可以在单位正交标架场下直接证明.

35. (1) 在单位正交标架场 $\{e_j\}$ 及其对偶标架场 $\{\omega^j\}$ 下进行计算. 对于任意的 $\beta \in A_0^{r-1}(M)$, 先利用本章习题第 28 题求出 $\mathrm{d}\beta$. 再令 $X = \sum_j \langle i(e_j)\alpha, \beta\rangle e_j$, 并求出

$$\operatorname{div}(X) = \langle \alpha, \mathrm{d}\beta\rangle + \left\langle \sum_j i(e_j)(\mathrm{D}_{e_j}\alpha), \beta \right\rangle.$$

由于 β 具有紧致的支撑集, 两边在 M 上积分并利用散度定理 (定理 5.3) 便得

$$(\delta\alpha, \beta) = (\alpha, \mathrm{d}\beta) = \left(-\sum i(e_i)(\mathrm{D}_{e_i}\alpha), \beta\right).$$

(2) 设 $\alpha = \frac{1}{(r+1)!}\alpha_{i_1\cdots i_{r+1}}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_{r+1}}$, 则

$$\delta\alpha = -\frac{1}{r!}\sum_i \alpha_{ii_1\cdots i_r,i}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}.$$

(3) 设 $\{\omega^i\}$ 是标架场 $\{e_i\}$ 的对偶标架场, 令 $X = X^i e_i$, 则

$$\mathrm{D}_{e_i}\alpha_X = g_{kj}X^j_{,i}\omega^k,$$

其中 $X^j_{,i}$ 由 $\mathrm{D}_{e_i}X = X^j_{,i}e_j$ 确定.

36. 分别对 f 和 f^2 使用 (5.19) 式.

37. 利用本章习题第 6 题.

38. (3) 参看本章习题第 36(3) 题.

39. (1) $(\tilde{\Delta}\omega, \omega) = |\mathrm{d}\omega|^2 + |\delta\omega|^2$.

(2) 只需证明 $\mathrm{d}(A^{r-1}(M)) \oplus \delta(A^{r+1}(M)) \subset \tilde{\Delta}(A^r(M))$. 为此设 $\omega = \mathrm{d}\alpha + \delta\beta$, $\alpha \in A^{r-1}(M)$, $\beta \in A^{r-1}(M)$. 由 Hodge 分解定理进行如下的分解:

$$\alpha = \mathrm{d}\alpha_1 + \delta\beta_1 + \gamma_1, \quad \beta_1 \in A^r(M),$$

$$\beta = \mathrm{d}\alpha_2 + \delta\beta_2 + \gamma_2, \quad \alpha_2 \in A^r(M);$$

$$\beta_1 = \mathrm{d}\alpha_3 + \delta\beta_3 + \gamma_3, \quad \alpha_3 \in A^{r-1}(M),$$

$$\alpha_2 = \mathrm{d}\alpha_4 + \delta\beta_4 + \gamma_4, \quad \beta_4 \in A^{r+1}(M).$$

利用结论 (1) 证明

$$\mathrm{d}\alpha = \tilde{\Delta}\mathrm{d}\alpha_3, \quad \delta\beta = \tilde{\Delta}\delta\beta_4.$$

40. 对于任意的 $\omega \in Z^r(M) \subset \omega \in A^r(M)$, 由 **Hodge** 分解定理, 存在 $\alpha \in A^{r-1}(M)$, $\beta \in A^{r-1}(M)$ 和 $\omega^0 \in H^r$, 使得 $\omega = \mathrm{d}\alpha + \delta\beta + \omega^0$. 利用本章习题第 40 题的结论 (1) 证明 $\delta\beta = 0$. 再证明分解式 $\omega = \mathrm{d}\alpha + \omega^0$ 的唯一性.

42. (2) 说明 Gauss-Codazzi 方程等价于 $\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i) = 0$, $\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{n}) = 0$. 再把基本公式 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum \omega_i^j \boldsymbol{r}_j + \omega_i^3\boldsymbol{n}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{n} = \omega_3^i\boldsymbol{r}_i$ 代入.

43. 设 $(U; x^i)$ 是 M 上的一个与定向相符的局部坐标系, 用平行移动关于曲线参数的连续性说明当 $\gamma \subset U$ 时结果成立. 然后把 γ 分成有限多个充分小的曲线段从而可以把 P_γ 分解为有限多个保持定向的线性同构的复合.

44. (1) 设 $\boldsymbol{n}$ 是 M 上的单位法向量场, 则

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \mathrm{D}_{\gamma'(t)}X + \left\langle \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{n}\right\rangle \boldsymbol{n}.$$

(2) 设 v 是大圆 γ 所在平面的单位法向量, 证明 $\mathrm{D}_{\gamma'(t)}\gamma'(t) \perp v$. 结合 $\mathrm{D}_{\gamma'(t)}\gamma'(t) \perp \gamma'(t)$, 说明 $\mathrm{D}_{\gamma'(t)}\gamma'(t)$ 处处平行于单位法向量场 $\boldsymbol{n}$. 由结论 (1), $\gamma'(t)$ 是沿 γ 的平行向量场. 类似的讨论可以证明: 结论对于 S^n 上的大圆也是成立的.

45. (2) 在 $(\mathbb{R}^2_+, g)$ 中, $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$ 沿 γ 是单位正交标架场. 若设 $X = (a(t), b(t))$, 则有 $a = \cos(\frac{\pi}{2} + \theta(t))$, $b = \sin(\frac{\pi}{2} + \theta(t))$, 其中 $\theta(t)$ 是从 Oy 轴的正向到 $X(t)$ 的有向角.

46. 考虑沿曲线 γ 与 S^2 相切的圆锥 C. 说明 S^2 中沿 γ 的平行移动可以化为在 C 中沿 γ 的平行移动. 由此说明, v 沿 γ 的平行移动的一个直观描述如下: 设 q 是 γ 上的另一点, O 是锥面 C 的顶点. 则 v 沿 γ 到 q 点的平行移动相当于在 C 上沿直母线 Op 把 v 在保持 v 与 Op 的夹角不变的情况下移动到 O 点, 再在 C 上沿直母线 Oq 在保持 v 与 Oq 的夹角不变的情况下移动到点 q.

另一个直观解释可以用解析的方法推出: 设 S^2 的参数方程为

$$x = \sin\theta\cos t, \ y = \sin\theta\sin t, \ z = \cos\theta, \quad 0 \le t \le 2\pi, \ 0 < \theta < \pi,$$

则 γ 可以表示为 $\theta = \theta_0$(常数). 不失一般性, 可设已知的向量 v 为单位向

量，它沿 γ 的平行移动记为 $v(t)$, $p=\gamma(0)$. 则

$$v(t)=\frac{\cos\alpha}{\sin\theta_0}\frac{\partial}{\partial t}+\sin\alpha\frac{\partial}{\partial\theta},$$

其中 α 是从 $\frac{\partial}{\partial t}$ 到 $v(t)$ 的有向角， $\alpha_0=\alpha(0)$. 代入方程

$$\mathrm{D}_{\gamma'(t)}v(t)\equiv 0$$

可知， $\alpha=(\cos\theta_0)t+\alpha_0$. 由此式可以得到 v 沿 γ 平行移动的另一个直观描述.

47. 取 M 在点 p 的局部坐标系 $(U;x^i)$, 则可设 $X=X^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$. 根据拉回丛 γ^*TM 上的诱导联络的定义

$$\mathrm{D}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}X=\frac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p+X^i\mathrm{D}_{\gamma'(t)}\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p=\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}.$$

48. 取 M 在点 $p=\pi(P)$ 处的容许局部坐标系 $(U;x^i)$, $(\pi^{-1}U;x^i,y^i)$ 是 TM 在点 P 的局部坐标系. 设 TM 的切向量 $V,W\in T_P(TM)$ 的局部坐标表示为

$$V=V^i\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_P+X^i\frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_P,\quad W=W^i\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_P+Y^i\frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_P.$$

根据诱导联络的定义和上一题的结论可以证明，

$$\begin{aligned}\pi_*V=V^i\frac{\partial}{\partial x^i}(p),\quad \pi_*W&=W^i\frac{\partial}{\partial x^i}(p),\\ \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}t}(p)=&X^i\frac{\partial}{\partial x^i}(p)+y_0^i\mathrm{D}_{\pi_*V}\frac{\partial}{\partial x^i},\\ \frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{d}s}(p)=&Y^i\frac{\partial}{\partial x^i}(p)+y_0^i\mathrm{D}_{\pi_*V}\frac{\partial}{\partial x^i}.\end{aligned}$$

由此可见，内积 $\langle V,W\rangle_P$ 与曲线 $v(t)$ 和 $w(s)$ 的选取无关.
此外， $\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}t}(0)$, 由 $\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{d}s}(0)$ 以及 $\langle V,W\rangle_P$ 的表达式和度量 g 的正定性可知， $\langle V,W\rangle$ 关于 V 和 W 是正定对称的，并且光滑地依赖于点 $P\in TM$.

49. (1) 设 $p=\pi(\tilde p)$. 当 V 是铅垂切向量时，存在 $\pi^{-1}(p)=T_pM$ 中的光滑曲线 $v=v(t)$, 满足 $v(0)=\tilde p$, $v'(0)=V$. 此时， $\pi\circ v$ 是 M 上的常值曲线，于是由本章习题第 47 题， $\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}t}(0)=v'(0)=V$, $\pi_*(V)=0$; 当 V 是水平向量时，存在过点 $\tilde p$ 的曲线 $v=v(t)$ 满足 $v(0)=\tilde p$, $v'(0)=V$. 设 $W\in T_{\tilde p}(TM)$

是 TM 在点 $\tilde p$ 的任意一个铅垂切向量，则由 $\tilde g(W,V)=0(\forall W\in T_{\tilde p}(TM))$ 可以推得 $\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}t}(0)=0$.
(2) TM 上的曲线 $v=v(t)$ 是水平的当且仅当其切向量 $v'(t)$ 处处是水平切向量. 由 (1) 的证明易知，后者等价于 $\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}t}$ 处处为零.
仿照第一章习题第 70 题和例 8.2 题的做法.

54. 设 $\{e_i\}$, $\{E_a\}$ 和 $\{F_\alpha\}$ 分别是向量丛 TM, $E^{(1)}$ 和 $E^{(2)}$ 上的局部标架场，则 $\{E_a;F_\alpha\}$ 和 $\{E_a\otimes F_\alpha\}$ 分别是向量丛 $E^{(1)}\oplus E^{(2)}$ 和 $E^{(1)}\otimes E^2$ 上的局部标架场. 如果 $\overset{(1)}{\Gamma}{}^b_{ai}$ 和 $\overset{(2)}{\Gamma}{}^\beta_{\alpha i}$ 分别是联络 $\mathrm{D}^{(1)}$ 和 $\mathrm{D}^{(2)}$ 关于 $\{E_a\}$ 和 $\{F_\alpha\}$ 的联络系数，由此分别说明， $\mathrm{D}^{(1)}\oplus\mathrm{D}^{(2)}$ 在局部标架场 $\{e_a;F_\alpha\}$ 下的联络系数是

$$\Gamma^b_{ai}=\overset{(1)}{\Gamma}{}^b_{ai},\ \Gamma^\beta_{\alpha i}=\overset{(2)}{\Gamma}{}^\beta_{\alpha i},\ \Gamma^\alpha_{ai}=\Gamma^a_{\alpha i}=0;$$

$\mathrm{D}^{(1)}\otimes\mathrm{D}^{(2)}$ 在局部标架场 $\{E_a\otimes F_\alpha\}$ 下的联络系数是

$$\Gamma^{\{b\beta\}}_{\{a\alpha\}i}=\overset{(1)}{\Gamma}{}^b_{ai}\delta^\beta_\alpha+\delta^b_a\overset{(2)}{\Gamma}{}^\beta_{\alpha i}.$$

55. 先根据张量丛 $T^r_s(M)$ 上诱导联络的定义写出 (r,s) 型张量场 τ 及其协变导数在局部标架场下的表达式，然后由这个表达式导出 (1.4) 式.

习 题 三

2. (2) 设 $a=|\gamma'(t)|$ 为常数，则沿 γ 成立

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{a}{f}\cos\beta,\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{a}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}\sin\beta.$$

由此导出

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{f'}{f}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{a}{f^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\cos\beta).$$

(3) 取 γ 的参数 t 为弧长参数，则有 $a=|\gamma'(t)|=1$. 当 γ 不是子午线时，它不会经过抛物面的顶点 (即原点)，因而必与某个平行圆 $v=v_0(>0)$ 相切，不妨设切点所对应的参数 $t=0$. 根据 Clairaut 关系式，沿 γ 成立 $\cos\beta=\frac{v_0}{v}$, $\sin\beta=\sqrt{1-\frac{v_0^2}{v^2}}$, $v\geq v_0$. 对于 $t\geq 0$, 把 $\gamma(t)$ 沿 x 轴的方向

投影到 xy 平面上得到点 P_t. OP_t 确定的射线与 xy 平面上以原点为中心的单位圆交于点 $Q(t)$. 由 $t\mapsto Q(t)$ 定义的曲线记为 $\tilde\gamma(t)$. 容易知道

$$|\tilde\gamma'(t)| = \left|\frac{d\alpha}{dt}\right| = \frac{1}{v}\cos\beta.$$

于是当 $t>0$ 时, 测地线绕 z 轴转过的周数是

$$Rd = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{v}\cos\beta\, dt = \frac{v_0}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{v^2}dt.$$

根据 $\frac{dv}{dt}$ 的表达式证明 $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)=+\infty$. 故有

$$\begin{aligned}Rd &= \frac{v_0}{2\pi}\int_{v_0}^{+\infty}\frac{1}{v^2}\frac{dt}{dv}dv = \frac{1}{2\pi}\int_{v_0}^{+\infty}\frac{1}{v}\sqrt{\frac{1+4v^2}{v^2-v_0^2}}dv\\ &\ge \frac{1}{\pi}\int_{v_0}^{+\infty}\frac{dv}{v}=+\infty.\end{aligned}$$

同样的道理, γ 在 t 从 0 到 $-\infty$ 的取值范围内绕 z 轴转过的周数也是无穷大, 但是旋转的方向刚好相反.

3. 设 $\pi: TM\to M$ 是丛投影, $\tilde\alpha(t)=(\alpha(t),v(t))$ 是 TM 中的曲线. 由切丛 TM 上诱导度量 $\tilde g$ 的定义

$$\begin{aligned}\tilde g(\tilde\alpha'(t),\tilde\alpha'(t)) &= g(\pi_*\tilde\alpha'(t),\pi_*\tilde\alpha'(t)) + g(D_{\alpha'}v, D_{\alpha'}v)\\ &= g(\alpha'(t),\alpha'(t))+g(D_{\alpha'}v,D_{\alpha'}v).\end{aligned}$$

再利用第二章习题第 49 题.

4. 利用球极投影 φ(参看第二章习题第 11 题), 把问题化为黎曼流形 $(B^2(a),g)$ $(a=1/\sqrt{-c})$ 上的同样问题. 在 $B^2(a)$ 中引入复坐标系 $z=\xi^1+\sqrt{-1}\xi^2$, 则分式线性变换

$$w = a^2\frac{z+z_0e^{\sqrt{-1}\theta}}{\bar z_0 z + a^2 e^{\sqrt{-1}\theta}}, \quad z_0\in B^2(a), \quad \theta\in\mathbb R$$

在 $B^2(a)$ 上的限制给出了黎曼流形 $(B^2(a),g)$ 到自身的一个等距. $(B^2(a), g)$ 中过点 z_0 的测地线是与边界 $\partial B^2(a)$ 正交的圆弧或线段. 利用球极投影 φ 的定义, 不难给出 $H^2(c)$ 中的所有测地线及其几何解释.

5. 同本章习题和第 4 题, 记 $a=1/\sqrt{-c}$, 令

$$B^n(a)=\{(\xi^i)\in\mathbb R^n;\ \sum_i(\xi^i)^2<a\},\quad g=\frac{4a^2\sum_k(d\xi^k)^2}{(a^2-\sum_k(\xi^k)^2)^2},$$

则 $H^n(c)$ 与黎曼流形 $(B^n(a),g)$ 在 "球极投影" φ 下等距 (参看本章例题 2.3 和本章习题第 11 题). 在黎曼流形 $(B^n(a),g)$ 上讨论, 并且利用特殊正交群 $SO(n)$(参看第一章的习题 43) 在 $B^n(a)$ 上的等距作用. 根据定理 1.6 以及本章习题第 4 题的结果不难知道, 对于任意的 $p\in B^n(a)$, $(B^n(a),g)$ 中通过点 p 的测地线是与边界球面 $\partial B^n(a)$ 正交的圆弧或直线段. 再由球极投影 φ 的定义便可以得到 $H^n(c)$ 的所有测地线.

6. 先说明 $\sigma(\gamma(t))=\gamma(-t)$. 再利用第二章的定理 4.3 以及平行移动由初值确定的事实.

7. (1) 对于任意的 $t_0\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, 令 $\varphi(t_0)=y$. 则由左不变性, $t\mapsto y^{-1}\varphi(t)$ 也是 X 的通过 e 点的积分曲线, $y^{-1}\varphi(t_0)=e$. 由积分曲线的唯一性, $\varphi(t_0)^{-1}\varphi(t)=\varphi(t-t_0)$. 于是 φ 可以扩展为在区间 $(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$ 上有定义. 由此不难看出, φ 在整个 $\mathbb R$ 上有定义; 此外, 还有 $\varphi(t-t_0)\circ\varphi(t_0)=\varphi(t)$. 再由 t 和 t_0 的任意性, 即得 $\varphi(t+s)=\varphi(t)\cdot\varphi(s)$.

(2) 首先, 由第二章习题第 19 题, 如果 X 是 G 上的左不变向量场, 则有 $D_XX=0$. 于是 G 的所有单参数子群都是测地线. 再由唯一性, 从 e 出发的测地线都是单参数子群.

8. 设 φ_t, $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, 是 X 生成的局部等距. 首先证明, $\varphi_t(p)=p$, $\forall t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. 利用文献 [3, 第 144~145 页] 的定理 3.5 证明 $(\varphi_t)_{*p}=\mathrm{id}_{T_pM}$, 进而说明 X 在 p 点的一个邻域上恒为零. 再由 M 的连通性导出结论.

10. (解法一) 先利用命题 1.8 证明 Oy 轴之正半轴上的直线段都是 $(\mathbb R^2_+,g)$ 上的测地线; 再考虑等距变换

$$z\mapsto\frac{az+b}{cz+d},\quad z=x+\sqrt{-1}y,\quad a,b,c,d\in\mathbb R,\quad ad-bc=1,$$

它把 Oy 轴的正半轴映射为以 Ox 上的点为心的上半圆周或平行于 Oy 轴的射线: $x=x_0, y>0$. 因而这些半圆周或射线都是 $(\mathbb R^2_+,g)$ 上的测地线. 注意到对于 $(\mathbb R^2_+,g)$ 上的每一个点 p 以及该点处的每一个方向 v 都有上述的半圆或射线通过点 p 并且与 v 相切, 我们便得到了 $(\mathbb R^2_+,g)$ 上的所有测

地线.

(解法二) 设测地线 $\gamma(s)$ 的参数 s 是弧长参数. 从 $\frac{\partial}{\partial x}$ 至 $\gamma'(s)$ 的有向角为 θ. 由测地线的微分方程可以推知

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = -\cos\theta.$$

如果 $\cos\theta \equiv 0$, 则 $x=$ 常数, 相应的测地线 γ 是垂直于 x 轴的直线; 如果 $\cos\theta \neq 0$, 则 $\mathrm{d}x = -y\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}y = -y\tan\theta\mathrm{d}\theta$. 解得 $x = -c\sin\theta + x_0$, $y = c\cos\theta$, 其中 $c>0$, $x_0 \in \mathbb{R}$. 故有 $(x-x_0)^2 + y^2 = c^2$, $y>0$. 这是以 $(x_0, 0)$ 为中心、半径为 c 的上半圆周.

11. 由 Clairaut 关系式 (参看本章习题第 2(2) 题) 知, 圆柱面 $M: x^2+z^2=1$ 上的测地线是直母线、平行圆和圆柱螺线 $\gamma_a(t) = (\sin t, at, \cos t)$, $-\infty < t < +\infty$, $a \neq 0$. 不失一般性, 可设 $q \neq p$. 如果 $z_0 = -1$, 令 $a = \frac{y_0}{3\pi}$, 则 $\gamma_a(t)(0 \le 3\pi)$ 满足要求. 下设 $z_0 \neq -1$. 如果 $z_0 = 1$, 令 $a = \frac{y_0}{2\pi}$, 则 $\gamma_a(t)(0 \le t \le 2\pi)$ 即满足要求; 如果 $z \neq 1$, 则存在唯一的 t_0: $0 < t_0 < 2\pi$, $t_0 \neq \pi$, 使得 $x_0 = \sin t_0$, $z_0 = \cos t_0$. 当 $t_0 \in (0,\pi)$ 时, 取 $a = -\frac{y_0}{2\pi - t_0}$, 则 $\gamma_a(t)(-(2\pi - t_0) \le t \le 0)$ 满足要求; 当 $t_0 \in (\pi, 2\pi)$ 时, 取 $a = \frac{y_0}{t_0}$, 则测地线 $\gamma_a(t)(0 \le t \le t_0)$ 满足要求.

12. 取点 p 的一个法坐标邻域 U 以及 T_pM 的一个单位正交基底 $\{e_i\}$. 然后把 $\{e_i\}$ 沿径向测地线进行平行移动.

13. 对于任意的 $p \in M$, 设 $\{e_i\}$ 是 p 点附近的测地平行标架场 (参看本章习题第 12 题), 使得 $(\mathrm{D}_{e_i} e_j)(p) = 0$, $\{\omega^i\}$ 是 $\{e_i\}$ 的对偶标架场, ω_j^i 是黎曼联络关于 $\{e_i\}$ 的联络形式, 则有 $\omega_j^i(p) = 0$, $\mathrm{d}V_M = \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^m$. 对于任意的 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 设 $X = X^i e_i$, 则 $\operatorname{div}(X) = \sum_i e_i(X^i)$. 另一方面,

$$i(X)\mathrm{d}V_M = \sum_i (-1)^{i-1} X^i \omega^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega^i} \wedge \cdots \omega^m.$$

由此可知在点 p 成立

$$\mathrm{d}(i(X)\mathrm{d}V_M) = \operatorname{div}(X)\mathrm{d}V_M.$$

14. 对于测地球 $\mathscr{B}_p(\delta)$ 中的任意一点 q, 存在 $v_q \in T_pM$, 满足 $|v_q| < \delta$, 并且 $\gamma(t) = \exp(tv_q)(0 \le t \le 1)$ 是连接 p, q 两点的测地线, 因而 $d(p,q) \le$

$L(\gamma) = |v_q| < \delta$, 即有 $q \in V_p(\delta)$. 所以 $\mathscr{B}_p(\delta) \subset V_p(\delta)$. 反之, 对于任意的 $q \in V_p(\delta) \subset U$, 由法坐标邻域的定义, 必有 $v_q \in T_pM$ 及连接 p, q 两点的最短测地线 $\gamma(t) = \exp(tv_q)$, $0 \le t \le 1$. 因此, $|v_q| = L(\gamma) = d(p,q) < \delta$. 这说明 v_q 包含在 T_pM 中的一个半径为 δ 的开球 $B_p(\delta)$ 内. 由测地球的定义, $q \in \mathscr{B}_p(\delta)$. 因而又有 $V_p(\delta) \subset \mathscr{B}_p(\delta)$.

15. 在欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 中任取一点 $p \neq 0$ 并设 $d(0,p) = \delta$. 容易验证, $\mathbb{R}^m \setminus \{p\}$ 中, $V_0(2\delta)$ 不是 $\mathbb{R}^m \setminus \{p\}$ 中的测地球.

16. 设 X 生成的局部单参数变换群是 $\varphi_t(q) = \varphi(t,q)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $q \in U$. 由于 $X_p = 0$, 对于任意的 t, $\varphi(t,p) = p$. 假设 $\mathscr{S}_p(\delta)$ 是任意一个以 p 点为中心的测地球面, $q \in \mathscr{S}_p(\delta)$. 那么, X 的过 q 点的积分曲线是 $\gamma(t) = \varphi(t,q)(-\varepsilon < t < \varepsilon)$. 对于每一个固定的 t, φ_t 是等距变换, 它把从点 p 到 q 的径向测地线映射为从点 p 到 $\varphi(t,q)$ 的径向测地线, 且有 $d(p, \varphi(t,q)) = d(p,q) = \delta$. 由 t 的任意性, $\gamma(t) \subset \mathscr{S}_p(\delta)$. 因此, $X_q = \gamma'(0)$ 与测地球面 $\mathscr{S}_p(\delta)$ 在点 q 相切.

17. (1) 设 $p \in M$, $(U; x^i)$ 是 M 在点 p 的一个法坐标系, 则有

$$g_{ij}(p) = g\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = \delta_{ij}, \quad \Gamma_{ij}^k(p) = 0,$$

其中 Γ_{ij}^k 是度量 g 在 $(U; x^i)$ 下的 Christoffel 记号. 对于 $v \in T_pM$, 令 $\bar{U} = \pi^{-1}(U)$, 则 $(\bar{U}; x^i, X^j)$ 是 TM 在点 v 处的局部坐标系, 使对于任意的 $(q, X) \in \bar{U}$, $X = \sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x^j}|_q$. 先计算出 TM 上关于诱导度量 $\bar{g}$ 的体积元 $\mathrm{d}V_{TM}$ 在任意的点 $(q, X) \in \bar{U}$ 处的表达式, 并说明它正好是 $U \times U$ 上的乘积度量 $g \times g$(参看第二章的例 2.5 和该章习题第 49(1) 题) 在点 (q, q) 处的体积元. 根据第二章习题第 35 题, 向量场 G 的散度 $\operatorname{div} G$ 仅与 TM 上的体积元有关. 再注意到 G 是水平向量场这一事实, 可以用 $U \times U$ 上的乘积度量 $g \times g$ 求出

$$\operatorname{div} G|_v = \operatorname{div}_{g\times g}(0, \pi_* G)(p, p).$$

由于在局部坐标系 $(\bar{U}; x^i, X^j)$ 下,

$$G(x^i) = X^i, \quad G(X^j) = -\Gamma_{ik}^j X^i X^k, \quad 1 \le i, j, k \le \dim M,$$

而且 $g\times g$ 的 Christoffel 记号在点 (p,p) 为零. 最终得知, 在 p 有

$$\operatorname{div} G=\sum_i \frac{\partial X^i}{\partial x^i}-\sum_j \frac{\partial}{\partial X^j}\left(\sum_{i,k}\Gamma^j_{ik}X^iX^k\right)=0.$$

(2) 利用第二章习题第 35 题.

18. 参阅参考文献 [24, 定理 11.1, 第 61 页].

19. 参阅参考文献 [24, 命题 11.3, 第 62 页; 命题 11.4, 第 63~64 页].

20. 在点 p 的一个法坐标系 $(U;x^i)$ 内, $\rho^2=\sum_i(x^i)^2$, 因而函数 ρ 在 U 内是光滑的. 另一方面, $\operatorname{Hess}(\rho^2)$ 在点 p 的表达式为

$$\operatorname{Hess}(\rho^2)|_p=2\sum_i(\mathrm{d}x^i)^2.$$

再由连续性, $\operatorname{Hess}(\rho^2)$ 在 p 点的一个开邻域内是正定的.

21. (1) 利用距离函数的连续性.

(2) 设 $v\in T_{q_0}M$. 取 M 上的曲线 $\beta(u)$, $u\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, 使得 $\beta(0)=q_0$, $\beta'(0)=v$. 对于任意的 $u\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, 设 $\gamma_u(t)=\Phi(t,u)(0\le t\le 1)$ 是连接 $p_0,\beta(u)$ 两点的最短测地线. 则 $\Phi(t,u)$ 是测地线 γ_0 的一个测地变分. 对 $\Phi(t,u)$ 应用变分公式 (3.5).

22. 先说明距离函数 d 是 $M_1\times M_2$ 上的连续函数. 再利用 $M_1\times M_2$ 的紧致性和本章习题第 21 题的证明方法.

23. (必要性) 设 M 是完备的并且 γ 是 M 上的一条发散曲线. 对于任意的自然数 n, 令 $\overline{V}_n=\{p\in M;\ d(\gamma(0),p)\le n\}$, 则 $\overline{V}_n$ 是 M 的有界闭子集, 因而是紧致子集. 由假设, 存在 $t_n>0$, 使得 $\gamma(t_n)\notin\overline{V}_n$. 于是

$$\int_0^{t_n}|\gamma'(t)|\mathrm{d}t\ge d(\gamma(0),\gamma(t_n))>n.$$

(充分性) 设 $p\in M$. 如果 M 不是完备的, 则有 $v_0\in T_pM$, $v_0\ne 0$, 使得测地线 $\gamma(t)=\exp_p(tv_0)$ 在 $t\in[0,1)$ 内处处有定义, 但不能延拓到闭区间 $[0,1]$ 上. 显然 γ 的长度是 $|v_0|<+\infty$. 利用定理 2.1 和推论 1.4 证明 γ 是一条发散曲线.

24. 由假设及 Hopf-Rinow 定理, 对于任意的自然数 n, 存在点 $p_n\in M$, 使得 $d(p,p_n)>n$. 再由完备性, 存在单位切向量 $v_n\in T_pM$, 使得 $\gamma_n(t)=\exp_p(tv_n)$ 是从 p 到 p_n 的最短测地线. 不失一般性, 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=v$. 验证 $\gamma(t)=\exp_p(tv)$ 是从点 p 出发的射线.

25. 由已知的不等式和距离函数的定义不难证明

$$d(p,q)<c\,d(f(p),f(q)),\quad \forall p,q\in M.$$

因此, 如果 $\{f(p_n)\}$ 是 $\tilde M$ 中的任意一个 Cauchy 点列, 则 $\{p_n\}$ 是 M 中的 Cauchy 点列. 由 M 的完备性, 存在点 $p\in M$, 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=p$. 于是有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(p_n)=f(p)\in\tilde M$. 所以 $\tilde M$ 也是完备的.

26. 注意到局部等距把测地线映射为测地线. 用反证法并利用 M 的完备性证明 f 是单射. 为证明 f 是满射, 任意取定一点 $p\in M$, 并令 $\tilde p=f(p)$. 对于任意的 $\tilde q\in\tilde M$, 设 $\tilde\gamma(s)(0\le s\le l)$ 是 $\tilde M$ 中连接点 $\tilde p,\tilde q$ 的唯一正规测地线, $\tilde\gamma(0)=\tilde p$, $\tilde\gamma(l)=\tilde q$, $l=L(\tilde\gamma)$. 取 $v\in T_pM$ 使得 $f_{*p}(v)=\tilde\gamma'(0)$. 再令 $\gamma(s)=\exp_p sv$, 则 $f\circ\gamma|_{[0,l]}=\tilde\gamma$. 于是 $f(\gamma(l))=\tilde q$.

28. 设 $K\subset(\mathbb{R}^2_+,g)$ 是一个有界闭集. 首先说明存在正数 δ,δ' 使得对于任意的 $(x,y)\in K$, $\delta\le y<\delta'$. 由此说明 K 是是欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 中的有界闭子集, 因而是 $\mathbb{R}^2$ 中的紧集. 自然 K 也是 $(\mathbb{R}^2_+,g)$ 的紧集. 根据 Hopf-Rinow 定理, $(\mathbb{R}^2_+,g)$ 是一个完备的黎曼流形.

29. 设 $\gamma(t)$ 是 X 的任意一条积分曲线, 其最大定义区间设 (a,b). 取数列 $\{t_n\}\subset(a,b)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n\to b$. 由假设条件证明 $\{\gamma(t_n)\}$ 是 M 上的 Cauchy 点列, 故有 $x\in M$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma(t_n)=x$. 再由 X 在点 x 的积分曲线的存在唯一性, 曲线 $\gamma(t)$ 的定义域可以向右延拓为 $(a,b+\varepsilon)$, 这与区间 (a,b) 的定义相矛盾.

此外, 有界性条件 $|X|\le c$ 是必要的. 比如在本章习题第 10 题中的完备黎曼流形 $(\mathbb{R}^2_+,g)$ 上考虑 $X=\frac{\partial}{\partial y}$, 其积分曲线的最大定义区间是 $(0,+\infty)$.

30. 根据黎曼齐性空间的定义, 并利用等距保持测地线及其长度不变的性质, 可以证明, 存在正数 δ, 使得对于任意的 $p\in M$, $\exp_p$ 在开球 $B_p(\delta)\subset T_pM$ 内处处有定义. 由此采用反证法不难证明, M 上的每一条正规测地线的定

义域都可以延伸到整个 $\mathbb{R}$ 上. 于是, 对于任意的点 $p \in M$, 指数映射 $\exp_p$ 在 T_pM 上处处有定义.

习　题　四

4. (2) 利用第二章习题第 23 题中的 Killing 方程.

6. 利用第二章的定理 4.6.

7. 当 D 是无挠联络时, 由 $\Omega_i^j = R_{ikl}^j \omega^k \wedge \omega^l$ 知

$$\mathrm{d}\Omega_i^j = \frac{1}{3}(R_{ikl,h}^j + R_{ilh,k}^j + R_{ihk,l}^j)\omega^h \wedge \omega^l \wedge \omega^k + \Omega_i^k \wedge \omega_k^j - \Omega_k^j \wedge \omega_i^k.$$

8. (1) 利用第二章习题第 18 题的结论 (2).

9. 定义函数 $f: M \to M$: $\forall p \in M$, $f(p) = |X(p)|^2$. 设 p_0 是 f 的最小值点. 引入线性映射 $A: T_{p_0}M \to T_{p_0}M$, 使得对于任意的 $Y \in T_{p_0}M$, $A(Y) = A_X(Y) = \mathrm{D}_Y X$(参看本章习题第 4 题. 如果 $X(p_0) \neq 0$, 则 $X(p)$ 在 $T_{p_0}M$ 中有正交补 E. 根据 Killing 方程 (见第二章习题第 23 题) 和本章习题第 4 题证明, $A(E) \subset E$, 并且 $A|_E$ 是非退化的和反对称的.

10. 考虑 M 中的曲面片: $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to M$, 其中

$$U = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2;\quad -\varepsilon < t < 1+\varepsilon,\ -\varepsilon < s < 1+\varepsilon\},\quad \varepsilon > 0,$$

并且对于任意的 $s \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, $f(0,s) = f(0,0)$. 设 $V_0 \in T_{f(0,0)}M$, 定义沿 f 的向量场 V 如下: $\forall s \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, $V(0,s) = V_0$, 并且当 $t \neq 0$ 时, $V(t,s)$ 是 V_0 沿曲线 $t \mapsto f(t,s)$ 的平行移动. 注意到 $\frac{\partial f}{\partial t} = f_*(\frac{\partial}{\partial t})$, $\frac{\partial f}{\partial s} = f_*(\frac{\partial}{\partial s})$, 于是由本章习题第 3 题,

$$\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\frac{\mathrm{D}}{\partial t}V = 0 = \frac{\mathrm{D}}{\partial t}\frac{\mathrm{D}}{\partial s}V + \mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)V.$$

由于平行移动与路径无关, 对于任意的 t, $V(t,s)$ 是向量 $V(t,0)$ 沿曲线 $s \mapsto f(t,s)$ 的平行移动, 因而有 $\frac{\mathrm{D}}{\partial s}V(t,s) = 0$. 因此 $\frac{\mathrm{D}}{\partial t}\frac{\mathrm{D}}{\partial s}V = 0$, 从而

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right)V = 0.$$

利用 f 和 V_0 的任意性, 即可推得欲证结论.

11. (2) 设 $p, q \in M$. 在 M 上取连接 p, q 两点的曲线段 $\gamma(t), 0 \leq t \leq 1$, 使得 $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$. 设 $e_1, e_2 \in T_pM$ 是单位正交基, X_1, X_2 分别是 e_1, e_2 沿 γ 的平行移动, 则 M 沿 γ 的截面曲率 (即 Gauss 曲率) 是 $K(\gamma(t)) = \langle\mathcal{R}(X_1, X_2)X_2, X_1\rangle$. 于是

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(K(\gamma(t)))\\ =&\langle \mathrm{D}_{\gamma'}(\mathcal{R}(X_1, X_2)X_2), X_1\rangle + \langle\mathcal{R}(X_1, X_2)X_2, \mathrm{D}_{\gamma'}X_1\rangle\\ =&0.\end{aligned}$$

由此即知, M 在 p, q 两点的截面曲率相等.

12. (1) 根据第二章习题第 25 题,

$$\tilde{\mathrm{D}}_{\overline{X}}\overline{Y} = \overline{\mathrm{D}_X Y} + \frac{1}{2}[\overline{X}, \overline{Y}]^v.$$

于是有 $\overline{X}\langle\tilde{\mathrm{D}}_{\overline{Y}}\overline{Z}, \overline{W}\rangle = X\langle\mathrm{D}_Y Z, W\rangle \circ f$, 并且

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\mathrm{D}}_{\overline{X}}\tilde{\mathrm{D}}_{\overline{Y}}\overline{Z}, \overline{W}\rangle =&\overline{X}\langle\tilde{\mathrm{D}}_{\overline{Y}}\overline{Z}, \overline{W}\rangle - \langle\tilde{\mathrm{D}}_{\overline{Y}}\overline{Z}, \tilde{\mathrm{D}}_{\overline{X}}\overline{W}\rangle\\ &-\langle\mathrm{D}_X\mathrm{D}_Y Z, W\rangle \circ f - \frac{1}{4}\langle[\overline{Y}, \overline{Z}]^v, [\overline{X}, \overline{W}]^v\rangle\end{aligned}$$

另一方面, 如果 $\tilde{T} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ 是垂直的, 则 $\langle[\tilde{T}, \overline{X}], \overline{Y}\rangle = 0$, 故有

$$\langle\tilde{\mathrm{D}}_{\tilde{T}}\overline{X}, \overline{Y}\rangle = \langle\tilde{\mathrm{D}}_{\overline{X}}\tilde{T}, \overline{Y}\rangle + \langle[\tilde{T}, \overline{X}], \overline{Y}\rangle = -\langle\tilde{T}, \tilde{\mathrm{D}}_{\overline{X}}\overline{Y}\rangle.$$

用 $(\cdots)^v$ 表示向量 $(\cdots)$ 的水平分量, 则有

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\mathrm{D}}_{[\overline{X},\overline{Y}]}\overline{Z}, \overline{W}\rangle =&\langle\tilde{\mathrm{D}}_{[\overline{X},\overline{Y}]^h}\overline{Z}, \overline{W}\rangle + \langle\tilde{\mathrm{D}}_{[\overline{X},\overline{Y}]^v}\overline{Z}, \overline{W}\rangle\\ &-\langle\mathrm{D}_{[X,Y]}Z, W\rangle \circ f - \frac{1}{2}\langle[\overline{X}, \overline{Y}]^v, [\overline{Z}, \overline{W}]^v\rangle\end{aligned}$$

综合上述的式子, 便可得到 (1) 的结论.

13. (1) 利用第一章习题第 27 题先证明数乘运算 $e^{\sqrt{-1}\theta}: S^{2n+1} \to S^{2n+1}$ 是等距. 由于 $f \circ e^{\sqrt{-1}\theta} = f$, CP^n 上的度量 g 可以由 S^{2n+1} 上的标准度量通过 f 诱导. 最后, 根据度量 g 的定义可以验证, $f: S^{2n+1} \to CP^n$ 是一个黎曼淹没.

(2) 用 z 表示球面 S^{2n+1} 上的位置向量，令 $\tilde{T}(z)=\sqrt{-1}\,z$，则 $\tilde{T}(z)\in T_zS^{2n+1}$ 是铅垂切向量. 设 $X,Y\in\mathfrak{X}(\mathbb{C}P^n)$，$X\perp Y$，$|X|=|Y|=1$. 证明

$$(\tilde{\mathrm{D}}_{\overline{X}}\tilde{T}(z))|_z=\sqrt{-1}\,\overline{X},\quad (\tilde{\mathrm{D}}_{\overline{Y}}\tilde{T}(z))|_z=\sqrt{-1}\,\overline{Y},$$

其中 $\tilde{\mathrm{D}}$ 是 $\mathbb{R}^{2n+2}=\mathbb{C}^{n}$ 上的标准联络. 再利用本章习题第 12(2) 题.

14. (1) 在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下，令 $e_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$，则 $\omega^i=\mathrm{d}x^i$. 设 $\alpha=\alpha_i\mathrm{d}x^i$，$Y=Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$. 利用第二章习题第 36(3) 题和第 28 题计算出

$$\mathrm{d}(\delta\alpha)(Y)=-Y^j\alpha^i_{,ij},\quad \delta(\mathrm{d}\alpha)(Y)=-g^{ij}\alpha_{k,ji}Y^k+g^{ij}\alpha_{j,ki}Y^k.$$

最后把 Ricci 恒等式代入.

(2) 仿照 (1) 等式的证明方法可以得到 Weitzenböck 公式. 为了简化计算，对于任意的点 $p\in M$，取点 p 附近的一个法坐标 $(U;x^i)$，则有 $g_{ij}(p)=\delta_{ij}$，$\Gamma^k_{ij}(p)=0$. 经过直接计算并且利用第二章习题第 36 题、第 28 题和 Ricci 恒等式即可.

(3) 由 (2)，$\tilde{\Delta}\alpha$ 的分量是

$$\begin{aligned}(\tilde{\Delta}\alpha)(e_{i_1},\cdots,e_{i_r})=&-(\mathrm{tr}\,\mathrm{D}^2\alpha)(e_{i_1},\cdots,e_{i_r})\\&+\sum_a(-1)^{a+1}g^{ij}(i(e_j)\mathcal{R}(e_i,e_{i_a})\alpha)(e_{i_1},\cdots,\widehat{e_{i_a}},\cdots,e_{i_r}).\end{aligned}$$

再利用 $\tilde{\Delta}\alpha=\frac{1}{r!}\tilde{\Delta}\alpha(e_{i_1},\cdots,e_{i_r})\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}$.

15. (1) 设 $\{e_1,e_2\}$ 和 $\{e_1',e_2'\}$ 分别是 π 和 π' 的单位正交基，则与 $\mathbb{R}^{m+1}$ 的单位正交基 $\{p,e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，$\{q,e_1',e_2',\cdots,e_m'\}$. 假设 $\Phi:\mathbb{R}^{m+1}\to\mathbb{R}^{m+1}$ 是由

$$\Phi(p)=q,\ \Phi(e_i)=e_i',\ i=1,2,\cdots,m$$

确定的线性变换，则 Φ 是一个正交变换. 令 $\phi=\Phi|_{S^m}$，则容易验证，$\phi:S^m\to S^m$ 是一个等距，并且满足 $\phi(p)=q$，$\phi(\pi)=\pi'$.

(2) 根据本章习题第 6 题以及结论 (1)，对于任意的点 $p,q\in S^m$，以及任意的二维子空间 $\pi\subset T_pS^m$，$\pi'\subset T_qS^m$，$K(\pi)=K(\pi')$.

16. 必要性是直接的. 为证明充分性，对于任意的点 $p\in M$ 以及任意的 $v,e_1,e_2\in T_pM$，先说明

$$(\mathrm{D}_vR)(u,w,u,w)=0,\quad \forall v,u,w\in T_pM.$$

注意到 D_vR 是一个曲率型张量场，故由引理 3.1，$\mathrm{D}_vR=0$.

17. 对于任意的点 $p\in M$，选取 M 在 p 点附近的单位正交标架场 $\{e_i\}$，使得在 p 点 $R_{ij}=\mathrm{Ric}(e_i,e_j)=\lambda_i\delta_{ij}$. 则由题设，在 p 点处成立

$$R(e_i,e_j,e_k,e_l)=\frac{1}{m-1}(R_{il}\delta_{jk}-R_{ik}\delta_{jl})=\frac{\lambda_i}{m-1}(\delta_{il}\delta_{jk}-\delta_{ik}\delta_{jl}).$$

由此可知，$\lambda_1=\cdots=\lambda_m=\lambda$. 再利用定理 3.2 和定理 3.5.

18. 在 T_pM 中选取一个单位正交基 $\{e_i\}$，使得 $R_{ij}=\mathrm{Ric}(e_i,e_j)=\lambda_i\delta_{ij}$，对于任意的点 $v\in S^{m-1}\subset T_pM$，若设 $v=\sum_i v^ie_i$，则有 $\mathrm{Ric}_p(v)=\sum_i\lambda_i(v^i)^2$. 由于 $|v|=1$，v 是 S^{m-1} 上的一个外向单位法向量. 对于任意的 $u=u^ie_i\in T_pM$，令 $W(u)=\sum_i\lambda_iu^ie_i$，则 W 是 T_pM 上的切向量场. 在单位球 B^m 上利用散度定理 (即第二章的定理 5.3)，并注意到 B^m 的体积 $V(B^m)=\frac{\omega_{m-1}}{m}$，可得

$$\begin{aligned}&\frac{m}{\omega_{m-1}}\int_{S^{m-1}}\mathrm{Ric}_p(v)\mathrm{d}V_{S^{m-1}}\\=&\frac{m}{\omega_{m-1}}\int_{S^{m-1}}\sum_i\lambda_i(v^i)^2\mathrm{d}V_{S^{m-1}}\\=&\frac{m}{\omega_{m-1}}\int_{S^{m-1}}\langle W(v),v\rangle\mathrm{d}V_{S^{m-1}}=\frac{m}{\omega_{m-1}}\int_{B^m}\mathrm{div}\,(W)\mathrm{d}V_{B^m}\\=&\sum_i\lambda_i=\sum_i\mathrm{Ric}_p(e_i)=S(p).\end{aligned}$$

19. (1) 利用第二章习题第 20 题或第 21 题.

(2) 设 g_0 是 (x,y) 平面上的标准黎曼度量，则 $g=F^2g_0$，并且

$$g_0\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right)=g_0\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right)=1,\quad g_0\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)=0.$$

由于 g_0 的黎曼曲率张量恒为零，$\rho=\ln F$，根据 (1) 中的关系式 (b)，M 的 Gauss 曲率是

$$K=\frac{R_{1221}}{g(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x})g(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y})}=-\frac{1}{F^2}\Delta_0\ln F.$$

20. (1) 先由本章习题第 19 题计算出黎曼曲率张量关于 F 的表达式：

$$R_{ijkl}=-\frac{1}{F^3}(F_{jl}\delta_{ik}+F_{ik}\delta_{jl}-F_{jk}\delta_{il}-F_{il}\delta_{jk})$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{F^4}\sum_h (F_h)^2(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk})\\
=&-\frac{1}{F}(F_{jl}g_{ik}+F_{ik}g_{jl}-F_{jk}g_{il}-F_{il}g_{jk})\\
&+\sum_h (F_h)^2(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk}).
\end{aligned}
$$

再利用推论 3.3 的结论.

(2) 根据结论 (1), 充分性可以直接验证. 下面证明必要性. 如果 g 具有常截面曲率 c, 则由结论 (1), 当 $i\neq j$ 时, $F_{ij}=0$, $F_{ii}=F_{jj}$, 因而可以设 $F=G_1(x^1)+\cdots+G_m(x^m)$, 则对于任意的 i, $F_{ii}=G_i''(x^i)$. 利用条件 $F_{ii}=F_{jj}(\forall i,j)$, 存在常数 a,b_i,c_i 使得 $G_i(x)=ax^2+b_ix+c_i$. 把 F 代入等式 $\sum\limits_k (F_k)^2+c=F(F_{ii}+F_{jj})$ 即可.

(3) 和 (4) 参照第三章例 1.3 的方法, 求出过原点的正规测地线, 考虑它们的总长度并利用 Hopf-Rinow 定理.

21. (1) 任意给定与 g 共形的黎曼度量 $\tilde g=e^{2\rho}g(\rho\in C^\infty(M))$, $\tilde g$ 的曲率张量、Ricci 曲率张量和数量曲率依次记为 $\tilde R_{ijkl}$, $\tilde R_{ij}$ 和 $\tilde S$. 令

$$\tilde\varphi_{ij}=\frac{1}{m-2}\tilde R_{ij}-\frac{\tilde S}{2(m-1)(m-2)}\tilde g_{ij},$$

则由本章习题第 19 题中的关系式 (c),(d) 可以计算出 $\tilde\varphi_{ij}=\varphi_{ij}-\rho_{ij}$. 再由共形曲率张量的定义进行验证.

22. (1) 由共形曲率张量场 C 的定义 (参看本章习题第 21 题) 易知

$$
\begin{aligned}
C(Z,X,Y)=&\mathcal{R}(X,Y)Z+\varphi(X,Z)Y-\varphi(Y,Z)X\\
&+g(X,Z)\varphi^*(Y)-g(Y,Z)\varphi^*(X),\\
&\forall X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M),
\end{aligned}
$$

其中 $\varphi^*:\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ 由下式确定:

$$g(\varphi^*(X),Y)=\varphi(X,Y),\quad \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M).$$

(2) 取 M 上的单位正交标架场 $\{e_i\}$, 并令

$$C_{klij}=g(C(e_k,e_l,e_j),e_i),$$

则由 (1) 和 φ_{ij} 的定义

$$
\begin{aligned}
C_{klij}=&R_{klij}+\frac{1}{m-2}(R_{ik}\delta_{jl}-R_{jk}\delta_{il}+R_{jl}\delta_{ik}-R_{il}\delta_{jk})\\
&-\frac{1}{(m-1)(m-2)}S(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{jk}\delta_{il}).
\end{aligned}
$$

当 $m=3$ 时, 逐个计算 C_{ijkl} 的第个分量, 可以验证 $C_{ijkl}=0$, $1\leq i,j,k,l\leq 3$.

(3) 定义 (0,3) 型张量场 T, 使得对于任意的 $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$,

$$T(X,Y,Z)=\sum_i g((\mathrm{D}_{e_i}C)(X,Y,Z),e_i).$$

利用 Bianchi 第二恒等式证明 $T_{kij}=-\frac{m-3}{m-2}D_{kij}$.

(4) 设 $\tilde g=e^{2\rho}g$, 用带 $\sim$ 的记号表示由 $\tilde g$ 定义的协变导数、张量或数量. 任取局部坐标系 $(U;x^i)$, 用下标中的 ";" 和 "," 分别表示张量关于联络 $\tilde{\mathrm{D}}$ 和 D 的协变导数, 比如

$$\tilde\varphi_{ki;j}=(\tilde{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\tilde\varphi)\left(\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^i}\right),\quad \varphi_{ki,j}=(\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\varphi)\left(\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^i}\right).$$

由本章习题第 19(1) 题中的关系式 (c) 和 (d) 导出 $\tilde\varphi_{ki}=\varphi_{ki}-\rho_{ki}$, 同时根据第二章习题第 21(1) 题又有如下的关系式:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{ki;j}=&\varphi_{ki,j}+\varphi_{ji}\rho_k-\varphi_{kj}\rho_i+g^{lp}\rho_p(\varphi_{kl}g_{ij}-\varphi_{il}g_{kj});\\
\rho_{ki;j}=&\rho_{ki,j}+\rho_{ji}\rho_k-\rho_{kj}\rho_i+g^{lp}\rho_p(\rho_{kl}g_{ij}-\rho_{il}g_{kj}).
\end{aligned}
$$

因而利用 Ricci 恒等式可以证明

$$
\begin{aligned}
\tilde D_{kij}=&\tilde\varphi_{ki;j}-\tilde\varphi_{kj;i}\\
=&\varphi_{ki;j}-\varphi_{kj;i}+\rho_{kj;i}-\rho_{ki;j}\\
=&\varphi_{ki,j}-\varphi_{kj,i}+\cdots+\rho_{kj,i}-\rho_{ki,j}+\cdots\\
=&D_{kij}-\rho_l C^l_{kij}.
\end{aligned}
$$

所以当 $m=3$ 时, $C\equiv 0$, 因而有 $\tilde D=D$.

23. (1) (必要性) 如果 M 是局部共形平坦的, 则在局部上存在共形度量 $\tilde g=e^{2\rho}g$, 使得 $\tilde g$ 的曲率张量恒为零. 由张量场 $\tilde C$ 和 $\tilde D$ 的定义便知, $\tilde C=0$,

$\bar{D} \equiv 0$. 再利用张量 C 和 D(当 $m=3$ 时) 的共形不变性.

(充分性) 设 $(U;x^i)$ 是 M 的任意的局部坐标系, $g_{ij}=g(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})$. 令

$$\varphi_{ij}=\frac{1}{m-2}R_{ij}-\frac{S}{2(m-1)(m-2)}g_{ij},$$

其中 R_{ij} 和 S 分别是度量 g 的 Ricci 曲率张量和数量曲率. 在 M 上考虑关于函数 ρ 的偏微分方程

$$\rho_{;ij}=\rho_{i,j}-\rho_i\rho_j+\frac{1}{2}g_{ij}g^{kl}\rho_k\rho_l=\varphi_{ij}.$$

利用 Ricci 方程证明: 如果充分性条件成立, 则上述方程是完全可积的. 因而在 U 的每一点附近存在光滑函数 ρ, 使得 $\rho_{;ij}=\varphi_{ij}$. 定义 $\bar{g}=e^{2\rho}g$, 说明 $\bar{g}$ 是平坦的.

(2) 首先当 $m=\dim M=2$ 时, 局部上的等温参数网的存在性即说明 M 是局部共形平坦的. 当 $m\geq 3$ 时, 计算常曲率空间的共形曲率张量 C 和 ($m=3$ 时的) 张量 D, 它们都恒等于零.

(3) 如果 M 是 Einstein 流形, 则存在常数 λ 使得 $R_{ij}=\lambda g_{ij}$. 因为 M 是局部共形平坦的, 故由 (1), $C^l_{ijk}=0$. 利用本章习题第 21(2) 题, 曲率张量 R^l_{kij} 可以表示为

$$R^l_{kij}=\frac{\lambda}{m-1}(\delta^l_i g_{kj}-\delta^l_j g_{ki}).$$

24. (1) 利用第二 Bianchi 恒等式.

(2) 如果结论不成立, 则在 M 上存在一个平行的单位切向量场 e, 其 Ricci 曲率为零, 即 $\lambda=0$, 矛盾.

25. 利用曲率张量 R^l_{kij} 的表达式 (1.4).

习 题 五

1. (反证法) 如果 $J(t)$ 的零点不是孤立的, 则有 $t_0\in[a,b]$, 以及数列 $\{t_n\}\subset[a,b]$, 满足 $t_n\neq t_0$, $t_n\to t_0\,(n\to\infty)$, 并且 $J(t_n)=J(t_0)=0$. 设 $P_t:T_{\gamma(t_0)}M\to T_{\gamma(t)}M$ 是沿 $\gamma(t)$ 的平行移动. 根据第二章的定理 7.2,

$$J'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{(P_t)^{-1}J(t)-J(t_0)}{t-t_0}=\lim_{n\to\infty}\frac{(P_{t_n})^{-1}J(t_n)-J(t_0)}{t_n-t_0}=0.$$

于是由定理 1.2 易知, $J(t)\equiv 0$, 与假设条件矛盾.

3. 设 $\tilde{J}$ 是测地变分 $\Phi(t,u)=\exp_{\gamma(0)}t(\gamma'(0)+uJ'(0))$ 的变分向量场, 则

$$\tilde{J}(t)=(\exp_{\gamma(0)})_{*t\gamma'(0)}(tJ'(0))=t(\exp_{\gamma(0)})_{*t\gamma'(0)}J'(0).$$

由此可知, $\tilde{J}(0)=0=J(0)$, $\tilde{J}'(0)=J'(0)$.

4. 令 $p=\gamma(0)$. 由例 1.1, M 上满足 $J_1(0)=0$, $J_1'(0)=\frac{w_0}{|w_0|}$ 的 Jacobi 场 J_1 是

$$J_1(t)=\frac{\sinh\sqrt{-c}t}{\sqrt{-c}}w(t).$$

由 (1.13) 式 $J_1(t)=(\exp_p)_{*t\gamma'(0)}(tw(0))$, 从而有 $J(t)=J_1(t)|w_0|$. 再利用 Jacobi 场的唯一性和条件 $|v|=1$.

5. (1) 设 $\varphi(u,p)$ 是 Killing 向量场 X 生成的局部单参数变换群, 则有 $\varepsilon>0$, 使得对于任意的 $(t,u)\in[0,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)$, $\varphi(u,\gamma(t))$ 有意义. 令 $\Phi(t,u)=\varphi(u,\gamma(t))$, 则 $\Phi:[0,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是曲线 $\gamma(t)$ 的一个测地变分, 其变分向量场是

$$\Phi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)\bigg|_{u=0}=\frac{\partial}{\partial u}\bigg|_{u=0}\varphi(u,\gamma(t))=X_{\gamma(t)}.$$

因而由命题 1.1, $X_{\gamma(t)}$ 是沿 γ 的 Jacobi 向量场.

(2) 定义 M 的子集

$$M_0=\{q\in M;\ X(q)=0,\ 并且\ \forall v\in T_qM, D_vX=0\}.$$

则由假设, M_0 是 M 的一个非空闭子集. 只需说明 M_0 也是 M 的开子集即可. 为此, 设 $q_0\in M_0$. 取 $\delta>0$, 使得测地球 $\mathscr{B}_{q_0}(\delta)$ 是 M 在点 q_0 的一个法坐标邻域. 再利用 (1) 证明 $\mathscr{B}_{q_0}(\delta)\subset M_0$.

6. (1) 取充分小的正数 δ, 使得 $\exp_p$ 在开球 $B_p(\delta)\subset T_pM$ 内无退化点. 设 $P_b:T_pM\to T_{\gamma(b)}M$ 是 M 中沿 γ 的平行移动. 由 (1.13) 式, 对于任意的 $v\in V$, $v\neq 0$, $J(t)=t(\exp_p)_{*t\gamma'(0)}(v)$ 是沿 γ 的 Jacobi 场, 它满足初始条件 $J(0)=0$, $J'(0)=v$. 由假设, 存在沿 γ 平行的单位向量场 $E(t)$, 使得 $J(t)=f(t)E(t)$, 其中 $f\in C^\infty([0,b])$. 由此证明 $P_b(v)=f'(0)E(b)\in T_{\gamma(b)}S$.

(2) 先证明: 对于任意三个互相正交的单位切向量 $u,v,w\in T_pM$, 有 $\langle R(u,$

$v)u, w) = 0$，因而有

$$K(u, v) + K(u, w) = 2K(u, v + w),$$

$$K(u, v) + K(u, w) = K(u, v - w),$$

其中的第二个式子是把第一个式子中的 w 用 $-w$ 替代后得到的．因此，截面 $[u \wedge (v + w)]$ 所对应的截面曲率 $K(u, v + w)$ 和把 $[u \wedge (v + w)]$ 绕 u 旋转 $90°$ 后得到的截面 $[u \wedge (v - w)]$ 所对应的截面曲率 $K(u, v - w)$ 相等．由此又知，$K(u, v) = K(u, w)$．于是，对于任意的 $\theta \in [0, 2\pi]$，

$$K(u, v\cos\theta + w\sin\theta) = \cos^2\theta K(u, v) + \sin^2\theta K(u, w) = K(u, v).$$

7. 设 $V \subset T_{\gamma(0)}M$ 是线性映射 $(\exp_{\gamma(0)})_{*b\gamma'(0)}$ 核空间．根据 (1.13) 式可以建立线性映射 $\Psi : V \to \mathscr{J}_0^b(\gamma)$，使得

$$\Psi(v) = t(\exp_{\gamma(0)})_{*t\gamma'(0)}(v).$$

再证明 Ψ 既是单射又是满射．

8. (2) 设 $K_t(e_i(t)) = a_i^j(t)e_j(t)$，$v = \gamma'(0)$，以 $P_t : T_pM \to T_{\gamma(t)}M$ 表示沿 γ 的平行移动．由于 $D_{\gamma'(t)}R = 0$，

$$\begin{aligned}P_t(a_i^j(0)e_j) =& P_t(\mathcal{R}(e_i, v)v) = \mathcal{R}(P_t(e_i), P_t(v))P_t(v)\\ =& a_i^j(t)P_t(e_j) = P_t(a_i^j(t)e_j).\end{aligned}$$

(4) 设 λ 是线性映射 K_0 的任意一个正特征根，则初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + \lambda f = 0,\\ f(0) = 0, \quad f'(0) = 1,\end{cases}$$

的解是 $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}t$，其零点是 $t = k\pi/\sqrt{\lambda}$，这里 k 是非负整数．

9. 由于 $f_{*p} : T_pM \to T_{\beta(a)}N$ 是线性同构，存在 $v \in T_pM$，使得 $f_{*p}(v) = \beta'(a)$．因为 (M, g) 是完备的黎曼流形，所以由 **Hopf-Rinow 定理**，存在测地线 $\tilde{\gamma} : [a, +\infty) \to M$，满足 $\tilde{\gamma}(a) = p$，$\tilde{\gamma}'(a) = v$．令 $\tilde{\beta} = f \circ \gamma$，则 $\tilde{\beta}$ 是 N 中的测地线，它满足 $\tilde{\beta}(a) = \beta(a)$，$\tilde{\beta}'(a) = f_{*p}(v) = \beta'(a)$．于是由测地线的唯一性，$\tilde{\beta}|_{[a,b]} = \beta$．易知，$\gamma = \tilde{\gamma}|_{[a,b]}$ 即为 M 中满足 $f \circ \gamma = \beta$ 的测地线．

10. 仿照 Cartan-Hadamard 定理 (参看定理 3.3) 的证明方法可以证明 (M, g) 与欧氏空间 $\mathbb{R}^m = T_pM$ 微分同胚．

11. (1) 由指数映射的定义，$\exp_p$ 把 T_pM 上过原点的直线 l 映射为 M 上的一条经线，同时把 T_pM 上以原点为中心的同心圆映射为 M 的纬圆．

12. 设 g 是 M 上的黎曼度量．则 $\tilde{g} = \pi^* g$ 是 $\tilde{M}$ 上的覆叠度量，并且 $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g)$ 是局部等距．对于任意的 $p \in M$，记 $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$．
(必要性) 利用反证法并参考本章习题第 9 题证明方法．
(充分性) 设 $\tilde{\gamma}(t)$ 是 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ 上以点 $\tilde{p}$ 为始点的任意一条正规测地线，$\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$，$v = \pi_*(\tilde{\gamma}'(0))$．因为 (M, g) 是完备的，所以有正规测地线 $\gamma : [0, +\infty) \to M$ 满足 $\gamma(0) = p$，$\gamma'(0) = v$．由于 π 是覆叠映射，对于任意的 $b > 0$，$\gamma|_{[0,b]}$ 在点 $\tilde{p}$ 处有唯一的提升，它是 $\tilde{M}$ 中过 $\tilde{p}$ 点且与 $\tilde{\gamma}'(0)$ 相切的测地线．由测地线的唯一性，测地线 $\tilde{\gamma}$ 的定义域可以延拓到闭区间 $[0, b]$．

13. 设 $\mathbb{R}_*^2 = \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$，则包含映射 $i : \mathbb{R}_*^2 \to \mathbb{R}^2$ 是局部等距．显然，$\mathbb{R}^2$ 是完备的，但是 $\mathbb{R}_*^2$ 却不是完备的．更一般地，设 (M, g) 是一个完备的黎曼流形，$\pi : \tilde{M} \to M$ 是 M 的覆叠映射，$\tilde{p} \in \tilde{M}$．令 $\tilde{M}_* = \tilde{M}\backslash\{\tilde{p}\}$，则 $\pi : (\tilde{M}_*, \pi^* g) \to (M, g)$ 是局部等距，但 $(\tilde{M}_*, \pi^* g)$ 不是完备的黎曼流形．

14. 根据本章习题第 12 题的结论，这个习题的证明只有一个难点，即 M 的不可延拓性．假设 M 是可以延拓的，即存在连通的黎曼流形 M'，使得 $M \neq M'$ 是 M' 的开子流形．设 $p' \in M' \cap \partial M$，$W' \subset M'$ 是点 p' 的一个凸邻域．
如果我们能够证明 $W' - \{p'\} \subset M$，则可导致矛盾，其原因如下：利用 π 的局部等距性易知，此时 $\pi(W' - \{p'\}) = U$ 是点 $(0, 0)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中的一个邻域，于是可以考虑 U 内以 $(0, 0)$ 为心的圆周 α 并把它提升到 M 中去，这显然是不可能的．
为了证明 $W' - \{p'\} \subset M$，注意到，对于任意的点 $p \in M$，存在唯一的测地线通过 p 点并且不能扩展到所有的 $t \in \mathbb{R}$．设 $q \in W' \cap M$，并取 M' 中从 q 到 p' 的测地线 $\tilde{\gamma}$．则 $\tilde{\gamma}$ 开始时与 M 中的一条测地线重合，因而是那条通过点 q 但不能扩展到整个 $\mathbb{R}$ 上的唯一的测地线．由唯一性以及 p' 为 M 的边界点这一事实可知，$\tilde{\gamma} \cap W'$ 中除了 p' 点以外的所有点都属于 M，原因是 $\tilde{\gamma}$ 可以任意地接近 M 的边界．最后，对于任意的 $q' \in W'\backslash\tilde{\gamma}$，根据上述的唯一性，连接 q' 和 q 的测地线一定完全包含在 M 中，于是 $q' \in M$．故

有 $W-\{p'\}\subset M$.

16. (必要性) 在 $\mathscr{B}_p(\delta)$ 中选取测地标架场 $\{e_i\}$(参看第三章习题第 12 题), 令

$$R_{ijkl}=R(e_k,e_l,e_i,e_j)=R(e_i,e_j,e_k,e_l).$$

由于 $\mathrm{D}R=0$, R_{ijkl} 沿着从 p 点出发的测地线为常数. 以 $\alpha:T_pM\to T_pM$ 表示由 $v\mapsto -v$ 确定的线性等距同构, 定义 $\sigma=\exp_p\circ\alpha\circ(\exp_p)^{-1}$. 利用 Cartan 等距定理可以说明 σ 是一个等距.
(充分性) 设 $p\in M$, $v\in T_pM$. 取测地线 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$, 使得 $\gamma(0)=p$, $\gamma'(0)=v$. 再取定 T_pM 的单位正交基 $\{e_i\}$, 通过平行移动可以得到沿 γ 的标架场 $\{e_i(t)\}$. 令 $R_{ijkl}(t)=R(e_i(t),e_j(t),e_k(t),e_l(t))$, 则有

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}_vR)(e_i(t),e_j(t),e_k(t),e_l(t))&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R_{ijkl}(t)\right|_{t=0}\\&=\lim_{t\to0}\frac{R_{ijkl}(t)-R_{ijkl}(-t)}{2t}=0,\end{aligned}$$

其中在最后一步利用了局部对称 σ 的等距性. 另外, 在这里还应用了第四章习题第 5 题的结论.

17. 设 σ 是 $S^n(r)$ 上的任意一个等距变换, $p\in S^n$. 取定 $T_pS^n(r)$ 的一个单位正交基 $\{e_i\}$, 则 $\{\frac{1}{r}p,e_i\}$ 是欧氏向量空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的一个单位正交基; 同时, $\{\frac{1}{r}\sigma(p),\sigma_*(e_i)\}$ 也是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的一个单位正交基. 由 $\frac{1}{r}p\mapsto\frac{1}{r}\sigma(p)$, $e_i\mapsto\sigma_*(e_i)$ $(1\le i\le n)$ 确定了 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的一个正交变换 $A\in O(n+1)$. 令 $\tilde\sigma=A|_{S^n(r)}$, 则 $\tilde\sigma$ 是 $S^n(r)$ 上的一个等距变换, 且有

$$\tilde\sigma(p)=\tilde p=\sigma(p),\quad \tilde\sigma_{*p}=A|_{T_pS^n(r)}=\sigma_{*p}.$$

根据引理 5.1, $\sigma=\tilde\sigma$. 不难验证, 由 $A\mapsto A|_{S^n(r)}\in I(S^n(r))$ 确定正交群 $O(n+1)$ 到等距变换群 $I(S^n(r))$ 上的同构.

19. (3) 设 $A=(a_\beta^\alpha)\in G$. 则对于任意的 $p=(p^1,\cdots,p^{n+1})\in H^n(c)$,

$$\langle A(p),A(p)\rangle_1=\langle p,p\rangle_1=-a^2.$$

由 $H^n(c)$ 和 G 的定义以及结论 (1) 证明 $a_{n+1}^{n+1}p^{n+1}>-\sum_i a_i^{n+1}p^i$. 从而 $A(p)$ 的第 $n+1$ 个分量

$$a_1^{n+1}p^1+\cdots+a_{n+1}^{n+1}p^{n+1}>0.$$

选取 $H^n(c)$ 的一个定向并证明 G 的元素保持这个定向不变.
(4) 设从基底 $\{\delta_1,\cdots,\delta_{n+1}\}$ 到

$$\{e_1,\cdots,e_n,\eta(p)\}\ \ 和\ \ \{f_1,\cdots,f_n,\eta(q)\}$$

的过渡矩阵分别是 B_p 和 C_q, 则

$$\begin{aligned}(\delta_1,\cdots,\delta_{n+1})AB_p=&A(e_1,\cdots,e_n,\eta(p))=(f_1,\cdots,f_n,\eta(q))\\=&(\delta_1,\cdots,\delta_{n+1})C_q.\end{aligned}$$

说明 $B_p,C_q\in G$ 并且 $A=C_qB_p^{-1}$. 再利用第三章习题第 30 题, $H^n(c)$ 是一个截面齐性空间.

习 题 六

1. (1) 记 $\tilde U=\Phi_*(\frac{\partial}{\partial u})$, $\tilde T=\Phi_*(\frac{\partial}{\partial t})$, 则 $U=\tilde U|_{u=0}$, $\gamma'=\tilde T|_{u=0}$. 由定义

$$E(u)=\frac12\int_0^b\left\langle\Phi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),\Phi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right\rangle=\frac12\int_0^b\langle\tilde T,\tilde T\rangle\mathrm{d}t.$$

设 D 是拉回丛 $\Phi^*(TM)$ 上的诱导联络 (参看第二例 8.2), 则由第二章的 (8.7) 式和 (8.8) 式可以算出

$$\begin{aligned}E'(u)=&\sum_{i=0}^{r}\left\langle\Phi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right),\Phi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right\rangle\Bigg|_{t_i^+}^{t_{i+1}^-}\\&-\int_0^b\left\langle\Phi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right),\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\Phi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right\rangle\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

(2) 令 $U(0)=U(b)=0$ 并利用第三章定理 3.5 的证明技巧.
(3) 利用第四章习题第 3 题进行计算可得

$$\begin{aligned}E''(u)=&\langle\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u}}\tilde U,\tilde T\rangle\big|_0^b+\sum_{i=0}^{r}\left\langle\tilde U,\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde U\right\rangle\Big|_{t_i^+}^{t_{i+1}^-}\\&-\int_0^b\left\langle\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde U,\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde T\right\rangle\mathrm{d}t\\&-\int_0^b\left\langle\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde U-\mathcal{R}(\tilde T,\tilde U)\tilde T,\tilde U\right\rangle\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

(4) 根据分部积分法可知

$$\begin{aligned}I_\gamma(U,U)&=\int_0^b\{\langle U',U'\rangle+\langle R(\gamma',U)\gamma',U\rangle\}\mathrm{d}t\\&=\sum_{i=0}^{v}\langle U',U\rangle\Big|_{t_i^+}^{t_{i+1}^-}-\int_0^b\langle U''-R(\gamma',U)\gamma',U\rangle\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

3. 如果结论不对，则存在正数 r_0，使得 $\inf\limits_{x^2+y^2\ge r_0}K(x,y)=a^2>0$. 令

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\le r_0\},\quad D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\ge r_0\},$$

则 D 是紧致子集因而关于度量 g 是有界的. 设 D 的直径为 $d(D)$. 对于 $\mathbb{R}^2$ 上的任意两个不同点 p,q, 设 γ 是 $\mathbb{R}^2$ 中连接 p,q 的最短测地线，其弧长记为 $l=L(\gamma)$. 根据 Bonnet-Myers 定理的证明分以下四种情况进行讨论：(1) $p,q\notin D$, 并且 $\gamma\subset D_1$; (2) $p,q\notin D$, 并且 γ 上含有 D 的内点; (3) $p\in D, q\notin D$; (4) $p,q\in D$. 上面的讨论可以得到，γ 的弧长 $l\le d(D)+\frac{2\pi}{a}$. 再利用完备性和 Bonnet-Myers 定理.

4. 证明方法类似于 Bonnet-Myers 定理的证明，要用到如下的分部积分法：

$$\int_0^l\left(\sin\frac{\pi t}{l}\right)^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=f\left(\sin\frac{\pi t}{l}\right)^2\Big|_0^l-\frac{\pi}{l}\int_0^l\sin\frac{2\pi t}{l}f\mathrm{d}t.$$

5. 设 M 是截面曲率为 1 的完备常曲率空间. 根据 Synge 定理，M 的基本群 $\pi_1(M)=\{1\}$ 或 $\mathbb{Z}_2$. 如果 $\pi_1(M)=\{1\}$ 则 M 是一个截面曲率为 1 的空间形式，因而由第五章的定理 5.2, M 与单位球面 S^{2k} 等距; 如果 $\pi_1(M)=\mathbb{Z}_2$, 则由于 M 的通用覆叠空间 $\tilde{M}$ 和 S^{2k} 等距，M 必与实射影空间 $\mathbb{R}P^{2k}$ 等距.

6. 不妨设 $\gamma:[0,l]\to M$ 是一条正则测地线，$p=\gamma(0)$. 则沿 γ 的平行移动给出了 T_pM 到自身的一个保持定向不变的正交变换 $P:T_pM\to T_pM$, 并且显然以 1 为其特征值. 说明 1 的重数大于 1, 因而存在单位向量 $v\in T_pM$, $v\perp\gamma'(0)$, 满足 $P(v)=v$. 由此得到一个沿 γ 平行且处处正交于 $\gamma'(t)$ 的单位向量场 $U(t)$. 考虑 γ 的如下变分 $\Phi:[0,l]\times(-\varepsilon,\varepsilon)$, $\varepsilon>0$:

$$\Phi(t,u)=\exp_{\gamma(t)}(uU(t)),\quad\forall(t,u)\in[0,l]\times(-\varepsilon,\varepsilon)$$

利用相应的弧长第二变分公式证明 $L''(0)<0$.

7. 在单位球面 S^2 上选取连接一对对径点 $p,-p$ 的正规测地线 γ. 设 $v(t)$ 是沿 γ 的平行向量场，并满足 $\langle v,\gamma'\rangle=0$, $|v|=1$. 令 $U(t)=f(t)v(t)$. 计算以 $U(t)$ 为变分向量场的第二变分公式，可得

$$I_\gamma(U,U)=\int_0^\pi(f')^2\mathrm{d}t-\int_0^\pi f^2\mathrm{d}t.$$

再利用定理 4.6 和第五章的例 1.1.

8. 对于任意的点 $p\in M$, 以及任意的两个单位正交向量 $E_1,E_2\in T_pM$, 设 $\gamma:[0,\pi]\to M$ 是满足 $\gamma(0)=p$, $\gamma'(0)=E_1$ 的正规测地线，则 $q=\gamma(\pi)$ 是点 p 沿 γ 的第一个共轭点. 考虑 γ 的测地变分 $\Phi:[0,\pi]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$, 其中

$$\Phi(t,u)=\exp_p t(E_1\cos u+E_2\sin u),\quad\forall(t,u)\in[0,\pi]\times(-\varepsilon,\varepsilon).$$

由假设，Φ 的变分向量场 $J(t)$ 是满足 $J(0)=0$, $J(\pi)=0$ 的法 Jacobi 场. 根据引理 4.3, 存在沿 γ 的向量场 $E(t)$, 使得 $J(t)=tE(t)$. 于是, $E(0)=\lim\limits_{t\to0}E(t)=E_2$. 取沿 γ 平行的单位正交标架场 $\{e_i(t)\}$, 使得 $e_m=\gamma'$, 并令 $J=\sum\limits_{i=1}^{m-1}J^ie_i$. 记 $K(t)=K(\gamma'(t),J(t))$, 则当 $t>0$ 时, $K(t)=K(\gamma'(t),E(t))$. 利用本章习题第 7 题的结论和分部积分法,

$$\begin{aligned}0=I_\pi(J,J)&=\int_0^\pi\sum_i(J^{i\prime})^2\mathrm{d}t-\int_0^\pi K(t)\left(\sum_i(J^i)^2\right)\mathrm{d}t\\&\ge\sum_i\int_0^\pi(J^i)^2(1-K(t))\mathrm{d}t\ge0.\end{aligned}$$

所以，$K(t)=1$. 令 $t\to0$, 可得 $K(E_1,E_2)=1$. 再利用第五章的定理 5.2.

9. 设 φ 是初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+a\varphi=0,\quad\varphi(0)=1,\quad\varphi'(0)=0$$

的任意一个解. 如果 φ 没有正的零点，则对于任意的 $t>0$, $\varphi(t)>0$. 于是 $\varphi''(t)=-a(t)\varphi(t)\le0$. 由于 $a(0)>0$, $\varphi(0)=1$, 存在 $\varepsilon>0$, 使得在 $[0,\varepsilon]$ 上，$\varphi''(t)<0$, 从而有 $\varphi'(\varepsilon)<\varphi'(0)=0$. 根据 Lagrange 中值定理，当 $t\in(\varepsilon,+\infty)$ 时，存在 $\xi\in(\varepsilon,t)$, 使得 $\varphi(t)=\le\varphi(\varepsilon)+\varphi'(\varepsilon)(t-\varepsilon)$.

10. 设 X 是沿 γ 的平行向量场，并满足 $\langle\gamma', X\rangle = 0$, $|X| = 1$. 令

$$\psi_X = \langle R(\gamma', X)\gamma', X\rangle, \quad K(t) = \inf_X \psi_X(t),$$

并设 $a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为满足

$$0 \le a(t) \le K(t), \quad 0 < a(0) < K(0), \quad t \in \mathbb{R}$$

的光滑函数. 根据本章习题第 9 题的结论，存在光滑函数 φ 满足

$$\varphi'' + a\varphi = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi(0) = 1,$$

并且具有两个零点 $t_1 < 0$, $t_2 > 0$. 证明：对于向量场 $Y = \varphi X$, 指标形式满足

$$I_{t_1}^{t_2}(Y, Y) < -\int_{t_1}^{t_2}(\varphi'' + a\varphi)\varphi \mathrm{d}t = 0.$$

11. 设 $\gamma: (-\infty, +\infty) \to M$ 是 M 中的任意一条正规测地线. 根据本章习题第 10 题的结论，存在 $t_0 > 0$, 使得测地线段 $\tilde{\gamma} = \gamma|_{[-t_0, t_0]}$ 的指数 $\operatorname{index}(\tilde{\gamma}) \ge m - 1$. 因此当 $m \ge 2$ 时， $\operatorname{index}(\tilde{\gamma}) > 0$. 所以存在 $Y \in \mathscr{V}_0^{\perp}(\tilde{\gamma})$, 使得指标 $I(Y, Y) < 0$. 取 $\tilde{\gamma}$ 的一个具有固定端点的变分 $\Phi: [-t_0, t_0] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, 使得 $Y = \frac{\partial\Phi}{\partial u}|_{u=0}$. 由命题 4.1, $\frac{d^2}{du^2}L(\Phi_u)|_{u=0} = I(Y, Y) < 0$. 这说明 $\tilde{\gamma}$ 不是 M 中连接 $\gamma(-t_0)$ 和 $\gamma(t_0)$ 两点的最短测地线. 所以 γ 不是 M 中的测地直线. 由 γ 的任意性，结论得证.
显然，圆柱面 $M = S^{m-1} \times \mathbb{R}$ 的截面曲率处处非负，并且在 M 上存在测地直线.

12. 在单位球面 $S^m(m \ge 3)$ 上沿正规测地线 $\gamma(t)(0 \le t \le l < \pi)$ 上取两个正交于 $\gamma'(t)$ 的平行向量场 $A(t), B(t)$, 使得 $|A(t)| = |B(t)| = 1$, 并且 $A(t) \perp B(t)$. 令 $J(t) = A(t)\cos t + B(t)\sin t$. 则由第五章的例 1.1, J 是沿 γ 的一个非零的法 Jacobi 场. 再由命题 4.2, $I(J, J) = \langle J', J\rangle|_0^l = 0$. 所以，指标形式 I_γ 在 $\mathscr{V}^{\perp}(\gamma)$ 上不是正定的. 适当地选取 γ 的定义区间，还可以找到沿 γ 的法 Jacobi 场 $\tilde{J}$, 使得 $I_\gamma(\tilde{J}, \tilde{J}) < 0$.

14. 不失一般性，可以假设 $L(\gamma_0) < \frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$, 否则就没有必要继续证明. 根据 Rauch 比较定理， $\exp_p: T_pM \to M$ 在开球 $B = B_p(\frac{\pi}{\sqrt{K_0}})$ 中没有退化点. 对于比较小的 s, 可以把 α_s 提升到切空间 T_pM 中去，即对于这样的 s, 在 T_pM

中存在曲线 $\tilde{\alpha}_s$ 连接 $0 = \exp_p^{-1}(p)$ 和 $\tilde{q} = \exp_p^{-1}(q)$, 使得 $\alpha_s = \exp_p \circ \tilde{\alpha}_s$. 由于指数映射 $\exp_p$ 在 B 内是局部光滑同胚，不可能对所有的 $s \in [0, 1]$, 上述的提升曲线 $\tilde{\alpha}_s$ 都存在. 否则，一定存在不同于原点的点 $\tilde{q} \in B$, 使得对于任意的 $s \in [0, 1]$, 有 $\tilde{\alpha}_s(1) = \tilde{q}$. 特别地， $\tilde{\alpha}_1(1) = \tilde{q}$. 因此，我们断言：对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $s(\varepsilon) \in [0, 1]$, 使得 $\alpha_{s(\varepsilon)}$ 可以提升到 $\tilde{\alpha}_{s(\varepsilon)}$, 并且 $\tilde{\alpha}_{s(\varepsilon)}$ 上含有到 B 的边界 ∂B 的距离小于 ε 的点. 如果这个断言不成立，则存在某个 $\varepsilon > 0$, 所有的提升 $\tilde{\alpha}_s$ 到 ∂B 的距离均大于 ε. 因此使 α_s 可以提升到 T_pM 中去的所有 s 构成连通集 $[0, 1]$ 的一个既开且闭的子集，因而由区间 $[0, 1]$ 的连通性， α_1 也可以提升，矛盾. 可见断言成立. 于是对于任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$L(\gamma_0) + L(\gamma_{s(\varepsilon)}) \ge \frac{2\pi}{\sqrt{K_0}} - 2\varepsilon.$$

取定一个趋于 0 的数列 $\{\varepsilon_n\}$, 则有收敛于 s_0 子列 $\{s(\varepsilon_n)\}$. 所以，有曲线 α_{s_0} 满足

$$L(\gamma_0) + L(\gamma_{s_0}) \ge \frac{2\pi}{\sqrt{K_0}}.$$

15. 首先在 Klingenberg 引理中令 $K_0 = \frac{1}{n}$ (n 为任意自然数), 即可证明：对于任意的 $p, q \in M$, $p \ne q$, M 中存在唯一的测地线连接点 p, q. 事实上，如果存在两条连接 p, q 的测地线，则它们必定是同伦的，从而由 Klingenberg 引理，在相应的伦移中必有曲线列 $\{\gamma_n\}$, 其长度 $L(\gamma_n) \ge \pi\sqrt{n} \to +\infty$, 这是不可能的. 在此基础上可以进一步说明指数映射 $\exp_p$ 在 T_pM 上没有退化点且为单射，因而是一个光滑同胚.

16. (1) 根据假设条件和分部积分法，要证明的等式是显然的. 由初值条件易知，对于充分小的 $t > 0$, $f(t) > 0$. 如果存在 $t_1 \in (0, t_0)$, 使得 $\bar{f}|_{(0,t_1]} > 0$, $f(t_1) = 0$, 并且 $f|_{(0,t_1)} > 0$, 则有 $f'(t_1) \le 0$. 代入等式

$$(\bar{f}f' - f\bar{f}')\big|_0^{t_1} + \int_0^{t_1}(K - \bar{K})f\bar{f}\mathrm{d}t = 0$$

知 $K|_{[0,t_1]} \equiv \bar{K}|_{[0,t_1]}$, 从而由微分方程解的唯一性， $f|_{[0,t_1]} = \bar{f}|_{[0,t_1]}$, 这与假设 $f(t_1) = 0$ 矛盾.
(2) 根据条件 $K \le \bar{K}$ 可以推得 $\frac{f'}{f} \ge \frac{\bar{f}'}{\bar{f}}$, 即有 $(\ln f)' \ge (\ln \bar{f})'$. 设 $0 < t_0 \le t \le b$. 对前面的不等式在区间 $[t_0, t]$ 上进行积分得

$$\frac{f(t)}{\bar{f}(t)} \ge \frac{f(t_0)}{\bar{f}(t_0)}, \quad \forall t_0 \in (0, t].$$

令 $t_0\to 0$ 并利用

$$\lim_{t_0\to 0}\frac{f(t_0)}{\bar f(t_0)}=\lim_{t_0\to 0}\frac{f'(t_0)}{\bar f'(t_0)}=1,$$

即得所要证明的不等式.

17. 设 $E(t)$ 是沿 γ 平行并且处处正交于 γ' 的单位向量场, 则 Jacobi 场 J 可以表示为

$$J(t)=f(t)E(t),\quad \forall t\in[0,+\infty),\qquad f(0)=f(t_0)=0,$$

其中的函数 f 在 $(0,t_0)$ 内处处不等于零. 不妨设 $f|_{(0,t_0)}>0$. 代入 Jacobi 方程, 可得

$$f''(t)+K(t)f(t)=0.$$

由本章习题第 16(1) 题中的积分式可得

$$\int_0^{t_0}(K-L)f\bar f\mathrm{d}t+\bar f(t_0)f'(t_0)-\bar f(0)f'(0)=0.$$

利用 $f'(t_0)\le 0$, $f'(0)\ge 0$ 对函数 $\bar f$ 进行讨论.

18. 可以分以下三步来完成证明:

(1) 定义

$$h(t)=\int_t^{\infty}K(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{4(t-1)},$$

则可以验证, $h'(t)+(h(t))^2\le -K(t)$. 令 $L=-(h'+h^2)$, 则有 $L(t)\ge K(t)$.

(2) 对于 $t\ge 0$, 定义

$$f(t)=e^{\int_0^t h(s)\mathrm{d}s},\quad t\ge 0.$$

则 $f>0$, $f(0)=1$. 此外, 通过计算可以证明

$$f''(t)+L(t)f(t)=0.$$

(3) 利用 Sturm 震荡定理证明: 对于任意的 $t_0\in(0,+\infty)$, 沿测地线 γ 不存在满足 $J(0)=J(t_0)=0$ 的 Jacobi 场, 因而点 p 沿 γ 没有共轭点.

19. (1) 在 Rauch 比较定理中取 $\tilde M$ 为截面曲率为 β 的常曲率空间, $\tilde\gamma:[0,b]\to\tilde M$ 是 $\tilde M$ 中的正规测地线. 则 $\tilde M$ 上沿 $\tilde\gamma$ 的法 Jacobi 场 $\tilde J$ 具有如下的一般表达形式 (参看第五章的例 1.1):

$$\tilde J(t)=S'_\beta(t)A(t)+S_\beta(t)B(t),$$

其中 $A(t)$ 和 $B(t)$ 是沿 $\tilde\gamma$ 的平行向量场, 并满足

$$A(t)\parallel\gamma'(t),\quad B(t)\perp\gamma'(t).$$

再利用 Rauch 比较定理.

(2) 在 Rauch 比较定理中先取 $\tilde M$ 为本题中已知的黎曼流形 M, 再把定理中的 M 取为截面曲率为 β 的常曲率空间. 仿照 (1) 的讨论可知, $|J(t)|\le S_\beta(t)$.

习 题 七

1. 利用第一章习题第 75 题和第二章习题第 25 题.

(2) 分别取 $X\in\Gamma(TM_1)$, $Y\in\Gamma(TM_2)$, 则 $\bar X=X\circ\pi_1$ 和 $\bar Y=Y\circ\pi_2$ 都是 M 上的光滑切向量场. 分别取 M_1 和 M_2 上的局部标架场, 证明 $\mathrm{D}_{\bar X}\bar Y=\mathrm{D}_{\bar Y}\bar X=\mathrm{D}_{\bar X}\mathrm{D}_{\bar Y}\bar Y=0$.

2. (1) 映射 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$ 的 Jacobi 矩阵的转置是

$$(J(f))^t=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

此外, $\mathbb{R}^2$ 上的单位正交标架场 $\{\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\varphi}\}$ 在 f_* 下的像是

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)=\frac{1}{\sqrt2}(-\sin\theta,\cos\theta,0,0),$$
$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)=\frac{1}{\sqrt2}(0,0,-\sin\varphi,\cos\varphi).$$

(2) 利用本章习题第 1 题的结论 (2).

4. 根据乘积度量的黎曼联络的定义可知, 如果设 h_i 是 M_i 在 N_i 中第二基本形式 $(i=1,2)$, 则 $M_1\times M_2$ 在 $N_1\times N_2$ 中的第二基本形式 h 满足下面的

关系式

$$h(\tilde{X}_1 - \tilde{Y}_1, \tilde{X}_2 + \tilde{Y}_2) = h_1(X_1, Y_1) + h_2(X_2, Y_2),$$
$$\forall X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M_1), \quad Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2),$$

其中 $\tilde{X}_i = X_i \circ \pi_1$, $\tilde{Y}_i = X_i \circ \pi_2$, $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ 自然射影 $(i = 1, 2)$. 由此容易证明，在题设条件下，$h \equiv 0$.

5. 设 $\pi_1, \pi_2 : S^2 \times S^2 \to S^2$ 是自然射影，$(p, q) \in S^2 \times S^2 = M$，则 $T_{(p,q)}M = T_pS^2 \oplus T_qS^2$. 取 $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(S^2)$. 利用第二章习题第 25 题说明，$M$ 的黎曼曲率张量 $\tilde{M}$ 满足

$$\tilde{R}(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j, \tilde{X}_k, \tilde{Y}_l) = \tilde{R}(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j, \tilde{Y}_k, \tilde{Y}_l)$$
$$= \tilde{R}(\tilde{X}_i, \tilde{Y}_j, \tilde{Y}_k, \tilde{Y}_l) = 0, \quad 1 \le i, j, k, l \le 2.$$

所以，

$$\tilde{R}(\tilde{X}_1 - \tilde{Y}_1, \tilde{X}_2 - \tilde{Y}_2, \tilde{X}_2 + \tilde{Y}_2, \tilde{X}_1 + \tilde{Y}_1)$$
$$= \tilde{R}(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_2, \tilde{X}_1) + \tilde{R}(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_1).$$

再由本章习题第 4 题，$(i, i) : T^2 = S^1 \times S^1 \to M$ 是一个全测地的等距嵌入.

6. 设 X, Y 是 H 上的两个左不变向量场. 因为 f 是李群同态，在 G 上存在左不变向量场 $\tilde{X}, \tilde{Y}$，使得 $f_*(X) = \tilde{X} \circ f$, $f_*(Y) = \tilde{Y} \circ f$. 设 D^H 和 D^G 分别是李群 H, G 上的双不变度量的黎曼联络，则由第二章习题第 18 题的结论 (2)，

$$\mathrm{D}^H_X Y = \frac{1}{2}[X, Y], \quad \mathrm{D}^G_{\tilde{X}} \tilde{Y} = \frac{1}{2}[\tilde{X}, \tilde{Y}].$$

于是

$$f_*(\mathrm{D}^H_X Y) = \frac{1}{2} f_*([X, Y]) = \frac{1}{2}[\tilde{X}, \tilde{Y}] \circ f = (\mathrm{D}^G_{\tilde{X}} \tilde{Y}) \circ f.$$

7. (4) 注意到 $f : \mathbb{R}^2 \to S^3$ 是以 $\sqrt{2}\pi$ 为周期的双周期映射，它所诱导的映射 $f : T^2 = S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \to S^3$ 正好是包含映射 $i : f(\mathbb{R}^2) \to S^3$，因而是一个嵌入；其极小性由 (2) 和 (3) 直接得到.

8. (1) 对于任意的 $p \in M$，在 N 中含 p 点的一个开集中取 Darboux 标架场 $\{e_i; \tilde{\xi}_0\}$，其中 $\tilde{\xi}_0 = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$. 记 $A = A_{\xi_0}$，则由散度的定义以及 $\langle \overline{\mathrm{D}}_{\tilde{\xi}_0} \tilde{\xi}_0, \xi_0 \rangle = 0$，我们有

$$mH = \mathrm{tr} h = -\sum_i \langle \overline{\mathrm{D}}_{e_i} \tilde{\xi}_0, e_i \rangle - \langle \overline{\mathrm{D}}_{\tilde{\xi}_0} \tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_0 \rangle$$
$$= -\sum_{A=1}^{m+1} \langle \overline{\mathrm{D}}_{e_A} \tilde{\xi}_0, e_A \rangle = -\mathrm{div}_N \left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|} \right).$$

(2) 设 ξ_0 是 $\tilde{M}$ 的一个单位法向量场. 根据映射秩定理 (参看第一章的定理 2.1)，存在 N 中包含点 p 的局部坐标系 $(U; x^A)$，使得 $x^A(p) = 0$，并且

$$U \cap \tilde{M} = \{q \in U; x^{m+1}(q) = 0\}.$$

令 $F = x^{m+1}$，则不难验证，0 是函数 F 的一个正则值，且有 $F^{-1}(0) = U \cap \tilde{M}$. 必要时改变 F 的符号可以使得 $\tilde{\xi}_0 = \dfrac{\nabla F}{|\nabla F|}$ 在 $\tilde{M}$ 上的限制等于 $\xi_0|_{U \cap \tilde{M}}$. 由结论 (1)，$H = -\dfrac{1}{m} \mathrm{div}_N(\tilde{\xi}_0)$.

9. 首先证明：黎曼流形 N 的子流形 M 是全测地的充分必要条件是，对于任意的点 $p \in M$，在 N 上通过 p 点且在点 p 处与 M 相切的测地线都包含在 M 中. 因此，N 上的等距变换把全测地子流形变为全测地子流形. 然后利用第三章习题第 4、第 5 题的讨论，进一步说明如果把 $H^n(c)$ 等同于 $\mathbb{R}^n$ 中的开球 $B^n(a) (a = \frac{1}{\sqrt{-c}})$，则 $H^n(c)$ 中的任意一个 k 维 $(1 \le k \le n-1)$ 全测地闭子流形是和 $\partial B^n(a)$ 垂直相交的 k 维平面或 k 维球面与 $B^n(a)$ 的交集，这里所谓的垂直相交指的是与 $\partial B^n(a)$ 相交并且在交点处与 $\partial B^n(a)$ 的法向量相切. 此外，最后利用利用第二章习题第 4 题和第 5 题的解答中的方法可以说明，所有这些全测地子流形和 $H^n(c)$ 都是等距的.

10. 首先在 M 上引入子空间的拓扑结构. 对于任意的 $p \in M$，取充分小的 $\delta > 0$，使得 N 在点 p 的指数映射 $\exp_p$ 在开球 $B_p(\delta) \subset T_pM$ 上是一个光滑同胚. 令

$$V = \{v \in T_pN; \varphi_*(v) = v\}.$$

则 V 是 T_pN 的一个线性子空间，并且 $U_p = \exp_p(V \cap B_p(\delta))$ 是 N 的嵌入子流形. 说明这样构造的 U_p 是点 p 在 M 中的一个开邻域. 记 $\psi_p = (\exp_p)^{-1}|_p$，则 $\{(U_p, \psi_p); p \in M\}$ 是 M 的一个 C^∞ 相关的局部坐标卡覆

量，因而确定了 M 上的一个光滑结构，使得 M 成为 N 的子流形．根据本章习题第 10 题的讨论以及 M 的定义，可以证明，相对于诱导度量，M 是 N 的全测地子流形．细节可参阅参考文献 [5, 第 73~74 页]．

11. (必要性) 对于任意的点 $p \in M$，设曲线 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ 满足：$\gamma(0) = p$，$\gamma'(0) = X(p)$．设 D 是 M 上的诱导度量的黎曼联络，则由第二章的定理 7.2 和必要性假设可知

$$(\overline{\mathrm{D}}_X Y)(p) = (\mathrm{D}_X Y)(p) = \lim_{t \to 0} \frac{P_t^0(Y(\gamma(t))) - Y(p)}{t} \in T_p M,$$

其中 P_t^0 是 M 中沿 γ 从 $\gamma(t)$ 到 $\gamma(0)$ 的平行移动．再由 p 点的任意性，$\overline{\mathrm{D}}_X Y \in \mathfrak{X}(M)$．

(充分性) 对于任意的 $v \in T_{\gamma(0)}M$，取 $X \in \mathfrak{X}(N)$，使得 $X|_{\gamma(0)} = v$，并且 $\overline{\mathrm{D}}_{\gamma'(t)}X = 0$．于是存在 $X^{\top} \in \mathfrak{X}(M)$ 和 $X^{\perp} \in \Gamma(T^{\perp}M)$，使得 $X = X^{\top} + X^{\perp}$．由于 $\overline{\mathrm{D}}_{\gamma'(t)}X^{\top} \in T_{\gamma(t)}M$，$\mathrm{D}^{\perp}_{\gamma'(t)}X^{\perp} = 0$，即 X 的法分量在法丛中沿 γ 是平行的．又因为 $X|_{\gamma(0)} = v \in T_{\gamma(0)}M$，即 $X^{\perp}(\gamma(0)) = 0$，故有 $X^{\perp} \equiv 0$．由此便知，$P_\gamma(v) = X|_{\gamma(1)} \in T_{\gamma(1)}M$．由 $v \in T_{\gamma(0)}M$ 的任意性，$P_\gamma(T_{\gamma(0)}M) = T_{\gamma(1)}M$．

13. 利用 Ricci 方程．

14. 在标架场 $\{e_i, e_\alpha\}$ 下，$H = \frac{1}{m}\sum_i h(e_i, e_i)$．故由 h 的协变导数的定义，对于每一个 j

$$\mathrm{D}^{\perp}_{e_j} H = \frac{1}{m}\sum_i \mathrm{D}^{\perp}_{e_j}(h(e_i, e_i)) = \frac{1}{m}\sum_i ((\mathrm{D}_{e_j}h)(e_i, e_i) + 2h(\mathrm{D}_{e_j}e_i, e_i)).$$

设 $\mathrm{D}_{e_j}e_i = \Gamma^k_{ij}e_k$，则由于 $\{e_i\}$ 是单位正交标架场，$\Gamma^k_{ij} = -\Gamma^i_{kj}$．根据 h 的对称性，

$$\sum_i h(\mathrm{D}_{e_j}e_i, e_i) = \sum_{i,k}\Gamma^k_{ij}h(e_k, e_i) = 0.$$

所以

$$\mathrm{D}^{\perp}_{e_j} H = \frac{1}{m}\sum_i (\mathrm{D}_{e_j}h)(e_i, e_i) = \frac{1}{m}\sum_\alpha\left(\sum_i h^\alpha_{iij}\right)e_\alpha.$$

15. 设 $x : S^m(a) \to \mathbb{R}^{m+1}$ 是包含映射，则 $\xi = -\frac{1}{a}x$ 是 $S^m(a)$ 上的单位法向量场．证明对于 $S^m(a)$ 上的任意两个单位正交切向量场 e_1, e_2，

$$\langle h(e_i, e_j), \xi\rangle = \frac{1}{a}\delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, 2.$$

再利用 Gauss 方程．

16. (必要性) 对于任意的 $p \in M$，设 $\{e_\alpha\}$ 是 M 在 p 点附近定义的一个单位正交的法标架场，并且记 $A_\alpha = A_{e_\alpha}$．由假设，存在 p 点附近的标架场 $\{e_i\}$，使得对于每一个 α，在 p 点成立 $A_\alpha(e_i) = \lambda_i^\alpha e_i$，其中 $\lambda_i^\alpha \in \mathbb{R}$．根据 Weingarten 变换和第二基本形式 h 之间的关系，在 p 点

$$h^\alpha_{ij} = \langle h(e_i, e_j), e_\alpha\rangle = \lambda_i^\alpha\delta_{ij}, \quad \forall i, j, \alpha.$$

因此，Ricci 方程化为

$$R^{\perp}_{\alpha\beta ij} = h^\alpha_{ik}h^\beta_{jk} - h^\beta_{ik}h^\alpha_{jk} = 0,$$

即法联络 $\mathrm{D}^{\perp}$ 的曲率算子在 p 点为零．

(充分性) 任意选取 p 点附近的标架场 $\{e_i\}$ 及法标架场 $\{e_\alpha\}$．由必要性的计算不难看出，如果 M 具有平坦的法丛，则对于任意的 α, β，成立

$$h^\alpha_{ik}h^\beta_{jk} - h^\beta_{ik}h^\alpha_{jk} = 0.$$

固定一个 α，并取适当的 $\{e_i\}$，使得在 p 点，$h^\alpha_{ij} = \lambda_i^\alpha\delta_{ij}$．由此说明，必要时可以重新选取 $\{e_i\}$，使得对于任意的 β，当 $i \neq j$ 时，有 $h^\beta_{ij}(p) = 0$．

17. (1) 记 $a = \frac{1}{\sqrt{-c}}$．对于任意的 $x = (x^1, \cdots, x^n, x^{n+1}) \in H^n(c)$，令 $\xi = x/a$，则

$$T_x\mathbb{R}^{n+1}_1 = T_x\mathbb{R}^{n+1} = T_xH^n(c) \oplus \mathbb{R}\cdot\xi.$$

由此分解可以得到 $H^n(c)$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ 中的基本公式为

Gauss 公式：　$\overline{\mathrm{D}}_X Y = \mathrm{D}_X Y + h(X, Y)\xi$，

Weingarten 公式：　$\overline{\mathrm{D}}_X \xi = A(X)$，

其中 $X, Y \in \mathfrak{X}(H^n(c))$，D 是 $H^n(c)$ 上的黎曼联络，$A(X) \in \mathfrak{X}(H^n(c))$，并且

$$\langle A(X), Y\rangle_1 = h(X, Y).$$

此外，$H^n(c)$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ 中的基本方程是

Gauss 方程：　$R(X, Y)Z = h(X, Z)A(Y) - h(Y, Z)A(X)$，

Codazzi 方程：　$(\mathrm{D}_Y h)(X, Z) = (\mathrm{D}_X h)(Y, Z)$，

其中 R 是 $H^n(c)$ 的曲率张量,

$$(\overline{\mathrm{D}}_X h)(Y,Z)=X(h(Y,Z))-H(\mathrm{D}_XY,Z)-h(Y,\mathrm{D}_XZ),$$
$$\forall X,Y,Z\in\mathfrak{X}(H^n(c)).$$

此外，如果用 $H^n(c)$ 的黎曼曲率张量表示，则 Gauss 方程可以化为

$$R(X,Y,Z,W)=h(X,Z)h(Y,W)-h(X,W)h(Y,Z).$$

(2) 由于 $\xi=x/a$,

$$A(X)=-\overline{\mathrm{D}}_X\xi=\frac{1}{a}X,\quad \forall X\in\mathfrak{X}(H^n(c)),$$

于是

$$h(X,Y)=\langle A(X),Y\rangle_1=\frac{1}{a}\langle X,Y\rangle,\quad \forall X,Y\in\mathfrak{X}(H^n(c)).$$

特别地，当 X,Y 是互相正交的单位切向量场时有

$$h(X,X)=h(Y,Y)=-\frac{1}{a},\quad h(X,Y)=0.$$

所以由 (1) 中的 Gauss 方程，$H^n(c)$ 沿截面 $[X\wedge Y]$ 的截面曲率为

$$K(X,Y)=R(X,Y,Y,X)=-h(X,X)h(Y,Y)=\frac{-1}{a^2}=c.$$

19. (1) 由本章习题第 18 题的结论，f 是全脐的当且仅当存在法向量场 ξ 使得

$$\bar{h}(X,Y)=g(X,Y)\xi,\quad \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M).$$

设 $\xi=\lambda\xi_0$, 则 $\lambda\in C^\infty(M)$, 且有

$$h(X,Y)=\langle\bar{h}(X,Y),\xi_0\rangle=\lambda g(X,Y),\quad \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M).$$

另一方面，由基本公式知

$$\langle\bar{h}(X,Y),\xi_0\rangle=\langle\overline{\mathrm{D}}_X f_*(Y),\xi_0\rangle=-\langle f_*(Y),\overline{\mathrm{D}}_X\xi_0\rangle.$$

(2) 设 $Z,X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, 则由 (1) 的结论,

$$\langle\overline{\mathrm{D}}_X\xi_0,f_*(Y)\rangle=-\lambda g(X,Y),\quad \langle\overline{\mathrm{D}}_Z\xi_0,f_*(Y)\rangle=-\lambda g(Z,Y).$$

对上述两个方程分别求关于 Z, X 的微分并且利用

$$\langle\overline{\mathrm{D}}_X\xi_0,\overline{\mathrm{D}}_Z f_*(Y)\rangle=\langle\overline{\mathrm{D}}_X\xi_0,f_*(\mathrm{D}_ZY)+\bar{h}(Z,Y)\rangle=-\lambda g(X,\mathrm{D}_ZY),$$
$$\langle\overline{\mathrm{D}}_{[X,Z]}\xi_0,f_*(Y)\rangle=-\lambda g([X,Z],Y)=-\lambda g(\mathrm{D}_XZ,Y)+\lambda g(\mathrm{D}_ZX,Y),$$

可得

$$\langle\overline{\mathrm{D}}_Z\overline{\mathrm{D}}_X\xi_0-\overline{\mathrm{D}}_X\overline{\mathrm{D}}_Z\xi_0-\overline{\mathrm{D}}_{[X,Z]}\xi_0,f_*(Y)\rangle$$
$$=-\langle Z(\lambda)X-X(\lambda)Z,f_*(Y)\rangle,\qquad \forall Y\in\mathfrak{X}(M).$$

再利用 N 是常曲率空间的事实 (参考第四章的推论 3.3), 容易证明 $\lambda=\mathrm{const}$. 此外根据上面的证明，存在常数 λ 使得

$$h(X,Y)=\lambda g(X,Y),\quad \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M),$$

其中 h 是 f 的第二基本形式. 再由 Gauss 方程和第四章的推论 3.3, 即知 M 具有常截面曲率 $c-\lambda$.

(3) 由第二章习题第 22 题和全脐性条件

$$\tilde{\mathrm{D}}_X\xi_0=\overline{\mathrm{D}}_X\xi_0+X(\rho)\xi_0+\xi_0(\rho)f_*(X),\quad \forall X\in\mathfrak{X}(M).$$

$$\tilde{g}(\tilde{\mathrm{D}}_X(e^{-\rho}\xi_0),f_*(Y))=e^{-\rho}(\xi_0(\rho)-\lambda)(f^*\tilde{g})(X,Y),$$

(4) 由 (2), $\lambda=\mathrm{const}$. 分为两种情况讨论. 当 $\lambda\neq0$ 时, 构造映射 $x:M\to\mathbb{R}^{m+1}$ 如下:

$$x(p)=f(p)+\frac{1}{\lambda}\xi_0(p),\quad \forall p\in M.$$

再证明 $x=x_0$ 是常值映射, 从而

$$|f(p)-x_0|^2=\frac{1}{\lambda^2},\quad \forall p\in M.$$

于是, $f(M)$ 包含在以 x_0 为心、以 $1/|\lambda|$ 为半径的球面内.

21. (1) 设 $\overline{\mathrm{D}}$ 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 上的黎曼联络. 对于任意的 $p\in M$, $v\in T_pM$, 取光滑曲线 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$, 使得 $\gamma(0)=p$, $\gamma'(0)=v$. 则由第一章习题第 32 题,

$$G_*(v)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(G\circ\gamma)\Big|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\xi_0\circ\gamma)\Big|_{t=0}=\overline{\mathrm{D}}_v\xi_0=-A(v),$$

其中利用了 $\overline{\mathrm{D}}_v\xi_0\perp\xi_0$.

(2) 由结论 (1), G 的 Jacobi 行列式等于 $(-1)^m \det A$. 因此在假设条件下, G 是一个浸入因而是局部微分同胚; 利用 M 的紧致性可知 G 是 S^m 的覆叠映射 (参看第五章的引理 5.2). 再由 S^m 的单连通性, M 和 S^m 微分同胚.

22. (1) 设 h 是 M 在 N 中的第二基本形式, 则由于所有的主曲率的重数是常数, 对于任意一点 $p\in M$, 都有 p 点附近的光滑标架场 $\{e_i\}$, 使得 $h(e_i,e_j)=\lambda_i\delta_{ij}$, 其中的 $\lambda_i(p)$ 正是 M 在 p 点的主曲率 (参阅参考文献: D. Singley, Rocky Moun. J. Math., 5(1975), 135~144). 不妨设 $\lambda_1=\cdots=\lambda_r=\lambda$, 则 $\{e_1,\cdots,e_r\}$ 就是满足要求的一组光滑向量场;
(2) $r=1$ 的情形直接用一维光滑分布的可积性, 其证明可以参阅参考文献 [3, 第 147~148 页]; $r\geq 2$ 时的证明请参阅参考文献 [6, 定理 5.2.2, 第 288 页];
(3) 参阅参考文献 [6, 推论 1, 第 290 页].

23. (充分性) 设 A 是 M 关于单位法向量场 ξ_0 的 Weingarten 变换, 则对于任意的 $X\in\mathfrak{X}(M)$, $A(X)=-\mathrm{d}_X\xi_0$, 这里 d 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 上的标准联络 (即普通微分). 对于任意的 $p\in M$, 取标架场 $\{e_i\}$, 使得在 p 点, $A(e_i)=\lambda_i f_*(e_i)$, 其中 $\lambda_i\in\mathbb{R}$. 因为函数 $S=\langle f,\xi_0\rangle$ 是常数, 所以

$$0=e_i(S)=\langle f_*(e_i),\xi_0\rangle+\langle f,\mathrm{d}_{e_i}\xi_0\rangle=-\langle f,A(e_i)\rangle,\quad\forall i.$$

在 p 点取值得 $\lambda_i\langle f,f_*(e_i)\rangle=0(\forall i)$. 由充分性假设, $\lambda_i\neq 0$, 故 $\langle f,f_*(e_i)\rangle=0(\forall i)$. 这说明 f 在每一点处都平行于单位法向量 ξ_0. 从而有 $\mathrm{d}(f^2)=\langle f,\mathrm{d}f\rangle\equiv 0$. 所以 f 具有固定的长度, 结论得证.

24. (充分性) 设 h 是 M 的第二基本形式, $H=\frac{1}{m}\mathrm{tr}\,h$ 是 M 的平均曲率, x 是 M 在 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的位置向量. 由假设, H 是常数. 对于任意的局部标架场 $\{e_i\}$, 令

$$a_i=\langle x,e_i\rangle,\quad h_{ij}=h(e_i,e_j),\quad X^i=Ha_i,\quad Y^i=\sum_j h_{ij}a_j,$$

$$X=\sum X^i e_i,\quad Y=\sum Y^i e_i.$$

通过直接计算, 可知

$$\operatorname{div}X=mH(1+SH),\quad \operatorname{div}Y=\sum_{i,j}a_jh_{iji}+mH+S\sum_{i,j}(h_{ij})^2.$$

注意到 H 是常数, $\sum_i h_{iji}=\sum_i h_{iij}=0$. 于是由散度定理 (第二章的定理 5.3)

$$\int_M(mH+mSH^2)\mathrm{d}V_M=0,\quad \int_M\Big(mH+S\sum_{i,j}(h_{ij})^2\Big)\mathrm{d}V_M=0.$$

两式相减得

$$\int_M S\Big(mH^2-\sum_{i,j}(h_{ij})^2\Big)\mathrm{d}V_M=0.$$

因为 S 在 M 上恒不为零, 所以由 M 的连通性, S 在 M 上不变号. 此外, 容易知道,

$$mH^2=\frac{1}{m}(\mathrm{tr}\,h)^2\leq\sum_{i,j}(h_{ij})^2.$$

于是有 $mH^2-\sum_{i,j}(h_{ij})^2\equiv 0$. 此式成立当且仅当 h 的所有特征根 (即 M 的主曲率) 处处相等, 因而 M 是全脐的. 根据紧致性假设和本章习题第 19 题的结论 (4), M 是全脐的当且仅当 M 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的标准球面.

25. (1) 易知, $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的超曲面 M 在一点 p 是凸的当且仅当 M 在点 p 处的所有法截线在 p 点附近位于切平面 T_pM 的同一侧, 由此可知 M 在 p 点的所有法曲率具有相同的符号, 即 M 在该点的第二基本形式 h 是半定的, 即 h 在 p 点的所有特征根 (即 M 在点 p 的所有主曲率) 具有相同的符号. 另一方面, 假设 h 在点 p 是正定的或负定的, 即 M 在点 p 的所有主曲率都大于零或都小于零. 在此条件下可以证明, M 在点 p 处的所有法曲率都大于零或都小于零, 因而 M 在点 p 处的所有法截线在 p 点附近位于切平面 T_pM 的同一侧, 并且与切平面 T_pM 只有一个公共点 p. 因此, M 在点 p 是严格凸的.
(2) 取 T_pM 的基底 $\{e_i\}$, 使得 M 在 p 点的第二基本形式 h 满足 $h_{ij}=h(e_i,e_j)=\lambda_i\delta_{ij}$. 由 Gauss 公式

$$K(e_i,e_j)=h_{ii}h_{jj}-(h_{ij})^2=\lambda_i\lambda_j,\quad\forall i\neq j.$$

由此可见, M 在 p 点的截面曲率 $K>0 \Leftrightarrow$ 对于任意的 $i\neq j$, $\lambda_i\lambda_j>0$; $K\geq 0 \Leftrightarrow$ 对于任意的 $i\neq j$, $\lambda_i\lambda_j\geq 0$. 前者等价于所有的主曲率均大于零或均小于零, 后者等价于所有的主曲率具有相同的符号. 再利用结论 (1).

26. (1) 依次证明如下的结论 (细节可以参阅参考文献 [38, 第 225~226 页]):

(a) 至少存在一点 $p_0\in M$, 使得 M 的第二基本形式 h 在 p_0 点是正定的或是负定的. 事实上, 设 x 是 M 的位置向量, 令 $f=|x|^2$, 则 f 是 M 上的光滑函数. 不失一般性, 可以假定 M 不包含原点. 由 M 的紧致性, 存在点 $p_0\in M$, 使得 f 在 p_0 点取最大值. 证明 p_0 点满足要求.

(b) 如果截面曲率 K 恒不为零, 则 h 是处处非退化的; 此时, K 恒大于零. 事实上, 如果 e_i 是 h 的对应于特征根 λ_i 的特征向量, 则由假设, 当 $i\neq j$ 时, $\lambda_i\lambda_j=K(e_i,e_j)\neq 0$. 于是, 所有的 λ_i 都不等于零, 因而 h 是非退化的. 考虑 M 的子集

$$A=\{p\in M;\ h\text{在 } p \text{ 点是正定的或负定的}\}$$
$$B=\{p\in M;\ h\text{在 } p \text{ 点是半定的}\}.$$

根据 M 的连通性说明 $A=B=M$.

(c) 如果 K 恒大于零, 则 M 是可定向的, 并且其 Gauss 映射 $G:M\to S^m$ 是微分同胚. 事实上, K 恒大于零等价于 M 在每一点的所有主曲率均大于零或均小于零, 即 h 在每一点是正定的或负定的. 为证明 M 是可定向的, 我们需要在 M 上定义一个单位法向量场. 设 X 是一个局部定义的光滑切向量场, 且处处不等于零, 则由于 h 处处是正定的或负定的, $(\mathrm{d}_X X)^\perp$ 处处不等于零. 令 $\xi_X=-\dfrac{(\mathrm{d}_X X)^\perp}{|(\mathrm{d}_X X)^\perp|}$. 可以验证, 单位法向量场 ξ_X 与向量场 X 的取法无关, 因而确定了 M 上的一个整体定义的单位法向量场. 此外, 注意到 h 是处处非退化的, 由本章习题第 21 题的结论 (1), Gauss 映射 G 是微分同胚.

(d) 如果 M 是可定向的, 并且其 Gauss 映射 G 是微分同胚, 则 G 的微分处处是线性同构, 从而由本章习题第 21 题的结论 (1), h 是处处非退化的.

(2) 只需证明 M 在任意一点 p 是严格凸的. 我们可以取 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的笛卡尔直角坐标系 $(x^1,\cdots,x^{m+1})$, 使得原点为 p 点, 并且 T_pM 是坐标面 $x^{m+1}=0$. 令 $f=x^{m+1}|_M$, 则 f 是 M 上的光滑函数. 由于 M 是紧致的, f 在 M 上有最大值点 p' 和最小值点 p''. 因此, 切空间 $T_{p'}M$, $T_{p''}M$ 在 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中都与切空间 T_pM 平行. 所以 Gauss 映射 G 在 p,p',p'' 的值最多相差一个符号. 因为 G 是微分同胚并且 $p'\neq p''$, 所以 $G(p')=-G(p'')$, 进而 $G(p)=G(p')$ 或 $G(p)=G(p'')$. 不失一般性, 设 $G(p)=G(p'')$. 则 $p=p''$, 于是对于任意的 $q\in M$, 有 $f(q)\geq 0$, 等号成立当且仅当 $q=p$. 这说明, M 位于切空间 T_pM 的上侧, 并且 $M\cap T_pM=\{p\}$.

27. (1) 设 $\{e_i\}$ 是 M 上的任意一个单位正交的局部标架场, h 是 M 的第二基本形式, $h_{ij}=h(e_i,e_j)$, $|h|^2=\sum(h_{ij})^2$. 则有如下的 Gauss 方程和 Codazzi 方程

$$R_{ijkl}=h_{il}h_{jk}-h_{ik}h_{jl},\quad h_{ijk}=h_{ikj}.$$

利用 Ricci 方程和 Codazzi 方程以及常数平均曲率的条件可以算出 (参阅参考文献 [6, 第 299~300 页])

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta(|h|^2)&=\sum(h_{ijk})^2+\sum h_{ij}(h_{ki}R_{lkkj}+h_{kl}R_{likj})\\&=\sum(h_{ijk})^2+\frac{1}{2}\sum(\lambda_i-\lambda_j)^2R_{ijji},\end{aligned}$$

其中 λ_i 是 M 的主曲率, 即 $h_{ij}=\lambda_i\delta_{ij}$. 由假设条件和 Gauss 方程, 当 $i\neq j$ 时, $R_{ijji}=\lambda_i\lambda_j>0$. 从而 $|h|^2$ 是紧致流形 M 上的次调和函数. 根据 Hopf 定理 (参看第二章习题第 37 题), $|h|^2$ 是常数, 从而有 $\Delta(|h|^2)\equiv 0$. 由此可知, 对于任意的 i,j, $(\lambda_i-\lambda_j)R_{ijji}^2\equiv 0$, 因而当 $i\neq j$ 时, $\lambda_i=\lambda_j$, 即 M 是全脐的. 再由 M 的紧致性和本章习题第 19 题, M 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的标准球面.

(2) 由 Gauss 方程, 数量曲率和平均曲率为常数的假设蕴含着 $|h|^2$ 是常数. 再利用 (1) 的证明即可.

29. 假设 $M_1\cap M_2=\emptyset$. 由紧致性, 存在 $p\in M_1$, $q\in M_2$, 使得 $d(p,q)=d(M_1,M_2)>0$. 设 $\gamma:[0,b]\to N$ 是 N 中连接 p,q 两点的最短正规测地线, 则由弧长的第一变分公式, $\gamma'(0)$ 和 $\gamma'(b)$ 分别是 M_1 和 M_2 在点 p,q 的单位法向量. 同时, 对于 γ 的每一个变分 $\Phi:[0,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to N$, 如果对于任意的 $u\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, $\Phi(0,u)\in M_1$, $\Phi(b,u)\in M_2$, 则 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}L(\gamma_u)|_{t=0}\geq 0$. 用 $P:T_pN\to T_qN$ 是 N 中沿 γ 的平行移动.

(1) 设 $\dim M_1+\dim M_2>n$, 则 $T_pM_1\cap P^{-1}(T_qM_2)\neq\{0\}$. 任意取定一

个单位向量 $v \in T_pM_1 \cap P^{-1}(T_qM_2)$, 则 $v \perp \gamma$. 再设 $U(t)$ 是沿 γ 的平行向量场, 满足 $U(0)=v$. 定义

$$\Phi(t,u)=\exp_{\gamma(t)}(uU(t)), \quad \forall (t,u)\in[0,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon),$$

则由于 N 的截面曲率处处大于零,

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u}L(\gamma_u)\right|_{u=0}=\int_0^b R(\gamma',U,\gamma',U)\mathrm{d}t=-\int_0^b K(\gamma',U)\mathrm{d}t<0.$$

(2) 设 $\dim M_1=\dim M_2=n-1$, 则由于 γ' 分别在 p,q 点与 T_pM_1, T_qM_2 正交, $T_pM_1=P^{-1}(T_qM_2)$. 任意取定 T_pM_1 的一个单位正交基 $\{e_i\}$, 并且设 $U_i(t)$ 是沿 γ 的平行向量场, 满足 $U_i(0)=e_i$, 定义 $\Phi_i(t,u)=\exp_{\gamma(t)}uU_i(t)$, $\gamma_{i,u}(t)=\Phi_i(t,u)$. 由于 N 的 Ricci 曲率处处大于零, 根据 (1) 中的推理有

$$\begin{aligned}0\le\sum_i\left.\frac{\partial^2}{\partial u^2}L(\gamma_{i,u})\right|_{u=0}&=\int_0^b\sum_i R(\gamma',U_i,\gamma',U_i)\mathrm{d}t\\&=-\int_0^b \mathrm{Ric}(\gamma',\gamma')\mathrm{d}t<0.\end{aligned}$$

30. 选取单位正交的标架场 $\{e_i\}$, 使得 $h_{ij}=\lambda_i\delta_{ij}$. 设 $\{\omega^i\}$ 是 $\{e_i\}$ 的对偶标架场, ω_i^j 是 M 上的联络形式, 则有如下的结构方程 (参看第四章的 (2.7) 式):

$$\mathrm{d}\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j^i, \quad \mathrm{d}\omega_i^j=\omega_i^k\wedge\omega_k^j-\frac{1}{2}R_{ikl}^j\omega^k\wedge\omega^l,$$

其中 R_{ikl}^j 是 M 的曲率张量的分量. M 在 N 中的 Gauss 方程是

$$\begin{aligned}R_{ikl}^j=&R_{ijkl}=c(\delta_{il}\delta_{jk}-\delta_{ik}\delta_{jl})+h_{il}h_{jk}-h_{ik}h_{jl}\\=&(c+\lambda_i\lambda_j)(\delta_{il}\delta_{jk}-\delta_{ik}\delta_{jl}).\end{aligned}$$

另一方面, 利用第二基本形式的协变导数的定义,

$$0=\sum_k h_{ij,k}\omega^k=\mathrm{d}\lambda_i\delta_{ij}-\lambda_k\delta_{kj}\omega_i^k-\lambda_i\delta_{ik}\omega_j^k.$$

在上式中分别令 $j=i$ 和 $j\neq i$ 并且利用 $\omega_i^j+\omega_j^i=0$ 可得

$$\mathrm{d}\lambda_i=0, \quad (\lambda_j-\lambda_i)\omega_i^j=0, \quad \forall i,j.$$

这说明所有的主曲率 λ_i 都是常数, 并且当 $\lambda_i\neq\lambda_j$ 时, $\omega_i^j=0$. 对最后一式求外微分并利用结构方程和 Gauss 方程可得

$$0=\mathrm{d}\omega_i^j=\omega_i^k\wedge\omega_k^j-(c+\lambda_i\lambda_j)\omega^i\wedge\omega^j=-(c+\lambda_i\lambda_j)\omega^i\wedge\omega^j,$$

其中 i,j 是固定的两个指标, 满足 $\lambda_i\neq\lambda_j$. 所以, 当 $\lambda_i\neq\lambda_j$ 时, $\lambda_i\lambda_j+c=0$. 由此可知, 所有的主曲率 λ_i 中最多只能有两个不同的值. 如果所有的主曲率都相等, 即有常数 λ 使得 $\lambda_i=\lambda(\forall i)$, 则 M 是全脐超曲面, 因而由 Gauss 方程,

$$R_{ijkl}=(c+\lambda^2)(\delta_{il}\delta_{jk}-\delta_{ik}\delta_{jl}).$$

此时 M 具有常截面曲率 $c+\lambda^2$; 如果 M 有两个不同的主曲率, 不妨设

$$\lambda_1=\cdots=\lambda_k=\lambda, \quad \lambda_{k+1}=\cdots=\lambda_m=\mu.$$

此时有 $\omega_a^\alpha=-\omega_\alpha^a=0$, 其中 $1\le a\le k$, $k+1\le\alpha\le m$. 于是根据 Frobenious 定理 (参阅参考文献 [3, 第 198 页, 定理 3.2]), M 上分别由 $\omega^\alpha=0$ 和 $\omega^a=0$ 确定的 k 维分布 $\mathscr{D}_1$ 和 $m-k$ 分布 $\mathscr{D}_2$ 都是完全可积的, 因而确定了 M 的两个子流形 M_1, M_2, 使得在局部上有 $M=M_1\times M_2$. 最后由 Gauss 方程, M_1 和 M_2 分别具有常截面曲率 $c+\lambda^2$ 和 $c+\mu^2$.

31. 设 $N(c)$ 是 n 空间形式, 其截面曲率 $c\neq0$, 则由第五章的定理 5.2, 我们可以假设 $N(c)$ 是标准球面 $S^n(a)(c>0$ 时) 或双曲空间 $H^n(c)(c<0$ 时). 不失一般性, 令 $c=\varepsilon=\pm1$. 设 M 是 $N^n(\varepsilon)$ 中的 m 维子流形, 由于 $N^n(1)$ 和 $N^n(-1)$ 可以分别嵌入到欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 和 Lorentz 空间 $\mathbb{R}_1^{n+1}$ 中, M 在 $N^n(\varepsilon)$ 中的位置向量有意义, 记为 x. 设 d 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的普通 (外) 微分算子, $\{e_i,e_\alpha\}$ 是 M 在 $N^n(\varepsilon)$ 中的 Darboux 标架场, 则 $\{e_i,e_\alpha,x\}$ 是 M 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 或 $\mathbb{R}_1^{n+1}$ 中的 Darboux 标架场. 如果 $\{\omega^i\}$ 是 M 上和 $\{e_i\}$ 对偶的余切标架场, $\omega_i^j,\omega_\alpha^\beta$ 分别是 M 上的黎曼联络形式和 M 在 $N^n(\varepsilon)$ 中的法联络形式, $h=h_{ij}^\alpha\omega^i\otimes\omega^j\otimes e_\alpha$ 是 M 在 $N^n(\varepsilon)$ 中的第二基本形式, 则 M 在 $N^n(\varepsilon)$ 中的的基本公式是

$$\begin{cases}\mathrm{d}e_i=\omega_i^je_j+\omega_i^\alpha e_\alpha-\varepsilon\omega^ix,\\ \mathrm{d}e_\alpha=\omega_\alpha^ie_i+\omega_\alpha^\beta,\\ \mathrm{d}x=\omega^ie_i, \quad (x,x)=\varepsilon,\end{cases}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的标准度量或 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ 中的 Lorentz 度量, $\omega_i^\alpha = -\omega_\alpha^i = h_{ij}^\alpha\omega^j$. 如果把它们写成矩阵的形式, 则有

$$\mathrm{d}(e_i, e_\alpha, x) = (e_j, e_\beta, x)\omega, \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_i^j & \omega_\alpha^j & \omega^j \\ \omega_i^\beta & \omega_\alpha^\beta & 0 \\ -\varepsilon\omega^i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对上式求外微分可得 $\mathrm{d}\omega = -\omega\wedge\omega$, 它相当于 M 在 $N^n(c)$ 中的结构方程. 如果用矩阵的元素表示出来, 即可得到 M 在 $N^n(\varepsilon)$ 的基本方程如下:

$$R_{ijkl} = \varepsilon(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}) + \sum_\alpha(h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha - h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha),$$

$$h_{ijk}^\alpha = h_{ikj}^\alpha; \quad R_{\alpha\beta ij}^\perp = \sum_k(h_{jk}^\alpha h_{ik}^\beta - h_{ik}^\alpha h_{jk}^\beta);$$

其中 $R_{ijkl}, R_{\alpha\beta ij}^\perp$ 和 h_{ijk} 的意义是显然的 (参看 (3.15) 式后面的式子). 与定理 3.1 相应的结论可以叙述如下:

设 (M,g) 是单连通的 m 维黎曼流形, 并且在 M 上有一个秩为 k 的黎曼向量丛 $\tilde\pi: E\to M$, 其纤维上的内积 (黎曼结构) 记为 $\{,\}$. 如果向量丛 $\pi: \mathrm{Hom}(TM\otimes TM, E)\to M$ 有一个对称截面 σ(即在每一点 $p\in M$, $\sigma_p: T_pM\times T_pM\to E_p$ 是一个对称的双线性映射), 并且向量丛 $\tilde\pi: E\to M$ 有一个与其黎曼结构相容的联络 $\tilde\nabla$, 它们和 M 上的黎曼联络 D 一起满足下列条件: $\forall X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M), \xi\in\Gamma(E)$,

(1) $\langle R(X,Y)Z,W\rangle - \varepsilon(g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)$
$\qquad + \{\sigma(X,W),\sigma(Y,Z)\} - \{\sigma(X,Z),\sigma(Y,W)\}$;

(2) $(\tilde{\mathrm{D}}_X\sigma)(Y,Z) = (\tilde{\mathrm{D}}_Y\sigma)(X,Z)$;

(3) $\tilde R(X,Y)\xi = \sigma(A_\xi(Y),X) - \sigma(A_\xi(X),Y)$,

其中各个符号的意义同定理 3.1. 则存在等距浸入 $f: M\to N^n(\varepsilon)$ 和丛映射 $\tilde f: E\to T^\perp M$, 使得 $\pi\circ\tilde f = f\circ\tilde\pi$, 并且

$$\langle\tilde f(\xi),\tilde f(\eta)\rangle = \{\xi,\eta\}, \qquad \forall\xi,\eta\in E_p;$$

$$\tilde f(\sigma(X,Y)) = h(X,Y), \quad \forall X,Y\in T_pM;$$

$$\tilde f(\tilde\nabla_X\xi) = \mathrm{D}_X^\perp(\tilde f(\xi)), \qquad \forall X\in T_pM, \xi\in\Gamma(E).$$

上述的结论可以依照定理 3.1 的证明去做, 其中只需作少量的修改. 比如: 所有指标 $A, B,\cdots$ 的取值范围修改为 $1,\cdots,n+1$, 相应地把上面得到的

基本公式视为关于 $(n+1)^2$ 个未知函数的偏微分方程; (3.26) 中的第二组式子要修改为

$$\frac{\partial a_i^A}{\partial u^k} = \Gamma_{ik}^j a_j^A + h_{ik}^\alpha a_\alpha^A - \varepsilon g_{ik}a_0^A;$$

初始条件 (3.29) 修改为:

$$\sum_{i=1}^n(a_0^i)^2 + \varepsilon(a_0^{n+1})^2 = \varepsilon, \quad 当\varepsilon = -1时, a_0^{n+1} > 0,$$

$$\sum_{i=1}^n a_0^i a_{0i}^i + \varepsilon a_0^{n+1}a_{0i}^{n+1} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n a_{0i}^i a_{0j}^i + \varepsilon a_{0i}^{n+1}a_{0j}^{n+1} = g_{ij}(u_0^1,\cdots,u_0^m),$$

$$\sum_{i=1}^n a_{0i}^i a_{0\alpha}^i + \varepsilon a_{0i}^{n+1}a_{0\alpha}^{n+1} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n a_{0\alpha}^i a_{0\beta}^i + \varepsilon a_{0\alpha}^{n+1}a_{0\beta}^{n+1} = \delta_{\alpha\beta};$$

如此等等.

32. 原始证明请参阅参考文献:

Nomizu & Smyth, J. Diff. Geom., Vol.3(1969), 367~377;

下面是证明的提示. 采用与本章习题第 27 题的证明中完全相同的方法可以得到

$$\frac{1}{2}\Delta(|h|^2) = \sum(h_{ijk})^2 + \sum h_{ij}(h_{li}R_{lkkj} + h_{kl}R_{likj})$$
$$= \sum(h_{ijk})^2 + \frac{1}{2}\sum(\lambda_i - \lambda_j)^2 R_{ijji},$$

其中 λ_i 是 M 的主曲率. 由假设条件和 Gauss 方程, 当 $i\neq j$ 时, $R_{ijji} = 1+\lambda_i\lambda_j\geq 0$. 从而 $|h|^2$ 是紧致流形 M 上的次调和函数. 根据 Hopf 定理 (参看第二章习题第 37 题), $|h|^2$ 是常数, 从而有 $h_{ijk} = 0$, 即 M 具有平行的第二基本形式; 同时还有 $(\lambda_i - \lambda_j)R_{ijji}\equiv 0(\forall i,j)$, 即

$$(\lambda_i - \lambda_j)(1+\lambda_i\lambda_j)\equiv 0, \quad \forall i,j.$$

再参照本章习题第 30 题的作法便可以说明 M 是标准超球面或是两个低维球面的直积.

33. 参看参考文献: A. Ros, J. Diff. Geom., 27(1988), 215~220.

34. (1) 首先由 $(x,x)=1$ 得 $a\mathrm{d}a - b\mathrm{d}b = 0$. 因为 e_1, e_2 分别是 $\mathbb{R}^{k+1}$ 和 $\mathbb{R}^{m-k+1}$ 中的单位向量函数, 故有

$$(\xi_0, \mathrm{d}x) = -b\mathrm{d}a + a\mathrm{d}b.$$

(2) 由位置向量 x 的表达式以及 $a>0, b>0$ 的假设易知, $M \subset S^k(a) \times S^{m-k}(b)$ 是子流形. 根据第二基本形式的定义 (参看本章习题第 19 题),

$$h = (\mathrm{d}^2x, \xi_0) = -(\mathrm{d}x, \mathrm{d}\xi_0) = ab((\mathrm{d}e_1)^2 - (\mathrm{d}e_2)^2).$$

(3) M 上的诱导度量是

$$g = \mathrm{d}x^2 = a^2(\mathrm{d}e_1)^2 + b^2(\mathrm{d}e_2)^2.$$

设 $\{\bar\omega^i\}$, $\{\bar\omega^\alpha\}$ 是 S^k 和 S^{m-k} 上的单位正交的余切标架场, 令 $\omega^i = ax_*(\bar\omega^i)$, $\omega^\alpha = bx_*(\bar\omega^\alpha)$, 则 $\{\omega^i, \omega^\alpha\}$ 是 M 上的单位正交的余切标架场. 同时有

$$(\mathrm{d}e_1)^2 = \frac{1}{a^2}\sum_i(\omega^i)^2, \quad (\mathrm{d}e_2)^2 = \frac{1}{b^2}\sum_\alpha(\omega^\alpha)^2.$$

于是

$$g = \sum_i(\omega^i)^2 + \sum_\alpha(\omega^\alpha)^2, \quad h = \frac{b}{a}\sum_i(\omega^i)^2 - \frac{a}{b}\sum_\alpha(\omega^\alpha)^2.$$

35. (1) 直接计算可得

$$\sum_{i=1}^5(u^i)^2 = \frac{1}{a^2}(x^2+y^2+z^2);$$

$$\sum_{i=1}^5(\mathrm{d}u^i)^2 = \mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2 + \frac{2}{3a^2}(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)^2.$$

另一方面, 设 $\varphi: S^2(a) \to S^2(a)$ 是对径点映射 (参看第二章习题第 4 题), 则 $f\circ\varphi = f$. 注意到自然投影 $\pi: S^2(a) \to (\mathbb{R}P^2, g_a)$ 是一个局部等距, 故 f 诱导了一个等距浸入 $\tilde f: (\mathbb{R}P^2, g_a) \to S^4$.

(2) 设 Δ, Δ_1 和 Δ_a 分别是 $\mathbb{R}^3, S^2$ 和 $S^2(a)$ 上的 Beltrami-Laplace 算子, 则由第二章习题第 32 题可以知道,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_1,$$

其中 r 是极半径. 同时, 显然有 $\Delta_a = \frac{1}{a^2}\Delta_1$. $\Delta f = 0$, 并且 $f = r^2(f|_{S^2})$. 由此可以证明

$$\Delta_a(f|_{S^2(a)}) = -\frac{6}{a^2}f|_{S^2(a)}.$$

再利用 Takahashi 定理 (定理 4.6).

36. (1) 由定义, 对于任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$B_f(X,Y) - B_f(Y,X) = \overline{\mathrm{D}}_X f_*(Y) - \mathrm{D}_Y f_*(X) - f_*([X,Y]).$$

当 $\overline{\mathrm{D}}$ 是无挠联络时, 由诱导联络的定义容易证明 (参阅第二章的例 8.2):

$$\overline{\mathrm{D}}_X f_*(Y) - \mathrm{D}_Y f_*(X) = f_*([X,Y]).$$

(2) 设 $\{e_i\}$ 是 M 上的单位正交标架场. 那么, 对于给定的正常变分 $F: G\times(-\varepsilon,\varepsilon) \to N$, 有

$$\begin{aligned} E(u) - E(f_u) &= \frac{1}{2}\int_G((f_u)_*e_i, (f_u)_*e_i)\mathrm{d}V_M \\ &= \frac{1}{2}\int_G(F_*(e_i), F_*(e_i))\mathrm{d}V_M. \end{aligned}$$

假设 $\bar{\mathrm{D}}$ 是拉回丛 F^*TN 上的诱导联络, 则利用 $\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial u}}e_i = \mathrm{D}_{e_i}\frac{\partial}{\partial u} = 0$ 可得

$$\begin{aligned} E'(u) &= \int_G(F_*(e_i), \bar{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial u}}F_*(e_i))\mathrm{d}V_M \\ &= \int_G\left\langle F_*(e_i), B_F\left(\frac{\partial}{\partial u}, e_i\right)\right\rangle \mathrm{d}V_M \\ &= -\int_G\left\langle B_F(e_i,e_i), F_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)\right\rangle \mathrm{d}V_M. \end{aligned}$$

两边在 $u=0$ 取值得

$$E'(0) = -\int_G(B_f(e_i,e_i), V)\mathrm{d}V_M = -\int_G(\tau(f), V)\mathrm{d}V_M.$$

其中 V 是 f 对应于变分 F 的变分向量场.

(3) 浸入子流形 $f: M\to N$ 的第二基本形式 h 由 Gauss 公式定义:

$$\overline{\mathrm{D}}_X f_*(Y) = f_*(\mathrm{D}_XY) + h(X,Y).$$

把上式与光滑映射 f 的第二基本形式 B_f 的定义式比较, 即知 $B_f = h$.

38. 设 $M \subset S^n$ 是一个紧致无边的 m 维极小子流形，$v \in \mathbb{R}^{n+1}$，它可以视为定义在 M 上的一个常向量场．在 M 的每一点把 v 垂直投影到 M 在 S^n 中的法空间，可以得到一个沿 M 定义的法向量场 W．取 M 上的单位正交标架场 $\{e_i\}$ 和单位正交的法标架场 $\{e_\alpha\}$，则 $\{e_i, e_\alpha, x\}$ 是 M 在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的 Darboux 标架场，其中 x 是 M 上点的位置向量．对这个标架场进行微分得

$$de_i = \Gamma^k_{ij}\omega^j e_k + h^\alpha_{ij}\omega^j e_\alpha - \delta_{ij}\omega^j x,$$

$$de_\alpha = -h^\alpha_{ij}\omega^i e_j + \Gamma^\beta_{\alpha i}\omega^i e_\beta, \quad dx = \omega^i e_i,$$

其中 $\{\omega^i\}$ 是 M 上与 $\{e_i\}$ 对偶的余切标架场，h^α_{ij} 是 M 在 S^n 中的第二基本形式的分量，Γ^k_{ij} 和 $\Gamma^\beta_{\alpha i}$ 分别是 M 上的黎曼联络 D 和法联络的联络系数．设 $v = v^i e_i + v^\alpha e_\alpha + v^0 x$，则 $W = v^\alpha e_\alpha$．由 $dv \equiv 0$，可以得到如下的关系式：

$$v^i_{,j} \equiv e_j(v^i) + v^k\Gamma^i_{kj} = v^\alpha h^\alpha_{ij} - \delta^i_j,$$

$$v^\alpha_{,i} \equiv e_i(v^\alpha) + v^\beta\Gamma^\alpha_{\beta i} = -v^j h^\alpha_{ji}.$$

在此基础上再证明

$$\langle \mathrm{Ric}^\perp W, W\rangle = m\sum_\alpha (v^\alpha)^2, \quad \langle h \circ h^t(W), W\rangle = -\langle \Delta^\perp_M W, W\rangle.$$

代入第二变分公式 (5.16) 得

$$V''(0) = -m\int_M \sum_\alpha (v^\alpha)^2 dV_M \le 0.$$

参 考 文 献

1. 陈省身，陈维桓著．微分几何讲义 (第二版)，北京：北京大学出版社，2001
2. 陈维桓编著，微分几何初步，北京：北京大学出版社，1990.
3. 陈维桓编著，微分流形初步 (第二版)，北京：高等教育出版社，2001.
4. 伍鸿熙、陈维桓著，黎曼几何选讲，北京：北京大学出版社，1993.
5. 伍鸿熙、沈纯理、虞言林著，黎曼几何初步，北京：北京大学出版社，1989.
6. 白正国、沈一兵等编著，黎曼几何初步，北京：高等教育出版社，1992.
7. 村上信吾，齐性流形引论．上海：上海科学技术出版社，1983.
8. 丁同仁、李承治编著，常微分方程教程，北京：高等教育出版社，1991.
9. 项武义、侯自新、孟道骥著，李群讲义，北京：北京大学出版社，1992.
10. 孟道骥编著，复半单李代数引论，北京：北京大学出版社，1998.
11. 严志达著，实半单李代数，天津：南开大学出版社，1998.
12. 严志达、许以超，Lie 群及其 Lie 代数，北京：高等教育出版社，1985.
13. 尤承业编著，基础拓扑学讲义，北京：北京大学出版社，1997.
14. W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*(Second Edition), New York: Academic Press, Inc., 1986.
15. J. Cheeger, D. G. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975.
16. S. S. Chern, *Complex Manifolds Without Potential Theory*, New York: Springer- Verlag, 1979.
17. S. S. Chern, A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds, In: Selected Papers, Vol.1, 83~88, New York: Springer-Verlag, 1978.

18. S. S. Chern, Minimal submanifolds in a Riemannian manifold, In: Selected Papers, Vol.4, 399~462, New York: Springer-Verlag, 1989.

19. S. S. Chern, Vector bundle with connection, In: Selected Papers, Vol.4, 245~268, New York: Springer-Verlag, 1989.

20. M. Dajczer, *Submanifolds and Isometric Immersions*, Houston:Publish or Perish, 1990.

21. M. P. doCarmo, *Riemannian Geometry*, Boston: Birkhauser, 1992.

22. Ph. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, New York: John Wiley & Sons, 1978.

23. M. Gromov, *Partial Relations*, New York: Springer-Verlag, 1986.

24. S. Helgason, *Differential Geometry, Lie groups, and Symmetric Spaces*, New York: Academic Press, 1978.

25. M. W. Hirsch, *Differential Topology*, GTM33, New York: Springer- Verlag, 1976.

26. D. Husemoller, *Fibre Bundles*, New York: McGraw-Hill,1966.

27. G. L. Naber, *Topology, Geometry, and Gauge Fields: Foundations*, New York: Springer-Verlag, 1997.

28. G. L. Naber, *Topology, Geometry, and Gauge Fields: Interactions*,New York: Springer-Verlag, 1997.

29. S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*,Vol. 1, Vol. 2, New York: Wiley Intersciences, 1963, 1969.

30. M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*,Vols. 1-5, Berkeley: Publish or Perish, 1979.

31. J. A. Wolf, *Space of Constant Curvature*, Berkeley: Publish or Perish, 1974.

进一步的参考文献

32. T. Aubin, *Nonlinear Analysis on Manifolds, Monge-Ampere Equations*, New York: Springer-Verlag, 1982.

33. M. Berger, *Riemannian Geometry During The Second Half of The 20th Century*,University Lecture Series, vol.17, Providence: Amer. Math. Soc., 2000.

34. M. Berger, B. Gostiaux, *Differential Geometry: Manifolds, Curves, and Surfaces*, New York: Springer-Verlag, 1988.

35. R. Bryant, S. S. Chern, R. B. Gardner, I. L. Goldschmidt and Ph. A. Griffiths, *Exterior Differential Systems*, New York: Springer Verlag, 1991.

36. I. Chavel, *Riemannian Geometry: A Modern Introduction*, Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

37. M. doCarmo, R. N. Wallach, Minimal immersions of spheres into spheres, In: Ann. of Math., 93(1971), 43~62.

38. S. Gallot, D. Hullin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*,Berlin: Springer-Verlag, 1990.

39. J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, New York: Springer-Verlag, 1998.

40. W. Klingenberg, *Riemannian Geometry*, Berlin: De Gruyter, 1982.

41. S. Lang, *Differential and Riemannian Manifolds*, GTM 160, Springer-Verlag, 1995.

42. J. M. Lee, *Riemannian Manifolds*, GTM176, New York: Springer- Verlag, 1997.

43. P. Petersen, *Riemannian Geometry*, GTM171, New York: Springer-Verlag, 1998.

44. T. Sakai, *Riemannian Geometry*, TMM149, Providence: Amer. Math.

Soc.,1996.

45. P. W. Sharpe, *Differential Geometry*, GTM166, New York: Springer-Verlag, 1997.

46. F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, GTM94, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo: Springer-Verlag, 1983.

47. T. J. Willmore, *Riemannian Geometry*, Oxford: Oxford University Press, 1993.

索 引

(以拼音为序)

北京大学出版社数学重点教材书目

1. 北京大学数学教学系列丛书

书　名	编著者	定价（元）
高等代数简明教程（上、下）（北京市精品教材）（教育部"十五"规划教材）	蓝以中	32.00
实变函数与泛函分析	郭懋正	20.00
复分析导引	李　忠	15.00
黎曼几何引论（上册）	陈维桓　李兴校	24.00
黎曼几何引论（下册）	陈维桓　李兴校	16.00
金融数学引论	吴　岚	18.00
寿险精算基础	杨静平	17.00
二阶抛物型偏微分方程	陈亚浙	16.00
普通统计学（北京市精品教材）	谢衷洁	18.00
数字信号处理（北京市精品教材）	程乾生	18.00
抽样调查（北京市精品教材）	孙山泽	13.50
测度论与概率论基础（北京市精品教材）	程士宏	15.00
应用时间序列分析（北京市精品教材）	何书元	16.00

2. 大学生基础课教材

书　名	编著者	定价（元）
数学分析新讲（第一册）（第二册）（第三册）	张筑生	44.50
数学分析解题指南	林源渠　方企勤	20.00
高等数学简明教程（第一册）（教育部2002优秀教材一等奖）	李　忠等	13.50
高等数学简明教程（第二册）（获奖同第一册）	李　忠等	15.00
高等数学简明教程（第三册）（获奖同第一册）	李　忠等	14.00
高等数学（物理类）（第一册）	文　丽等	20.00
高等数学（物理类）（第二册）	文　丽等	16.00

内容简介

《黎曼几何引论》分上、下两册出版，本书为下册，可以作为"黎曼几何"课程的后续课"黎曼几何 Ⅱ"的教材。当前，微分几何与数学的各个分支的相互影响越来越深刻、关系越来越密切。本书较好地反映了这种紧密的联系，其内容共有三章，包括 Kähler 流形、黎曼对称空间及主纤维丛上的联络。每章末都附有大量的习题，书末并附有习题解答和提示，便于读者深入学习和自学。

本书的选材和叙述都有它独到之处，与现有的数学文献相比颇具特色，可作为综合大学、师范院校数学系、物理系等相关专业研究生课程或研究生讨论班的教材或参考书，也可供从事微分几何、调和分析，以及数学物理等专门方向的研究人员参考。

作者简介

陈维桓　北京大学数学科学学院教授，博士生导师。1964 年毕业于北京大学数学力学系，后师从吴光磊先生读研究生。长期从事微分几何方向的研究工作和教学工作，开设的课程有"微分几何"、"微分流形"、"黎曼几何引论"和"纤维丛的微分几何"等。已出版的著作有：《微分几何讲义》(与陈省身合著)，《黎曼几何选讲》(与伍鸿熙合著)，《微分几何初步》，《微分流形初步》和《极小曲面》等。

李兴校　河南师范大学数学系教授，1994 年在四川大学获得博士学位，主要研究方向是子流形微分几何。

北京大学数学教学系列丛书

黎曼几何引论

(下　册)

陈维桓　李兴校　编著

北京大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

黎曼几何引论(下册)/陈维桓,李兴校编著.—北京:北京大学出版社,2004.1

(北京大学数学教学系列丛书)

ISBN 7-301-06794-1

Ⅰ.黎… Ⅱ.①陈… ②李… Ⅲ.黎曼几何-研究-研究生-教材 Ⅳ.O186.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 118519 号

书　　名:黎曼几何引论(下册)

著作责任者:陈维桓　李兴校　编著

责 任 编 辑:邱淑清

标 准 书 号:ISBN 7-301-06794-1/O·0582

出 版 发 行:北京大学出版社

地　　址:北京市海淀区中关村 北京大学校内　100871

网　　址:http://cbs.pku.edu.cn

电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021

电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn

排　版　者:北京大学印刷厂

印　刷　者:北京大学印刷厂

经　销　者:新华书店

850 毫米×1240 毫米　A5　11.25 印张　300 千字

2004 年 1 月第 1 版　2006 年 8 月第 3 次印刷

印　　数:6001—9000 册

定　　价:18.00 元

序　　言

自 1995 年以来,在姜伯驹院士的主持下,北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际,创造性地贯彻教育部"加强基础,淡化专业,因材施教,分流培养"的办学方针,全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势,在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新,以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革,取得了显著的成效。2001 年,北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖,在国内外产生很大反响。

在本科教育改革方面,我们按照加强基础、淡化专业的要求,对教学各主要环节进行了调整,使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上,接受学时充分、强度足够的严格训练;在对学生分流培养阶段,我们在课程内容上坚决贯彻"少而精"的原则,大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容,为新的培养方向、实践性教学环节,以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间。这样既使学生打下宽广、坚实的基础,又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向。与上述改革相适应,积极而慎重地进行教学计划的修订,适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时。并增加了数学模型和计算机的相关课程,使学生有更大的选课余地。

在研究生教育中,在注重专题课程的同时,我们制定了 30 多门研究生普选基础课程(其中数学系 18 门),重点拓宽学生的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解。

教材建设是教学成果的一个重要体现。与修订的教学计划相

配合，我们进行了有组织的教材建设。计划自1999年起用8年的时间修订、编写和出版40余种教材。这就是将陆续呈现在大家面前的《北京大学数学教学系列丛书》。这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考，记录了我们教学实践的足迹，体现了我们教学改革的成果，反映了我们对新世纪人才培养的理念，代表了我们新时期的数学教学水平。

经过20世纪的空前发展，数学的基本理论更加深入和完善，而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛，而且活跃于生产第一线，促进着技术和经济的发展，所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识。同时也促使数学研究的方式发生巨大变化。作为整个科学技术基础的数学，正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透。作为一种文化，数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素，将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识。数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础。数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革。我们现在的改革还是初步的。教学改革无禁区，但要十分稳重和积极；人才培养无止境，既要遵循基本规律，更要不断创新。我们现在推出这套丛书，目的是向大家学习。让我们大家携起手来，为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力。

张 继 平

2002年5月18日

于北京大学蓝旗营

前 言

《黎曼几何引论》上、下两册的分工是：上册作为基础数学专业研究生课程“黎曼几何引论”的教材，其主要内容应该、而且能够在周学时为3、或4的一学期课程中讲完，重点是黎曼几何的基本概念和基本理论，以及大范围黎曼几何的主要结果和变分方法的运用；下册可以作为后续课程“黎曼几何Ⅱ”的教材，或讨论班的学习材料．当前，微分几何与数学的各个分支的相互影响越来越深刻、关系越来越密切，本书的下册则体现了这种紧密的联系．例如，Kähler流形是复流形几何以及代数几何的主要角色，在本书我们从微分几何的角度论述了Kähler流形上的各种结构的相容性及其几何意义．黎曼对称空间是一类特殊的黎曼流形，有相当丰富的对称性质，与李群和李代数有密切的联系，它是微分几何的重要研究对象，也是调和分析等的演绎舞台．微分几何在数学各个分支中的主要应用是，它提供了一种对于光滑切向量场进行微分的结构，所以联络是微分几何的核心内容．本书的第十章从平行移动的角度阐述了主丛上的联络的由来及其几何意义．一个约定俗成的准则是，一个数学命题是否属于微分几何的范畴，关键是看它是否涉及曲率的概念．曲率是图形或某种空间结构通过微分手段获得的不变量，是微分几何中最基本的概念，是衡量空间的某种结构是否平凡的数量特征．本书各章都要讲到各种结构的曲率及其几何意义为止．

翻阅本书不难发现，本书的选材和叙述与现有的数学文献相比较都有它的独到之处．本书是作者在北京大学学习微分几何和长期从事微分几何教学和研究的经验总结．在这里，我们特别怀念吴光磊教授，因为本书的有些讲法出自吴先生在讨论班上的演讲，例如，复向量空间的对偶空间，向量丛上联络所诱导的水平分布等等都是吴先生在讨论班上曾经讲过的内容，凝集了他的学习心得．而且，他经常要求我们用最简洁的语言把概念清晰地表达出来．我们在本书所追求的目标

之一就是把概念的由来和意义讲清楚，而不满足于它们的形式表述．数学的概念不只是术语和公式的堆砌，它们都有发生、发展和推广的过程．我们试图努力反映这种发展的过程．例如，第十章的 (2.18) 式定义的标架丛上的联络形式 θ 是主丛上的联络形式的特殊情形，我们还进一步指出：实际上它是向量丛 E 上的活动标架的相对分量．在这样理解的基础上，我们才能体会到抽象概念的丰富、生动的内涵，而不只是一堆枯燥的公式．当然，本书只提供了 Kähler 流形、黎曼对称空间、主纤维丛上的联络的基础理论，并不是直接从事这些课题的前沿研究，但是它们为有关课题的前沿研究提供了坚实的基础，我们相信这些内容对于从事微分几何、非线性分析、调和分析和数学物理研究的工作者是十分有用的．

和上册一样，李兴校教授参与了本书的写作，特别是本书的习题、答案和提示以及 §10.6 是由他执笔的．本书的写作得到国家自然科学基金 (项目批准号 NSFC 10271004) 的资助，我们对此表示衷心的感谢．作者对责任编辑邱淑清老师的卓有成效的辛勤工作表示感谢．20 年多来，她为数学书籍的出版倾注了很多心血，严格、细致的工作作风有口皆碑．借此机会向她表示崇高的敬意．

限于作者的水平，本书中的不足之处肯定是存在的，诚恳地希望读者能不吝指正．

陈维桓

2003 年 8 月于北京大学

下 册 目 录

上 册 要 目

第一章 微分流形

微分流形，光滑映射，单位分解定理，切向量和切空间，光滑切向量场，光滑张量场，外微分式，外微分式的积分和 Stokes 定理，切丛和向量丛

第二章 黎曼流形

黎曼度量，黎曼流形的例子，切向量场的协变微分，联络和黎曼联络，黎曼流形上的微分算子，联络形式，平行移动，向量丛上的联络

第三章 测地线

测地线的概念，指数映射，弧长的第一变分公式， Gauss 引理和法坐标系，测地凸邻域， Hopf-Rinow 定理

第四章 曲率

曲率张量，曲率形式，截面曲率， Ricci 曲率和数量曲率， Ricci 恒等式

第五章 Jacobi 场和共轭点

Jacobi 场，共轭点， Cartan-Hadamard 定理， Cartan 等距定理，空间形式

第六章 弧长的第二变分公式

弧长的第二变分公式， Bonnet-Myers 定理， Synge 定理，基本指标引理， Rauch 比较定理

第七章 黎曼流形的子流形

子流形的基本公式，子流形的基本方程，欧氏空间中的子流形，极小子流形，体积的第二变分公式

第八章　Kähler 流形

在第二章到第四章，我们已经系统地介绍了黎曼几何的基本理论，特别是黎曼流形上的黎曼联络、测地线和黎曼曲率张量等等. 在当代数学的研究中，复流形的几何变得越来越重要了，特别是 Kähler 流形. 所谓的 Kähler 流形是一个具有在典型复结构的作用下不变的黎曼度量的复流形，同时它的典型复结构在相应的黎曼联络下又是平行的. 因此，Kähler 流形是一类特殊的黎曼流形，具有更加丰富的几何结构，从而具有更加丰富多彩的几何性质. 当然，Kähler 流形可以从代数几何的角度进行研究，而且它是代数几何的主角，但是从微分几何的角度来了解它的几何结构和特征是十分重要的，是研究 Kähler 流形的基础. 在本章主要介绍复流形、Hermite 流形和 Kähler 流形在微分几何方面的基础理论，即介绍这些特殊黎曼流形上的各种联络和曲率.

§8.1　复向量空间

8.1.1　复结构

在研究复流形时需要和复向量空间打交道，因此我们首先讨论复向量空间. 从代数上看，复向量空间和实向量空间的定义是一样的，只需要把基域实数域改为复数域. 但是从几何上看有它的复杂性. 一个复向量空间同时也是一个实向量空间 (因为实数域是复数域的子域)，但是具有一个特定的几何结构，即所谓的复结构. 在考虑复向量空间及其作为有复结构的实向量空间的对偶向量空间时便会出现各种不同的情况. 本节着重讨论复向量空间和实向量空间之间的关系.

设 V 是一个复向量空间，即在 V 中有两种运算：加法以及与复数的乘法，它们满足条件：

(1) V 关于加法构成一个交换群;

(2) 对于任意的 $u, v \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ 有

$$1 \cdot u = u, \quad (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u),$$
$$\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v, \quad (\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u.$$

若有 V 的一组元素 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 使得 V 的任意一个元素 v 都能够唯一地表示为它们的复系数线性组合, 即存在唯一的一组复数 $(v^1, \cdots, v^n)$, 使得

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i, \tag{1.1}$$

则称 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是复向量空间 V 的一个 **基底**. 很明显, V 的基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 V 中极大的复线性无关元素组. 极大复线性无关元素组的成员个数与该组的取法无关, 称为复向量空间 V 的 **(复) 维数**.

当复向量空间 V 的基域限制为实数域时, 即只考虑 V 中的元素与实数相乘时, 则 V 本身也是一个实向量空间. 为了强调起见, 在把 V 看作实向量空间时, 记为 $V_{\mathbb{R}}$. 要指出的是, 作为集合, $V = V_{\mathbb{R}}$; 但是, 在 V 中元素与复数的乘法是有意义的, 而在 $V_{\mathbb{R}}$ 中只考虑其元素与实数的乘法.

假设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是复向量空间 V 的一个基底, 则 $\{e_1, \cdots, e_n, \sqrt{-1}\,e_1, \cdots, \sqrt{-1}\,e_n\}$ 构成实向量空间 $V_{\mathbb{R}}$ 的基底. 事实上, 对于 $v \in V$, 有唯一的复线性表达式 (1.1). 若设

$$v^i = a^i + \sqrt{-1}\,b^i, \quad a^i, b^i \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

则

$$v = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i + \sum_{i=1}^{n} b^i(\sqrt{-1}\,e_i), \tag{1.3}$$

即 v 是 $\{e_i, \sqrt{-1}\,e_i\}$ 的实线性组合. 显然, $\{e_i, \sqrt{-1}\,e_i\}$ 是实线性无关的, 因而构成 $V_{\mathbb{R}}$ 的基底. 由此可见, $V_{\mathbb{R}}$ 是 $2n$ 维实向量空间.

在 $V_{\mathbb{R}}$ 上可以定义实线性变换 $J: V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$, 使得

$$\begin{cases} Je_i = \sqrt{-1}\,e_i, \\ J(\sqrt{-1}\,e_i) = -e_i, \quad 1 \le i \le n. \end{cases} \tag{1.4}$$

对于任意的 $v \in V_{\mathbb{R}}$, 设 (1.3) 式成立, 则

$$\begin{aligned} Jv &= \sum_{i=1}^{n} a^i J(e_i) + \sum_{i=1}^{n} b^i J(\sqrt{-1}\,e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a^i(\sqrt{-1}\,e_i) + \sum_{i=1}^{n} b^i(-e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{-1}\,a^i - b^i)e_i = \sqrt{-1} \cdot v. \end{aligned} \tag{1.5}$$

上式的含意是: J 在 $v \in V_{\mathbb{R}}$ 上的作用相当于把 v 看作 V 中的元素乘以 $\sqrt{-1}$, 然后再把它作为 $V_{\mathbb{R}}$ 中的元素. 由此可见, 实线性变换 J 在 $V_{\mathbb{R}}$ 上的作用是已定义好的, 与 V 的基底 $\{e_i\}$ 的选取无关.

很明显, 线性变换 J 满足 $J^2 = J \circ J = -\mathrm{id}$.

定义 1.1　设 W 是一个实向量空间. 若有一个线性变换 $J: W \to W$ 满足条件 $J^2 = -\mathrm{id}$, 则称 J 是 W 上的一个 **复结构**.

很明显, 复结构是实向量空间 W 上的一个特殊的 $(1,1)$ 型张量.

设 V 是一个有限维复向量空间, 在把 V 视为实向量空间 $V_{\mathbb{R}}$ 时, 由 (1.5) 式定义的映射 $J: V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ 就是 $V_{\mathbb{R}}$ 上的一个复结构, 称为 $V_{\mathbb{R}}$ 上的 **典型复结构**.

反过来, 有下面的

命题 1.1　设 W 是有复结构 J 的 m 维实向量空间, 则 m 必是偶数, 设 $m = 2n$; 并且存在 W 的一个基底 $\{e_\alpha, 1 \le \alpha \le 2n\}$, 使得

$$Je_i = e_{n+i}, \quad Je_{n+i} = -e_i, \quad 1 \le i \le n.$$

因此存在一个 n 维复向量空间 V, 使得 $V_{\mathbb{R}} = W$, 并且 J 恰好是 $V_{\mathbb{R}}$ 上的典型复结构.

证明 首先定义复数和向量空间 W 中的元素的乘法如下：设 $a+\sqrt{-1}b\in\mathbb{C}$, $v\in W$, 命

$$(a+b\sqrt{-1})\cdot v=av+bJv. \tag{1.6}$$

容易验证：对于任意的 $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, $u,v\in W$ 有

$$\lambda(\mu u)=(\lambda\mu)u,$$
$$\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v,$$
$$(\lambda+\mu)u=\lambda u+\mu u.$$

所以 W 关于与复数的乘法 (1.6) 成为一个复向量空间，记为 V. 很明显，$V_{\mathbb{R}}=W$, 且 J 是 $V_{\mathbb{R}}$ 的典型复结构.

若设 $\dim_{\mathbb{C}}V=n$, 则 $m=2n$. 在复向量空间 V 中任意取定一个基底 $\{e_i:1\le i\le n\}$, 则 $Je_i=\sqrt{-1}e_i$, 并且 $\{e_1,\cdots,e_n,Je_1,\cdots,Je_n\}$ 是实向量空间 $W=V_{\mathbb{R}}$ 的基底. 证毕.

由此可见，复向量空间 V 等价于有一个确定的复结构 J 的偶数维实向量空间 $V_{\mathbb{R}}$.

定义 1.2 设 V,W 是两个复向量空间，$f:V\to W$ 是从 V 到 W 的一个映射. 如果对于任意的 $u,v\in V$ 和任意的 $\lambda\in\mathbb{C}$ 有

$$f(u+v)=f(u)+f(v),$$
$$f(\lambda u)=\lambda f(u),$$

则称 $f:V\to W$ 是**复线性映射**. 如果进一步要求 $f:V\to W$ 是可逆的，则其逆也是复线性映射，此时称 f 是复向量空间 V 和 W 的 **(复线性) 同构**.

很明显，从 n 维复向量空间 V 到它自身的复线性同构的集合关于映射的复合成为一个群，记为 $\mathrm{GL}(V)$. 若在 V 中取定一个基底 $\{e_i\}$, 则群 $\mathrm{GL}(V)$ 和 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$(非退化 $n\times n$ 复矩阵的集合) 是同构的.

从定义知道，复线性映射 $f:V\to W$ 也是实线性映射. 若用 $J,\tilde{J}$ 分别表示 $V_{\mathbb{R}},W_{\mathbb{R}}$ 上的典型复结构，由于 f 是复线性映射，故 $f(\sqrt{-1}v)=\sqrt{-1}f(v)$, 即 $f\circ J(v)=\tilde{J}\circ f(v),\forall v\in V$, 因此 $f\circ J=\tilde{J}\circ f$. 如下的逆命题也成立：

命题 1.2 设 V,W 是两个有限维复向量空间，$J,\tilde{J}$ 分别是 $V_{\mathbb{R}},W_{\mathbb{R}}$ 上的典型复结构. 若实线性映射 $f:V_{\mathbb{R}}\to W_{\mathbb{R}}$ 满足条件

$$f\circ J=\tilde{J}\circ f, \tag{1.7}$$

则 f 是从 V 到 W 的复线性映射.

证明 由于 $J,\tilde{J}$ 分别是 $V_{\mathbb{R}},W_{\mathbb{R}}$ 上的典型复结构，故 $v\in V,w\in W$ 与 $\sqrt{-1}$ 的乘积分别是

$$\sqrt{-1}v=Jv,\quad \sqrt{-1}w=\tilde{J}w.$$

这样，对于任意的 $a,b\in\mathbb{R}$, $v\in V$ 有

$$\begin{aligned}f((a+\sqrt{-1}b)v)&=f(av+bJv)=af(v)+bf(Jv)\\&=af(v)+b\tilde{J}f(v)=(a+b\sqrt{-1})f(v),\end{aligned}$$

即 f 是复线性映射. 证毕.

例 1.1 n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$.

设 $\mathbb{C}$ 是复数域，$\mathbb{C}^n$ 是 n 元有序复数组构成的集合，即

$$\mathbb{C}^n=\{(z^1,\cdots,z^n);\ z^i\in\mathbb{C},\ 1\le i\le n\}, \tag{1.8}$$

则 $\mathbb{C}^n$ 关于通常的加法和数乘运算构成一个 n 维复向量空间.

如果令 $z^i=x^i+\sqrt{-1}y^i$, $x^i,y^i\in\mathbb{R}$, $1\le i\le n$, 则 $\mathbb{C}^n$ 与 $\mathbb{R}^{2n}$ 有如下的一一对应关系：

$$\mathbb{C}^n\ni(z^1,\cdots,z^n)\longleftrightarrow(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n)\in\mathbb{R}^{2n}. \tag{1.9}$$

因此可以把 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{R}^{2n}$ 等同起来. 在上述对应关系下,

$$\sqrt{-1}(z^1,\cdots,z^n)\longleftrightarrow(-y^1,\cdots,-y^n,x^1,\cdots,x^n). \tag{1.10}$$

于是利用 (1.10) 式得到定义在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的复结构 $J_0:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$, 使得

$$J_0(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n)=(-y^1,\cdots,-y^n,x^1,\cdots,x^n). \tag{1.11}$$

容易看出, 在对应关系 (1.9) 下, $\mathbb{C}^n$ 等同于 $(\mathbb{R}^{2n},J_0)$.

从实向量空间出发还可以通过另一条途径获得复向量空间, 即实向量空间的复化.

设 V 是一个 m 维实向量空间, 则 V 与它自身的直和 $W=V\oplus V$ 是 $2m$ 维实向量空间. 定义线性变换 $J:W\to W$, 使得

$$J(x,y)=(-y,x),\qquad \forall(x,y)\in V\oplus V, \tag{1.12}$$

则有 $J^2=-\mathrm{id}$. 因此, J 是 W 上的一个复结构. 我们把 (W,J) 所对应的 m 维复向量空间称为 m 维实向量空间 V 的**复化** (空间), 并记为 $V^{\mathbb{C}}$.

复化向量空间 $V^{\mathbb{C}}$ 也可以看作复数 $\mathbb{C}$ 和 V 作为实向量空间的张量积 $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}V$. 事实上, $\mathbb{C}$ 作为实向量空间的典型基底是 $\{1,\sqrt{-1}\}$. 取定 V 的基底 $\{e_1,\cdots,e_m\}$, 那么 $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}V$ 的一个基底是

$$\{1\otimes e_1,\cdots,1\otimes e_m,\sqrt{-1}\otimes e_1,\cdots,\sqrt{-1}\otimes e_m\}.$$

为方便起见, 把它们简单地记为 $\{e_1,\cdots,e_m,\sqrt{-1}e_1,\cdots,\sqrt{-1}e_m\}$. 在 $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}V$ 中定义线性变换 J_0 如下:

$$J_0(e_i)=\sqrt{-1}e_i,\qquad J_0(\sqrt{-1}e_i)=-e_i, \tag{1.13}$$

则 J_0 与 V 的基底 $\{e_i\}$ 的选取无关, 且有 ${J_0}^2=-\mathrm{id}$, 故 J_0 是 $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}V$ 上的复结构.

另一方面, 设 $\{e_i\}$ 是 V 的基底, 则 $\{(e_i,0),(0,e_i);\ \ 1\le i\le m\}$ 是 W 的基底, 并且由 (1.12) 式得知

$$J(e_i,0)=(0,e_i),\qquad J(0,e_i)=-(e_i,0).$$

定义线性映射 $\varphi:W\to\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}V$, 使得

$$\varphi(e_i,0)=e_i,\qquad \varphi(0,e_i)=\sqrt{-1}e_i, \tag{1.14}$$

则 φ 是实线性同构, 并且满足

$$\varphi\circ J=J_0\circ\varphi. \tag{1.15}$$

因此, φ 是 (W,J) 和 $(\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}V,J_0)$ 作为复向量空间的复线性同构, 于是 $V^{\mathbb{C}}$ 和 $(\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}V,J_0)$ 所对应的复向量空间可以等同起来. 这样, $V^{\mathbb{C}}$ 中的元素便可以表示为

$$\begin{aligned}v&=\sum_{i=1}^m(a^i+\sqrt{-1}b^i)e_i\\&=\sum_{i=1}^m a^ie_i+\sqrt{-1}\sum_{i=1}^m b^ie_i\in V\oplus\sqrt{-1}V,\end{aligned}$$

由此可见, $V^{\mathbb{C}}=V\oplus\sqrt{-1}V$.

对于复化空间 $V^{\mathbb{C}}$ 而言, 原来的实向量空间 V 称为 $V^{\mathbb{C}}$ 的**实形式**.

值得注意的是, 任意一个复向量空间都是某个实向量空间的复化空间, 因而复向量空间总是有它的实形式, 但是它的实形式却不是唯一的. 事实上, 在 m 维复向量空间 V 中任意取定一个基底 $\{e_1,\cdots,e_m\}$, 命

$$W=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e_1,\cdots,e_m\}=\left\{w=\sum_{i=1}^m a^ie_i:a^i\in\mathbb{R}\right\},$$

则 W 是 $2m$ 维实向量空间 $V_{\mathbb{R}}$ 的子空间. 很明显, $V=W^{\mathbb{C}}$.

8.1.2 复向量空间上的线性函数

下面来考虑复向量空间的对偶向量空间. 需要指出的是, 复向量空间上的线性函数有复数值复线性函数、复数值实线性函数和实数值实线性函数之分.

定义 1.3 设 V 是 n 维复向量空间, $\alpha: V \to \mathbb{C}$ 是 V 上的一个复数值函数. 如果

(1) 对于任意的 $x, y \in V$, 有 $\alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y)$;

(2) 对于任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和 $x \in V$, 有 $\alpha(\lambda x) = \lambda\alpha(x)$,

则称 α 是 V 上的 **复线性函数**. V 上的复线性函数全体构成的集合是一个复向量空间, 称为复向量空间 V 的 (复) **对偶向量空间**, 并记为 V^*.

由此可见, 定义 1.3 是定义 1.2 在 $W = \mathbb{C}$ 时的特殊情形.

若在 (2) 中, 只要求 $\alpha(\lambda x) = \lambda\alpha(x)$ 对于任意的实数 λ 成立, 则称 α 是 V 上的 **(复值) 实线性函数**.

V 上的实值实线性函数可以类似地定义, 其全体构成集合是实向量空间 $V_{\mathbb{R}}$ 的对偶空间 $V_{\mathbb{R}}^*$.

显然, $V_{\mathbb{R}}^*$ 的复化向量空间 $(V_{\mathbb{R}}^*)^{\mathbb{C}}$ 恰好是 $V_{\mathbb{R}}$ 上的复值实线性函数的全体构成的集合 (证明留作习题). 从几何的角度来看, 比较常用的空间是 $V_{\mathbb{R}}^*$ 和 $(V_{\mathbb{R}}^*)^{\mathbb{C}}$.

$V_{\mathbb{R}}$ 上的复结构 J 在 $V_{\mathbb{R}}^*$ 上自然地诱导出一个复结构, 仍记作 J, 它的定义是: 对于任意的 $\alpha \in V_{\mathbb{R}}^*$,

$$(J\alpha)(x) = \alpha(Jx), \qquad \forall x \in V_{\mathbb{R}}. \tag{1.16}$$

显然, 对于任意的 $\alpha \in V_{\mathbb{R}}^*$, 有 $J(J(\alpha)) = -\alpha$.

在复向量空间 V 中取定一个基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 则 $V_{\mathbb{R}}$ 的一个基底是 $\{e_1, \cdots, e_n, Je_1, \cdots, Je_n\}$; 记 $e_{\bar{i}} = Je_i$, 其中 $\bar{i} = n+i$, $1 \le i \le n$.

用 $\{\theta^i, \theta^{\bar{i}}\}$ 表示在 $V_{\mathbb{R}}^*$ 中与 $\{e_i, e_{\bar{i}}\}$ 对偶的基底, 即 $\theta^\alpha(e_\beta) = \delta^\alpha_\beta$, $1 \le \alpha, \beta \le 2n$. 则由 (1.16) 式得到

$$J\theta^i = -\theta^{\bar{i}}, \qquad J\theta^{\bar{i}} = \theta^i. \tag{1.17}$$

由于 J 作为 $V_{\mathbb{R}}^*$ 上的线性变换满足 $J^2 = -\mathrm{id}$, 它的特征值是 $\pm\sqrt{-1}$, 不是实数, 所以在 $V_{\mathbb{R}}^*$ 中不存在 J 的特征向量. 为了得到 J 的特征向量, 必须在复化向量空间 $(V_{\mathbb{R}}^*)^{\mathbb{C}}$ 中考虑. 为此, 先将 J 作复线性扩张, 使之成为 $(V_{\mathbb{R}}^*)^{\mathbb{C}}$ 上的复结构. 这样, 对于任意的 $\alpha \in (V_{\mathbb{R}}^*)^{\mathbb{C}}$ 有

$$J(\alpha - \sqrt{-1}\,J\alpha) = \sqrt{-1}\,(\alpha - \sqrt{-1}\,J\alpha),$$
$$J(\alpha + \sqrt{-1}\,J\alpha) = -\sqrt{-1}\,(\alpha + \sqrt{-1}\,J\alpha).$$

因此, $\alpha - \sqrt{-1}\,J\alpha, \alpha + \sqrt{-1}\,J\alpha$ 分别是在 $(V_{\mathbb{R}}^*)^{\mathbb{C}}$ 中复结构 J 的对应于特征值 $\sqrt{-1}$ 和 $-\sqrt{-1}$ 的特征向量.

用 $(V_{\mathbb{R}}^*)^{(1,0)}$ 和 $(V_{\mathbb{R}}^*)^{(0,1)}$ 分别表示在 $(V_{\mathbb{R}}^*)^{\mathbb{C}}$ 中对应于特征值 $\sqrt{-1}$ 和 $-\sqrt{-1}$ 的特征向量所组成的复向量空间, 其中的元素分别称为 $V_{\mathbb{R}}$ 上的 $(1,0)$ **形式** 和 $(0,1)$ **形式**. 由于

$$\alpha = \frac{1}{2}(\alpha - \sqrt{-1}\,J\alpha) + \frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{-1}\,J\alpha), \quad \forall \alpha \in (V_{\mathbb{R}}^*)^{\mathbb{C}}, \tag{1.18}$$

故有直和分解

$$(V_{\mathbb{R}}^*)^{\mathbb{C}} = (V_{\mathbb{R}}^*)^{(1,0)} \oplus (V_{\mathbb{R}}^*)^{(0,1)}. \tag{1.19}$$

由 (1.18) 式可知, 在 $V_{\mathbb{R}}$ 上的复值实线性函数 α 可以分解为 $(1,0)$ 形式和 $(0,1)$ 形式之和:

$$\alpha = \alpha^{(1,0)} + \alpha^{(0,1)}, \tag{1.20}$$

其中

$$\alpha^{(1,0)} = \frac{1}{2}(\alpha - \sqrt{-1}\,J\alpha), \quad \alpha^{(0,1)} = \frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{-1}\,J\alpha). \tag{1.21}$$

所以，$\alpha \in (V_{\mathbb{R}}^*)^{\mathbb{C}}$ 是实值 1-形式的条件是 $\alpha^{(1,0)} = \overline{\alpha^{(0,1)}}$.

令

$$\omega^i = \theta^i - \sqrt{-1}J\theta^i, \quad \overline{\omega^i} = \theta^i + \sqrt{-1}J\theta^i, \tag{1.22}$$

则 $\{\omega^1, \cdots, \omega^n\}$ 和 $\{\overline{\omega^1}, \cdots, \overline{\omega^n}\}$ 分别是 $(V_{\mathbb{R}}^*)^{(1,0)}$ 和 $(V_{\mathbb{R}}^*)^{(0,1)}$ 的基底，并且

$$\theta^i = \frac{1}{2}(\omega^i + \overline{\omega^i}), \qquad \theta^{\bar{i}} = \frac{\sqrt{-1}}{2}(\overline{\omega^i} - \omega^i). \tag{1.23}$$

事实上，若 $\alpha \in (V_{\mathbb{R}}^*)^{(1,0)}$, 则 α 能够表示成

$$\alpha = \sum_{i=1}^n (a_i\theta^i + b_i\theta^{\bar{i}}), \quad \text{并且 } J\alpha = \sqrt{-1}\alpha.$$

用 (1.17) 式得到

$$\sqrt{-1}a_i = b_i, \quad \sqrt{-1}b_i = -a_i,$$

因此

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum_{i=1}^n (a_i\theta^i - \sqrt{-1}a_iJ\theta^i) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i(\theta^i - \sqrt{-1}J\theta^i) = \sum_{i=1}^n a_i\omega^i.\end{aligned}$$

同理，若 $\alpha \in (V_{\mathbb{R}}^*)^{(0,1)}$, 则 α 能够表示成 $\overline{\omega^i}$ 的复线性组合.

一般地，空间

$$\bigwedge\nolimits^{p,q}(V_{\mathbb{R}}^*)^{\mathbb{C}} = \left(\bigwedge\nolimits^p(V_{\mathbb{R}}^*)^{(1,0)}\right) \wedge \left(\bigwedge\nolimits^q(V_{\mathbb{R}}^*)^{(0,1)}\right)$$

中的元素称为 $V_{\mathbb{R}}$ 上的 (p,q)**形式**. $V_{\mathbb{R}}$ 上的任意一个复值 $r(\leq 2n)$ 次外形式可以分解为

$$\alpha = \sum_{p+q=r} \alpha^{(p,q)}, \quad \alpha^{(p,q)} \in \bigwedge\nolimits^{p,q}(V_{\mathbb{R}}^*)^{\mathbb{C}}. \tag{1.24}$$

用基底向量表示，(p,q) 形式 $\alpha^{(p,q)}$ 的表达式为

$$\alpha^{(p,q)} = \alpha_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_p} \wedge \overline{\omega^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{\omega^{j_q}}, \tag{1.25}$$

其中 $\alpha_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q} \in \mathbb{C}$.

在复向量空间 V 中取一个基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 它在 V^* 中的对偶基底记为 $\{\omega^1, \cdots, \omega^n\}$, 则 ω^i 是 V 上的复线性函数，并且满足条件 $\omega^i(e_j) = \delta^i_j$. 将 ω^i 看作 V 上的复数值实线性函数，并把它分解为实部和虚部

$$\omega^i = \theta^i + \sqrt{-1}\theta^{\bar{i}}, \tag{1.26}$$

则 $\theta^i, \theta^{\bar{i}}$ 都是 V 上的实值实线性函数，即 $\theta^i, \theta^{\bar{i}} \in V_{\mathbb{R}}^*$. 很明显，$\{\theta^i, \theta^{\bar{i}}\}$ 是在 $V_{\mathbb{R}}^*$ 中与 $\{e_i, e_{\bar{i}} = Je_i\}$ 对偶的基底，故 (1.17) 式成立，因而 $J\omega^i = \sqrt{-1}\omega^i$. 由此可见，复向量空间 V^* 可以和 $(V_{\mathbb{R}}^*)^{(1,0)}$ 等同起来，只要把 $\alpha \in V^*$ 看作 V 上的实线性函数就行了. 反过来，$\alpha \in (V_{\mathbb{R}}^*)^{\mathbb{C}}$ 能够作为 V 上的复线性函数的条件是 $\alpha \circ J = \sqrt{-1}\alpha$, 即 $J(\alpha) = \sqrt{-1}\alpha$, 也就是 $\alpha \in (V_{\mathbb{R}}^*)^{(1,0)}$.

8.1.3 Hermite 内积

最后我们来讨论复向量空间 V 上的 Hermite 内积.

定义 1.4 设 V 是 n 维复向量空间，$h: V \times V \to \mathbb{C}$ 是定义在 V 上的二元复值函数. 如果 h 满足下列条件，则称 h 是 V 上的一个 **Hermite 内积**:

(1) h 是实双线性函数，即对于任意的 $x, y, z \in V$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$h(x + \lambda z, y) = h(x, y) + \lambda h(z, y),$$
$$h(x, y + \lambda z) = h(x, y) + \lambda h(x, z);$$

(2) h 关于第一个自变量是复线性的，即对于任意的 $x, y \in V$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$, 有

$$h(\lambda x, y) = \lambda h(x, y);$$

(3) 对于任意的 $x, y \in V$ 有

$$h(y,x) = \overline{h(x,y)};$$

(4) 对于任意的 $x \in V$ 有 $h(x,x) \geq 0$, 并且等号只在 $x=0$ 时成立.

条件 (4) 称为 Hermite 内积 h 的**正定性**.

从条件 (2), (3) 可知: 对于任意的 $x, y \in V$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$, 有

$$h(x, \lambda y) = \bar{\lambda} h(x,y). \tag{1.27}$$

把 h 分解为实部和虚部, 即令

$$h(x,y) = g(x,y) + \sqrt{-1}\, k(x,y), \tag{1.28}$$

则由条件 (1) 得知 g, k 都是 V 上的实值实双线性函数. 由于在 V 作为实向量空间 $V_{\mathbb{R}}$ 时有复结构 J, 使得 $Jx = \sqrt{-1}\, x$, $\forall x \in V_{\mathbb{R}}$, 故由条件 (2) 得到

$$\begin{aligned} g(Jx,y) + \sqrt{-1}\, k(Jx,y) &= h(Jx,y) = h(\sqrt{-1}\, x, y) \\ &= \sqrt{-1}\, h(x,y) = \sqrt{-1}\,(g(x,y) + \sqrt{-1}\, k(x,y)) \\ &= -k(x,y) + \sqrt{-1}\, g(x,y). \end{aligned}$$

因此

$$k(x,y) = -g(Jx,y), \quad g(x,y) = k(Jx,y), \quad \forall x,y \in V_{\mathbb{R}}. \tag{1.29}$$

这意味着, k 和 g 可以借助于复结构 J 互相表示.

将条件 (3) 用于 (1.28) 式得到

$$g(y,x) + \sqrt{-1}\, k(y,x) = h(y,x) = \overline{h(x,y)} = g(x,y) - \sqrt{-1}\, k(x,y),$$

故有

$$g(y,x) = g(x,y), \qquad k(y,x) = -k(x,y). \tag{1.30}$$

再由 (1.29) 和 (1.30) 两式得到

$$g(Jx, Jy) = -k(x, Jy) = k(Jy, x) = g(y,x) = g(x,y). \tag{1.31}$$

同理,

$$k(Jx, Jy) = k(x,y), \quad \forall x, y \in V_{\mathbb{R}}. \tag{1.32}$$

所以 g 是 $V_{\mathbb{R}}$ 上在复结构 J 的作用下保持不变的对称双线性形式; k 是 $V_{\mathbb{R}}$ 上在 J 的作用下保持不变的 2 次外形式, 称为 h 的 **Kähler 形式**.

从条件 (4) 和 (1.30) 式得到

$$h(x,x) = g(x,x) \geq 0; \tag{1.33}$$

同时等号成立当且仅当 $x=0$, 故 g 是正定的.

综上所述, 如果 h 是复向量空间 V 上的 Hermite 内积, 那么它的实部 g 是 $V_{\mathbb{R}}$ 上在复结构 J 的作用下不变的欧氏内积; 其虚部 k 可以由 g 通过下式确定:

$$k(x,y) = -g(Jx,y) = g(x,Jy), \quad \forall x,y \in V. \tag{1.29$'$}$$

反过来, 如果在 $V_{\mathbb{R}}$ 上任意给定一个在 J 的作用下保持不变的欧氏内积 g, 那么在 V 上就决定了一个 Hermite 内积 h, 使得它的实部就是 g. 因此, 在 V 上指定一个 Hermite 内积相当于在 $V_{\mathbb{R}}$ 上指定一个 J-不变的欧氏内积. 至于 $V_{\mathbb{R}}$ 上的 J-不变内积的存在性是明显的. 实际上, 在 $V_{\mathbb{R}}$ 上任意取定一个欧氏内积 $g_0 : V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, 令

$$g(x,y) = \frac{1}{2}(g_0(x,y) + g_0(Jx,Jy)), \quad \forall x,y \in V_{\mathbb{R}}, \tag{1.34}$$

则 g 就是 $V_{\mathbb{R}}$ 上的 J-不变欧氏内积.

现在来求 h, g, k 的坐标表达式. 在复向量空间 V 中取定一个基底 $\{e_i\}$, 它在 V^* 中的对偶基底记为 $\{\omega^i\}$, 其中 ω^i 是 V 上的复线性函数, 同时也是 $V_{\mathbb{R}}$ 上的复值实线性函数, 并且有 $\omega^i(e_j) = \delta^i_j$. 令

$$h_{ij} = h(e_i, e_j), \tag{1.35}$$

则由条件 (3) 得到

$$h_{ji} = \overline{h_{ij}}. \tag{1.36}$$

设

$$x = \sum x^i e_i, \quad y = \sum y^j e_j,$$

则

$$\begin{aligned} h(x,y) &= \sum_{i,j} x^i \overline{y^j} h(e_i, e_j) = \sum_{i,j} h_{ij} \omega^i(x) \overline{\omega^j(y)} \\ &= \left(\sum_{i,j} h_{ij} \omega^i \otimes \overline{\omega^j} \right)(x, y). \end{aligned}$$

因此

$$h = \sum_{i,j} h_{ij} \omega^i \otimes \overline{\omega^j}. \tag{1.37}$$

另一方面，h 也是 $V_{\mathbb{R}}$ 上的复值实双线性函数 (定义 1.3 的条件 (1)). 因此，把表达式 (1.37) 中的 ω^i 理解为 $V_{\mathbb{R}}$ 上的复值实线性函数，将 ω^i 分解为实部和虚部，如 (1.26) 式所示．那么 $\theta^i, \theta^{\bar{i}} (1 \le i \le n)$ 都是 $V_{\mathbb{R}}$ 上的实线性函数，并且构成 $V_{\mathbb{R}}^*$ 的基底．令

$$g_{\alpha\beta} = g(e_\alpha, e_\beta), \quad 1 \le \alpha \le 2n, \tag{1.38}$$

则由 (1.29), (1.30) 两式得

$$\begin{aligned} g_{ij} &= g_{\bar{i}\bar{j}} = g_{ji} = g_{\bar{j}\bar{i}}, \\ g_{i\bar{j}} &= -g_{\bar{i}j} = g_{\bar{j}i} = -g_{j\bar{i}}, \end{aligned} \tag{1.39}$$

因而

$$h_{ij} = h(e_i, e_j) = g_{ij} + \sqrt{-1}\, g_{i\bar{j}}. \tag{1.40}$$

将 (1.40) 和 (1.26) 式代入 (1.37) 式得到

$$g = \sum g_{ij}(\theta^i \otimes \theta^j + \theta^{\bar{i}} \otimes \theta^{\bar{j}}) + \sum g_{i\bar{j}}(\theta^i \otimes \theta^{\bar{j}} + \theta^{\bar{j}} \otimes \theta^i), \tag{1.41}$$

$$k = \frac{1}{2} \sum g_{i\bar{j}}(\theta^i \wedge \theta^j + \theta^{\bar{i}} \wedge \theta^{\bar{j}}) - \sum g_{ij} \theta^i \wedge \theta^{\bar{j}}. \tag{1.42}$$

从 (1.23) 式又可以得到

$$\begin{aligned} \theta^i \wedge \theta^j + \theta^{\bar{i}} \wedge \theta^{\bar{j}} &= \frac{1}{2}(\overline{\omega^i} \wedge \omega^j + \omega^i \wedge \overline{\omega^j}), \\ \theta^i \wedge \theta^{\bar{j}} &= -\frac{\sqrt{-1}}{4}(\omega^i \wedge \omega^j - \overline{\omega^i} \wedge \overline{\omega^j} - \omega^i \wedge \overline{\omega^j} + \overline{\omega^i} \wedge \omega^j), \end{aligned} \tag{1.43}$$

代入 (1.42) 式，并利用 (1.39) 式得到

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{4} \sum g_{i\bar{j}}(\overline{\omega^i} \wedge \omega^j + \omega^i \wedge \overline{\omega^j}) \\ &\quad + \frac{\sqrt{-1}}{4} \sum g_{ij}(\overline{\omega^i} \wedge \omega^j - \omega^i \wedge \overline{\omega^j}) \\ &= \frac{1}{2} \sum (g_{i\bar{j}} - \sqrt{-1}\, g_{ij}) \omega^i \wedge \overline{\omega^j} \\ &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} \sum h_{ij} \omega^i \wedge \overline{\omega^j}. \end{aligned} \tag{1.44}$$

由此可见，要从 Hermite 内积 h 的坐标表达式 (1.37) 得到它的 Kähler 形式 k 的表达式，只要把其中的张量积 $\otimes$ 换成外积 $\wedge$，并且乘以系数 $-\frac{\sqrt{-1}}{2}$ 即可．不过，此时的 ω^i 被看作是 $V_{\mathbb{R}}$ 上的复值实线性函数．

另外不难看出，内积 g 具有如下的表达式：

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{2}(h + \bar{h}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (h_{ij} \omega^i \otimes \overline{\omega^j} + \overline{h_{ij}}\, \overline{\omega^i} \otimes \omega^j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} h_{ij}(\omega^i \otimes \overline{\omega^j} + \overline{\omega^j} \otimes \omega^i) = \sum h_{ij} \omega^i \overline{\omega^j}, \end{aligned} \tag{1.45}$$

其中

$$\omega^i \overline{\omega^j} = \frac{1}{2}(\omega^i \otimes \overline{\omega^j} + \overline{\omega^j} \otimes \omega^i)$$

是 ω^i 和 $\overline{\omega^j}$ 的对称化张量积．此式也能够将 (1.21) 式代入 (1.41) 式得到．

§8.2 复流形和近复流形

8.2.1 复流形结构

n 维光滑流形可以看作实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的一些开子集以光滑的方式拼接起来的结果. 类似地, n 维复流形则是复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 的一些开子集以"全纯"的方式拼接起来的结果. 先解释"全纯"的意义.

对于任意的 $z=(z^1,\cdots,z^n)\in\mathbb{C}^n$, 令

$$z^i=x^i+\sqrt{-1}\,y^i,\quad x^i,y^i\in\mathbb{R}, \tag{2.1}$$

则由例 1.1, 在对应

$$(z^1,\cdots,z^n)\mapsto(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n)\in\mathbb{R}^{2n}$$

下, $\mathbb{C}^n$ 和 $(\mathbb{R}^{2n},J_0)$ 是等同的.

现在假定 $U\subset\mathbb{C}^n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的开子集, $f:U\to\mathbb{C}$ 是定义在 U 上的复值光滑函数, g 和 h 分别是它的实部和虚部, 则有

$$f=g+\sqrt{-1}\,h.$$

在本章, 如果不加申明, 记号 $C^\infty(U)$ 总是表示定义在 U 上的复值光滑函数的集合.

定义 2.1 设 $f\in C^\infty(U)$. 如果它的实部 g 和虚部 h 满足 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial g}{\partial x^i}=\frac{\partial h}{\partial y^i},\quad \frac{\partial g}{\partial y^i}=-\frac{\partial h}{\partial x^i},\quad 1\le i\le n, \tag{2.2}$$

则称 f 是 U 上的**全纯函数**.

根据多复变函数理论, 全纯函数 $f:U\to\mathbb{C}$ 在每一点 $p\in U$ 的一个邻域内能够表示为 z^i 的收敛幂级数 (参看参考文献 [22]). 所以, 全纯函数也称为复解析函数. 另外, 由复变函数理论知道, Cauchy-Riemann 方程保证了全纯函数 f 可以对复坐标 z^i 求偏导数, 即 $\dfrac{\partial f}{\partial z^i}$ 是存在的, 并且

$$\frac{\partial f}{\partial z^i}=\frac{\partial f}{\partial x^i}=-\sqrt{-1}\,\frac{\partial f}{\partial y^i}. \tag{2.3}$$

另一方面, 可以引入作用在 $C^\infty(U)$ 上的微分算子

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z^i}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}-\sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y^i}\right),\\ \frac{\partial}{\partial \bar z^i}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}+\sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y^i}\right),\end{aligned}\qquad 1\le i\le n. \tag{2.4}$$

于是, 对于任意的 $f\in C^\infty(U)$ 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar z^i}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}+\sqrt{-1}\,\frac{\partial f}{\partial y^i}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x^i}-\frac{\partial h}{\partial y^i}\right)+\frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial y^i}+\frac{\partial h}{\partial x^i}\right).\end{aligned} \tag{2.5}$$

由 (2.2) 式可知: f 是 U 上的全纯函数当且仅当对于每一个 i 都有 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z^i}=0$. 同时, 全纯函数 f 在 (2.4) 式定义的算子 $\dfrac{\partial}{\partial z^i}$ 作用下所得到的 $\dfrac{\partial f}{\partial z^i}$ 恰好是 f 关于 z^i 的偏导数 (2.3).

定义 2.2 设 U 是 $\mathbb{C}^n$ 的开子集, 其中的点记为 $(z^1,\cdots,z^n)$; 设 V 是 $\mathbb{C}^m$ 的开子集, 其中的点记为 $(w^1,\cdots,w^m)$. 则映射 $\varphi:U\to V$ 可以表示为

$$w^\alpha=\varphi^\alpha(z^1,\cdots,z^n),\quad 1\le\alpha\le m.$$

如果每一个函数 φ^α 都是 U 上的全纯函数, 则称 φ 是从 U 到 V 内的**全纯映射**.

设 U,V 都是 $\mathbb{C}^n$ 的开子集, $\varphi:U\to V$ 是同胚. 如果映射 φ 以及它的逆映射 φ^{-1} 都是全纯映射, 则称 φ 是从 U 到 V 的**全纯变换**或**复解析变换**; 此时称开子集 U 和 V 是**全纯等价**的.

有了上述准备，可以引入复流形的概念.

定义 2.3 设 M 是 $2n$ 维流形. 如果 M 有一个坐标卡集 $\Sigma = \{(U_a, \varphi_a);\ a \in I\}$, 其中 $\varphi_a : U_a \to \mathbb{C}^n (= \mathbb{E}^{2n})$ 是从 M 的开子集 U_a 到 $\mathbb{C}^n$ 内的同胚, 使得 $\{U_a\}$ 是 M 的一个开覆盖, 并且对于任意的 $a, b \in I$, 当 $U_a \cap U_b \neq \emptyset$ 时, 复合映射 $\varphi_a \circ \varphi_b^{-1}$ 是从 $\mathbb{C}^n$ 的开子集 $\varphi_b(U_a \cap U_b)$ 到 $\mathbb{C}^n$ 的开子集 $\varphi_a(U_a \cap U_b)$ 内的全纯变换, 则称坐标卡集 Σ 是流形 M 的一个 **(复解析相关的) 复坐标覆盖**. M 的极大的复解析相关的复坐标覆盖称为 M 的一个 **复流形结构**；指定了一个复流形结构的 $2n$ 维流形 M 称为一个 n 维 **复流形**, 属于复流形结构的每一个坐标卡 (U_a, φ_a) 称为 M 的 **(容许) 复坐标卡**.

由定义可知, n 维复流形是 $\mathbb{C}^n$ 中的一些开子集借助于复解析变换拼接的结果.

如所周知, 光滑流形上的光滑结构使得在流形上定义光滑函数成为可能. 类似地, 复流形结构使我们能够在复流形上引入全纯函数的概念.

设 $f : M \to \mathbb{C}$ 是复流形 M 上的复值函数. 如果对于 M 的每一个容许的复坐标卡 (U_a, φ_a), 复合函数 $f \circ \varphi_a^{-1} : \varphi_a(U_a) \to \mathbb{C}$ 都是全纯的, 则称 f 是 M 上的 **全纯函数**. 不难看出, 在点 $p \in M$, 只要存在 p 点的一个容许复坐标卡 (U, φ) 使得 $f \circ \varphi^{-1}$ 是 $\varphi(U)$ 上的全纯函数, 则对于点 p 的任意一个容许复坐标卡 (V, ψ), $f \circ \psi^{-1}$ 必定是 $\psi(U \cap V)$ 上的全纯函数. 因此, 若要验证函数 f 在点 p 附近的全纯性, 只要在点 p 的一个容许复坐标卡上进行验证就可以了.

为了方便起见, 把 M 上全纯函数的全体构成的集合记作 $\mathcal{O}(M)$; 在点 $p \in M$ 的某个邻域内全纯的函数的全体构成的集合记为 $\mathcal{O}_p$.

8.2.2 复切向量

定义 2.4 设 M 是 n 维复流形, $p \in M$. 所谓 M 在点 p 的 **复切向量** v 指的是满足下列条件的映射 $v : \mathcal{O}_p \to \mathbb{C}$,

(1) $v(f + \lambda g) = v(f) + \lambda v(g)$;

(2) $v(f \cdot g) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$,

其中 $f, g \in \mathcal{O}_p$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

容易证明: n 维复流形 M 在点 p 的复切向量的集合是一个复向量空间, 记为 $T_p^h M$, 称为 M 在点 p 的 **复切空间**.

设 (U, φ) 是复流形 M 在点 p 的一个容许复坐标卡. 对于任意的 $q \in U$, 令 $z^i(q) = z^i(\varphi(q))$, $1 \le i \le n$, 右端的 (z^i) 是 $\mathbb{C}^n$ 中的复坐标系. 通过同胚 φ, $z^i(q)$ 是开集 $U \subset M$ 中的点 q 的复坐标. 以后把 $(U; \varphi; z^i)$ 或 $(U; z^i)$ 称为容许复坐标卡 (U, φ) 所对应的 **(容许) 复坐标系**. 一旦有了这样的局部复坐标系, 就可以引入 M 在 p 点的复切向量 $\dfrac{\partial}{\partial z^i}\Big|_p$, 其定义为

$$\left.\frac{\partial}{\partial z^i}\right|_p (f) = \left.\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial z^i}\right|_{\varphi(p)}. \tag{2.6}$$

可以证明: $\dim T_p^h M = n$, 并且 $\left\{ \left.\dfrac{\partial}{\partial z^i}\right|_p ;\ 1 \le i \le n \right\}$ 是 $T_p^h M$ 的一个基底 (本章习题第 4 题). 于是 $\left\{ \left.\dfrac{\partial}{\partial z^i}\right|_p ;\ p \in U \right\}$ 是定义在局部坐标邻域 U 上一个复标架场, 称为在 M 上关于局部复坐标系 $(U; z^i)$ 的 **自然 (复) 标架场**, 简记为 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial z^i}\right\}$; 它的对偶复余标架场是 $\{dz^i\}$.

为了简便起见, 常常把 (2.6) 式的右端简记为 $\dfrac{\partial f}{\partial z^i}(p)$.

n 维复流形 M 本身是一个 $2n$ 维光滑流形, 所以它在每一点 $p \in M$ 的切空间 $T_p M$ 是一个 $2n$ 维实向量空间. 设 $(U, \varphi; z^i)$ 是 M 的一个容许复坐标系, 令 $z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$, 则 $(U; x^i, y^i)$ 是光滑流形 M 的一个局部坐标系, 在 $T_p M$ 中与之相应的自然基底是 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial y^i}\right\}$.

定理 2.1 设 M 是 n 维复流形, 每一点 $p \in M$ 的一个容许复坐标系是 $(U, \varphi; z^i)$, 设 $z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$. 定义映射 $J_p : T_p M \to T_p M$ 如

下：

$$J_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)=\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p,\quad J_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p\right)=-\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p,\quad 1\le i\le n,\tag{2.7}$$

则 J_p 是在 T_pM 上与容许复坐标系 $(U,\varphi;z^i)$ 的选取无关的复结构，并且 $\{J_p;\ p\in M\}$ 是 M 上的 $(1,1)$ 型光滑张量场，记为 J.

光滑张量场 J 称为复流形 M 上的 **典型复结构**.

证明 设 $(V,\psi;w^i)$ 是点 p 的另一个容许复坐标系，令 $w^i=u^i+\sqrt{-1}v^i$. 由于复合映射 $\varphi\circ\psi^{-1}$ 是全纯映射，相应的坐标变换函数

$$\begin{aligned}z^i&=(\varphi\circ\psi^{-1})^i(w^1,\cdots,w^n)\\&=x^i(u^1,\cdots,u^n,v^1,\cdots,v^n)+\sqrt{-1}y^i(u^1,\cdots,u^n,v^1,\cdots,v^n)\end{aligned}$$

是全纯函数，所以 x^i,y^i 满足 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^j}=\frac{\partial y^i}{\partial v^j},\quad \frac{\partial x^i}{\partial v^j}=-\frac{\partial y^i}{\partial u^j},\quad 1\le i,j\le n.\tag{2.8}$$

自然基底 $\frac{\partial}{\partial u^j},\frac{\partial}{\partial v^j}$ 和 $\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial y^j}$ 的变换公式是

$$\frac{\partial}{\partial u^j}=\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{\partial y^i}{\partial u^j}\frac{\partial}{\partial y^i},\quad \frac{\partial}{\partial v^j}=\frac{\partial x^i}{\partial v^j}\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{\partial y^i}{\partial v^j}\frac{\partial}{\partial y^i},$$

故由 (2.7) 和 (2.8) 两式得

$$\begin{aligned}J_p\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)&=\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\cdot\frac{\partial}{\partial y^i}+\frac{\partial y^i}{\partial u^j}\left(-\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\\&=\frac{\partial y^i}{\partial v^j}\frac{\partial}{\partial y^i}+\frac{\partial x^i}{\partial v^j}\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial v^j};\end{aligned}$$

同理，

$$J_p\left(\frac{\partial}{\partial v^j}\right)=-\frac{\partial}{\partial u^j}.$$

因此，由 (2.7) 式定义的复结构 $J_p:T_pM\to T_pM$ 与容许复坐标系 $(U;z^i)$ 的选取无关. 这样，在 M 的每一点的切空间上都定义了一个复结构，因而给出了 M 上的一个 $(1,1)$ 型张量场 J. 在局部复坐标系 $(U;z^i)$ 下，张量场 J 的表达式是

$$J|_U=\frac{\partial}{\partial y^i}\otimes dx^i-\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dy^i,\tag{2.9}$$

其中 $z^i=x^i+\sqrt{-1}y^i$. 这说明 J 是一个光滑张量场. 证毕.

复切空间 T_p^hM 和 (T_pM,J) 所对应的复向量空间可以等同起来.

事实上，如同 §8.1 对于 $V_{\mathbb{R}}^*$ 的作法，首先将 T_pM 复化得到 $(T_pM)^{\mathbb{C}}$，然后将 J 作复线性扩张成为 $(T_pM)^{\mathbb{C}}$ 上的复结构. J 仅有两个特征根 $\pm\sqrt{-1}$，用 $T_p{}^{(1,0)}M$ 和 $T_p{}^{(0,1)}M$ 分别表示 J 在 $(T_pM)^{\mathbb{C}}$ 中对应于特征根 $\sqrt{-1}$ 和 $-\sqrt{-1}$ 的特征向量所组成的复子空间，分别称为 M 在点 p 的 $(1,0)$ **切空间** 和 $(0,1)$ **切空间**. 于是有直和分解

$$(T_pM)^{\mathbb{C}}=T_p{}^{(1,0)}M\oplus T_p{}^{(0,1)}M.\tag{2.10}$$

这样，(T_pM,J) 所对应的复向量空间可以和 $T_p{}^{(1,0)}M$ 等同起来 (参看 §8.1 中 (1.26) 式以下的段落). 实际上，在把 (T_pM,J) 看作复向量空间时，只是令

$$\sqrt{-1}v=Jv,\quad \forall v\in T_pM,$$

从而 T_pM 中的任意一个元素 v 可以表示为

$$\begin{aligned}v&=\sum_{i=1}^n a^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{i=1}^n b^i\frac{\partial}{\partial y^i}\\&=\sum_{i=1}^n a^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{i=1}^n b^iJ\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\\&=\sum_{i=1}^n(a^i+\sqrt{-1}b^i)\frac{\partial}{\partial x^i},\end{aligned}$$

即 (T_pM,J) 所对应的复向量空间是 $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial x^i};1\le i\le n\right\}$. 但是，

$T_p^{(1,0)}M$ 的一个基底是 $\left\{ \left.\dfrac{\partial}{\partial z^i}\right|_p \right\}$, 其中

$$\left.\frac{\partial}{\partial z^i}\right|_p = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \sqrt{-1}\,J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right). \quad (2.11)$$

所以, 在对应 $\dfrac{\partial}{\partial x^i} \mapsto \dfrac{\partial}{\partial z^i}$ 下, $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}; 1 \le i \le n\right\}$ 和 $T_p^{(1,0)}M$ 是复线性同构的.

另一方面, 由定义式 (2.4), $\dfrac{\partial}{\partial z^i}$ 和 $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z^i}}$ 只不过是 $\dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial y^i}$ 的复线性组合, 所以 $\left.\dfrac{\partial}{\partial z^i}\right|_p, \left.\dfrac{\partial}{\partial \overline{z^i}}\right|_p$ 也是从 C_p^∞ 到 $\mathbb{C}$ 的映射. 如果

$$f = g + \sqrt{-1}\,h \in \mathcal{O}_p \subset C_p^\infty,$$

则由 Cauchy-Riemann 方程得到

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial \overline{z^i}}\right|_p (f) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y^i}\right)(g + \sqrt{-1}\,h) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x^i} - \frac{\partial h}{\partial y^i}\right) + \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial y^i} + \frac{\partial h}{\partial x^i}\right) = 0.\end{aligned}$$

另外,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial z^i}\right|_p (f) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x^i} + \frac{\partial h}{\partial y^i}\right) + \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(-\frac{\partial g}{\partial y^i} + \frac{\partial h}{\partial x^i}\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial z^i}(p),\end{aligned}$$

其中最右端是全纯函数 f 关于复坐标 z^i 的偏导数. 这意味着, $T_p^{(1,0)}M$ 中的元素 $\left.\dfrac{\partial}{\partial z^i}\right|_p$ (由 (2.4) 式定义的算子) 在 $\mathcal{O}_p$ 上的作用恰好是 $T_p^h M$ 中的元素 $\left.\dfrac{\partial}{\partial z^i}\right|_p$ (由 (2.6) 式定义的偏导数算子) 在 $\mathcal{O}_p$ 上的作用. 因此, $T_p^h M$ 可以和 $T_p^{(1,0)}M$ 等同起来, 因而也可以和 (T_pM, J) 所对应的复向量空间 $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 等同起来.

顺便指出, 记号 $\left.\dfrac{\partial}{\partial z^i}\right|_p$ 具有双重身份: 由 (2.6) 式, $\left.\dfrac{\partial}{\partial z^i}\right|_p \in T_p^h M$; 由 (2.11) 式, 又有 $\left.\dfrac{\partial}{\partial z^i}\right|_p \in T_p^{(1,0)}M$. 不过, 它们在 $\mathcal{O}_p$ 上的作用是一致的, 所以这两种身份不会引起混淆.

有了复流形结构, 便可以引入全纯映射和全纯变换的概念.

设 $f: M \to N$ 是复流形 M, N 之间的连续映射, $p \in M$. 如果存在 M 在点 p 的局部复坐标系 $(U; \varphi; z^i)$ 和 N 在点 $q = f(p)$ 的局部复坐标系 $(V, \psi; w^\alpha)$, 使得 $f(U) \subset V$, 并且 f 的局部坐标表示 $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \psi(V)$ 是全纯映射, 则称 f 在点 p 附近是全纯的; 如果 f 在 M 的每一点附近都是全纯的, 则称 f 是从 M 到 N 的 **全纯映射**. 如果 f 既是全纯映射又是浸入, 则称 f 是从 M 到 N 的 **全纯浸入**; 此时, 称 (f, M) 为 N 的 **(浸入) 复子流形**.

很明显, 复流形上的全纯函数是全纯映射的特例. 全纯映射的另一个特例是复流形上的全纯变换, 其定义如下: 设 $f: M \to M$ 是复流形 M 到其自身的同胚, 如果 f 和它的逆映射 f^{-1} 都是全纯映射, 则称 f 是复流形 M 上的 **全纯变换**. M 上的全体全纯变换关于映射的复合构成一个群, 称为复流形 M 的 **全纯变换群**.

全纯映射还可以用复结构来刻画:

命题 2.2 设 $f: M \to N$ 是复流形之间的光滑映射, $J, \tilde{J}$ 分别是 M, N 上的典型复结构. 则 f 是全纯映射当且仅当 $\tilde{J} \circ f_* = f_* \circ J$, 其中 $f_*: TM \to TN$ 是映射 f 的切映射.

命题 2.2 的证明留作练习.

8.2.3 近复流形

在复流形上存在典型复结构的事实提示我们引入如下的定义:

定义 2.5 设 M 是 $2n$ 维光滑流形. 如果在 M 上存在一个光滑的线性变换场 (即光滑的 (1,1) 型张量场) J, 使得在每一点 $p \in M$, $J_p = J(p)$ 是切空间 T_pM 上的复结构, 则称 (M, J) 是一个 **近复流形**,

并且称 J 为 M 上的 **复结构 (场)**.

简而言之, 近复流形是具有一个复结构的光滑流形. 因此, 近复流形在每一点的切空间是一个复向量空间. 自然, 复流形是近复流形. 反过来可以问: 一个近复流形的复结构是否一定是一个复流形的典型复结构? 近复流形的复结构在什么条件下才是一个复流形的典型复结构? 是否存在不具有任何复流形结构的近复流形? 这些都是困难的问题, 但是经过多人的努力, 已经找到了这些问题的答案. 下面将导出一个复结构能够作为复流形的典型复结构的条件, 即复结构的可积条件. 首先引入 (p,q)-微分 (形) 式的概念.

设 (M,J) 是 $2n$ 维近复流形, $U\subset M$ 是开子集. 对于任意的 $x\in U$, 切空间 (T_xM,J_x) 是 n 维复向量空间; 同时, J 可以复线性扩张为复化切空间 $(T_xM)^{\mathbb{C}}$ 上的复线性变换. U 上的一个 (复值) 外微分式 ω 称为 **(p,q)-微分 (形) 式**, 如果在任意一点 $x\in U$, ω 在点 x 的值 $\omega(x)$ 是 M 在点 x 的一个 (p,q)-形式, 即 $\omega(x)\in\bigwedge^{p,q}(T_x^*M)^{\mathbb{C}}$. U 上的全体 (p,q)-微分式构成一个 $C^\infty(U)$-模, 记为 $A^{p,q}(U)$. 显然, 复共轭 $\omega\mapsto\overline{\omega}$ 在 $A^{p,q}(M)$ 和 $A^{q,p}(M)$ 之间建立了一一对应关系. 此外, U 上任意一个 r 次复值外微分式 ω 都可以唯一地分解为 (参看 (1.24) 式)

$$\omega=\sum_{p+q=r}\omega^{(p,q)},\quad 其中\quad \omega^{(p,q)}\in A^{p,q}(U). \tag{2.12}$$

现在考虑复结构 J 的可积条件.

设 $(U;u^\alpha)$ 是 M 的一个局部坐标系. 令

$$J\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)=J_\alpha^\beta\frac{\partial}{\partial u^\beta}, \tag{2.13}$$

其中 J_α^β 是 U 上的实值光滑函数. J 是复结构的条件是

$$J_\gamma^\beta J_\alpha^\gamma=-\delta_\alpha^\beta. \tag{2.14}$$

把 J 在余切空间 $T_x^*M(x\in U)$ 上诱导的复结构仍然记为 J, 它可以扩充为复化余切空间 $(T_x^*M)^{\mathbb{C}}$ 上的复线性变换. 则 J 在 1 次复值微分式 ω 上的作用是 $J(\omega)=\omega\circ J$(参看 (1.16) 式). 于是, $\omega\in A^{1,0}(U)$ 当且仅当 $J(\omega)=\sqrt{-1}\,\omega$; $\omega\in A^{0,1}(U)$ 当且仅当 $J(\omega)=-\sqrt{-1}\,\omega$.

把诱导的复结构 J 作用于余切标架场 $\{du^\alpha\}$, 则有

$$J(du^\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial u^\beta}\right)=du^\alpha\left(J\left(\frac{\partial}{\partial u^\beta}\right)\right)=du^\alpha\left(J_\beta^\gamma\frac{\partial}{\partial u^\gamma}\right)=J_\beta^\alpha,$$

因此

$$J(du^\alpha)=J_\beta^\alpha du^\beta. \tag{2.15}$$

令

$$\begin{aligned}\omega^\alpha&=du^\alpha-\sqrt{-1}\,J(du^\alpha)=(\delta_\beta^\alpha-\sqrt{-1}\,J_\beta^\alpha)du^\beta,\\ \overline{\omega^\alpha}&=du^\alpha+\sqrt{-1}\,J(du^\alpha)=(\delta_\beta^\alpha+\sqrt{-1}\,J_\beta^\alpha)du^\beta,\end{aligned} \tag{2.16}$$

则 ω^α, $\overline{\omega^\alpha}$ 分别是 U 上的 $(1,0)$-微分式和 $(0,1)$-微分式. 由于 $du^\alpha=\frac{1}{2}(\omega^\alpha+\overline{\omega^\alpha})$, 所以复化的余切空间 $(T_p^*M)^{\mathbb{C}}$ 有直和分解

$$(T_p^*M)^{\mathbb{C}}=T_p^{*(1,0)}M\oplus T_p^{*(0,1)}M,\quad \forall p\in U, \tag{2.17}$$

其中 $T_p^{*(1,0)}M$ 和 $T_p^{*(0,1)}M$ 分别是 $(T_p^*M)^{\mathbb{C}}$ 中的 $(1,0)$ 形式和 $(0,1)$ 形式所构成的子空间, 即

$$T_p^{*(1,0)}M=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\omega^\alpha|_p\},\quad T_p^{*(0,1)}M=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\overline{\omega^\alpha}|_p\}.$$

因此, $(T_p^*M)^{\mathbb{C}}$ 的直和分解 (2.17) 是由复结构 J 决定的, 与局部坐标系 $(U;u^\alpha)$ 的选取无关.

现在假定复结构 J 是由 M 上的一个复流形结构诱导的典型复结构. 对于 M 的容许复坐标系 $(V;z^i)$, 不妨设 $V=U$, $z^i=x^i+\sqrt{-1}\,y^i$, 则有

$$J(dx^i)=-dy^i,\quad J(dy^i)=dx^i \tag{2.18}$$

(参看 (2.7) 式和 (1.17) 式). 此时, dz^i 是 U 上的 $(1,0)$-微分式, $d\overline{z^i}$ 是 U 上的 $(0,1)$-微分式. 因此, $\{\omega^\alpha\}$ 和 $\{dz^i\}$ 可以互相线性表示, $\{\overline{\omega^\alpha}\}$ 和 $\{d\overline{z^i}\}$ 可以互相线性表示. 设

$$\omega^\alpha=A_i^\alpha dz^i,\quad A_i^\alpha\in C^\infty(U), \tag{2.19}$$

则

$$d\omega^\alpha = \left(\frac{\partial A_i^\alpha}{\partial z^j}dz^j + \frac{\partial A_i^\alpha}{\partial \overline{z^j}}d\overline{z^j}\right)\wedge dz^i \equiv 0 \pmod{\omega^\beta}. \tag{2.20}$$

用 $T_p''M$ 表示在 $(T_pM)^{\mathbb{C}}$ 中使 $\omega^\alpha (1\le\alpha\le 2n)$ 化为零的极大子空间，并设

$$v = v^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha} = (a^\alpha+\sqrt{-1}\,b^\alpha)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\in (T_pM)^{\mathbb{C}},$$

则有

$$\begin{aligned}\omega^\alpha(v) &= (\delta_\beta^\alpha - \sqrt{-1}\,J_\beta^\alpha)(a^\beta+\sqrt{-1}\,b^\beta)\\ &= (a^\alpha + J_\beta^\alpha b^\beta) - \sqrt{-1}\,J_\gamma^\alpha(a^\gamma + J_\beta^\gamma b^\beta).\end{aligned}$$

所以，$v\in T_p''M$ 当且仅当对于任意的 α, 向量 v 满足条件 $\omega^\alpha(v)=0$, 即

$$a^\alpha = -J_\beta^\alpha b^\beta,\quad b^\alpha = J_\beta^\alpha a^\beta,\quad \forall\,\alpha. \tag{2.21}$$

于是，$v\in T_p''M$ 的充分必要条件是

$$v = a^\beta(\delta_\beta^\alpha + \sqrt{-1}\,J_\beta^\alpha)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \tag{2.22}$$

如果令

$$v_\beta = (\delta_\beta^\alpha + \sqrt{-1}\,J_\beta^\alpha)\frac{\partial}{\partial u^\alpha},\quad 1\le\beta\le 2n, \tag{2.23}$$

则由 (2.22) 式得知

$$T_p''M = \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\{v_\alpha;\ 1\le\alpha\le 2n\}. \tag{2.24}$$

然而 (2.20) 式的意义是：如果 J 是由 M 的复流形结构诱导的典型复结构，则条件 $d\omega^\alpha\equiv 0 \pmod{\omega^\beta}$ 成立. 这意味着

$$d\omega^\alpha|_{T_p''M\times T_p''M} = 0,\quad \forall\alpha.$$

因此

$$\begin{aligned}0 =& d\omega^\alpha(v_\beta, v_\gamma)\\ =& v_\beta(\omega^\alpha(v_\gamma)) - v_\gamma(\omega^\alpha(v_\beta)) - \omega^\alpha([v_\beta,v_\gamma])\\ =& -\omega^\alpha([v_\beta,v_\gamma]),\quad \forall\alpha,\beta,\gamma.\end{aligned} \tag{2.25}$$

经过直接计算得到

$$[v_\beta,v_\gamma] = \left(\sqrt{-1}\left(\frac{\partial J_\gamma^\mu}{\partial u^\beta} - \frac{\partial J_\beta^\mu}{\partial u^\gamma}\right) - J_\beta^\lambda\frac{\partial J_\gamma^\mu}{\partial u^\lambda} + J_\gamma^\lambda\frac{\partial J_\beta^\mu}{\partial u^\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial u^\mu}. \tag{2.26}$$

另一方面，对 (2.14) 式求导得到

$$\frac{\partial J_\gamma^\beta}{\partial u^\lambda}J_\alpha^\gamma + J_\gamma^\beta\frac{\partial J_\alpha^\gamma}{\partial u^\lambda} = 0,$$

所以，由 ω^α 的定义式 (2.16) 得到

$$\begin{aligned}&-\omega^\alpha([v_\beta,v_\gamma])\\ &= -\left(\sqrt{-1}\left(\frac{\partial J_\gamma^\mu}{\partial u^\beta} - \frac{\partial J_\beta^\mu}{\partial u^\gamma}\right) - J_\beta^\lambda\frac{\partial J_\gamma^\mu}{\partial u_\lambda} + J_\gamma^\lambda\frac{\partial J_\beta^\mu}{\partial u^\lambda}\right)(\delta_\mu^\alpha - \sqrt{-1}\,J_\mu^\alpha)\\ &= J_\beta^\lambda\left(\frac{\partial J_\gamma^\alpha}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial J_\lambda^\alpha}{\partial u^\gamma}\right) - J_\gamma^\lambda\left(\frac{\partial J_\beta^\alpha}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial J_\lambda^\alpha}{\partial u^\beta}\right)\\ &\quad -\sqrt{-1}\,J_\rho^\alpha\left(J_\beta^\lambda\left(\frac{\partial J_\gamma^\rho}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial J_\lambda^\rho}{\partial u^\gamma}\right) - J_\gamma^\lambda\left(\frac{\partial J_\beta^\rho}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial J_\lambda^\rho}{\partial u^\beta}\right)\right).\end{aligned}$$

令

$$N_{\beta\gamma}^\alpha = J_\beta^\lambda\left(\frac{\partial J_\gamma^\alpha}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial J_\lambda^\alpha}{\partial u^\gamma}\right) - J_\gamma^\lambda\left(\frac{\partial J_\beta^\alpha}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial J_\lambda^\alpha}{\partial u^\beta}\right), \tag{2.27}$$

则

$$-\omega^\alpha([v_\beta,v_\gamma]) = N_{\beta\gamma}^\alpha - \sqrt{-1}J_\rho^\alpha N_{\beta\gamma}^\rho.$$

于是条件 (2.25) 成为

$$N_{\beta\gamma}^\alpha = 0,\qquad \forall\alpha,\beta,\gamma.$$

容易验证，$N_{\beta\gamma}^\alpha$ 是 M 上的一个 (1, 2) 型光滑张量场的分量. 事实上，对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, 令

$$\mathcal{N}(X,Y) = [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] - [X,Y], \tag{2.28}$$

则有 $\mathcal{N}(X,Y)=-\mathcal{N}(Y,X)$, 并且对于任意的 $f\in C^\infty(M)$ 有

$$\mathcal{N}(fX,Y)=\mathcal{N}(X,fY)=f\mathcal{N}(X,Y).$$

另外,

$$\mathcal{N}(JX,JY)=-\mathcal{N}(X,Y).$$

因此, $\mathcal{N}$ 是近复流形 (M,J) 上由复结构 J 确定的 $(1,2)$ 型光滑张量场. 在局部坐标系 $(U;u^\alpha)$ 下, 利用 (2.14) 式得到

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}\left(\frac{\partial}{\partial u^\beta},\frac{\partial}{\partial u^\gamma}\right)\\
&=\left[J^\lambda_\beta\frac{\partial}{\partial u^\lambda},J^\mu_\gamma\frac{\partial}{\partial u^\mu}\right]-J\left[J^\lambda_\beta\frac{\partial}{\partial u^\lambda},\frac{\partial}{\partial u^\gamma}\right]-J\left[\frac{\partial}{\partial u^\beta},J^\lambda_\gamma\frac{\partial}{\partial u^\lambda}\right]\\
&=\left(J^\lambda_\beta\frac{\partial J^\alpha_\gamma}{\partial u^\lambda}-J^\lambda_\gamma\frac{\partial J^\alpha_\beta}{\partial u^\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}-\left(\frac{\partial J^\lambda_\gamma}{\partial u^\beta}-\frac{\partial J^\lambda_\beta}{\partial u^\gamma}\right)J^\alpha_\lambda\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\\
&=\left(J^\lambda_\beta\frac{\partial J^\alpha_\gamma}{\partial u^\lambda}-J^\lambda_\gamma\frac{\partial J^\alpha_\beta}{\partial u^\lambda}+J^\lambda_\gamma\frac{\partial J^\alpha_\lambda}{\partial u^\beta}-J^\lambda_\beta\frac{\partial J^\alpha_\lambda}{\partial u^\gamma}\right)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\\
&=N^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial u^\alpha}.
\end{aligned}$$

于是, 张量场 $\mathcal{N}$ 的局部坐标表达式是

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}&=N^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\otimes \mathrm{d}u^\beta\otimes \mathrm{d}u^\gamma\\
&=\frac{1}{2}N^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\otimes(\mathrm{d}u^\beta\wedge \mathrm{d}u^\gamma).
\end{aligned}\tag{2.29}$$

定义 2.6 设 (M,J) 是近复流形, 则由 (2.28) 式定义的 $(1,2)$ 型光滑张量场 $\mathcal{N}$ 称为复结构 J 的 **挠率张量**. 如果挠率张量 $\mathcal{N}$ 为零, 则称该复结构 J 是 **可积的**.

于是, 前面的讨论给出了下面的结论:

定理 2.3 设 (M,J) 是近复流形. 如果 J 是由 M 上的一个复流形结构诱导的典型复结构, 则 J 必是可积的.

定理 2.3 的逆命题也是成立的: 如果近复流形 (M,J) 的复结构是可积的, 则它必是 M 上的一个复流形结构诱导的典型复结构. 这个结论首先是在 1957 年由 A.Newlander 和 L.Nirenberg 得到, 后来 A.Nirenhuis 和 W.B.Woolf, J.Kohn, 以及 L.Hörmander 等人又先后证明了同样的结果. 他们分别假定复结构 J 是 C^∞ 的, 或具有更弱的光滑性. 当 M 是二维光滑流形时, 由于 $\mathcal{N}$ 的反对称性, 复结构的可积性是平凡的. 事实上, 在 $\dim M=2$ 时, 在 M 上可取局部标架场 $\{X,JX\}$. 于是 $\mathcal{N}(X,JX)=\mathcal{N}(JX,X)=-\mathcal{N}(X,JX)$. 因此 $\mathcal{N}(X,JX)=0$. 在这种情况下, Korn-Lichtenstein 证明了如下的结论: 二维光滑流形上的一个 $C^\alpha(0<\alpha<1)$ 类黎曼度量在局部上共形于平坦度量, 换言之, 二维黎曼流形在局部上必定存在等温坐标. 因此, 可定向的二维黎曼流形必有可积的复结构, 因而是一维复流形, 即所谓的黎曼面. 以上这些结果的证明都不是简单的, 在此不再赘述.

注记 2.1 在近复流形之间可以引入伪全纯映射的概念. 设 $f:(M,J)\to(N,\tilde{J})$ 是近复流形之间的光滑映射, 如果 f 的切映射 f_* 满足 $\tilde{J}\circ f_*=f_*\circ J$, 则称 f 是从近复流形 M 到 N 的 **(伪) 全纯映射**.

与命题 1.1 相对照, 关于近复流形有下列命题:

命题 2.4 设 (M,J) 是个 $2n$ 维近复流形, 则在每一点 $p\in M$ 的一个邻域内必存在局部标架场 $(e_1,\cdots,e_{2n})$, 使得

$$Je_i=e_{n+i},\qquad Je_{n+i}=-e_i.$$

证明 设 $(U;x^\alpha)$ 是点 p 的任意一个局部坐标系, 设 $e_1=\frac{\partial}{\partial x^1}$, $e_{n+1}=Je_1$, 则 e_1,e_{n+1} 是 U 上的光滑切向量场, 并且处处线性无关. 事实上, 若有 $a,b\in\mathbb{R}$ 使得

$$ae_1+be_{n+1}=0,$$

则将复结构 J 作用于上述方程得到

$$-be_1+ae_{n+1}=0,$$

于是 $(a^2+b^2)e_1=0$, 故 $a=b=0$. 显然, $\mathrm{Span}\{e_1,e_{n+1}\}$ 是 U 的 J-不变的二维分布, 不妨设 $\frac{\partial}{\partial x^2}\notin \mathrm{Span}\{e_1,e_{n+1}\}$. 于是命 $e_2=\frac{\partial}{\partial x^2}$, $e_{n+2}=Je_2$, 则 e_1,e_2,e_{n+1},e_{n+2} 是 U 上的光滑切向量场, 且处处线性无关. 继续上述过程, 最后得到所要的局部标架场 $(e_1,\cdots,e_{2n})$. 证毕.

8.2.4 Hermite 结构

下面讨论近复流形和复流形上的 Hermite 结构.

定理 2.5 设 (M,J) 是满足第二可数公理的 $2n$ 维近复流形, 则在 M 上必存在 J-不变的黎曼度量.

证明 这是在复向量空间 V 上存在 J-不变欧氏内积的直接推论 (参看 §8.1 的 (1.34) 式). 事实上, 先在 M 上任意取定一个黎曼度量 g_0, 对于任意的 $p\in M$ 以及任意的 $X,Y\in T_pM$, 定义

$$g(X,Y)=\frac{1}{2}(g_0(X,Y)+g_0(JX,JY)). \tag{2.30}$$

容易验证, g 就是 M 上的 J-不变黎曼度量. 证毕.

设 g 是 M 上的一个 J-不变黎曼度量. 对于任意的 $p\in M$, 令

$$h(X,Y)=g(X,Y)+\sqrt{-1}\,g(X,JY),\quad \forall X,Y\in T_pM. \tag{2.31}$$

则 $h:T_pM\times T_pM\to\mathbb{C}$ 是 T_pM 上的复值实双线性函数, 它满足

$$\begin{aligned}h(Y,X)&=g(Y,X)+\sqrt{-1}\,g(Y,JX)\\&=g(X,Y)-\sqrt{-1}\,g(X,JY)=\overline{h(X,Y)};\end{aligned}$$

并且

$$h(X,X)=g(X,X)\geq 0,$$

其中的等号只在 $X=0$ 时成立. 如果对于任意的 $X\in T_pM$, 令

$$\sqrt{-1}\cdot X=JX,$$

则 T_pM 成为复向量空间, 而且

$$\begin{aligned}h(\sqrt{-1}\cdot X,Y)&=h(JX,Y)\\&=g(JX,Y)+\sqrt{-1}\,g(JX,JY)=\sqrt{-1}\,h(X,Y).\end{aligned}$$

因此, h 是 (T_pM,J) 所对应的复向量空间上的 Hermite 内积. 于是有下面的定义:

定义 2.7 设 (M,J) 是 $2n$ 维近复流形. 如果在 M 上以光滑地依赖于点 $p\in M$ 的方式, 在每一点 p 的切空间 (T_pM,J) 上给定了一个 Hermite 内积 $h_p=h(p)$, 则称 h 为近复流形 (M,J) 上的一个 **Hermite 结构**. 具有一个指定的 Hermite 结构 h 的近复流形 (M,J) 称为 **近 Hermite 流形**, 记为 (M,J,h) 或 (M,h).

这里, 所谓 "以光滑地依赖于点 $p\in M$ 的方式" 是指: 对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, 由 $(h(X,Y))(p)=h_p(X_p,Y_p)$ 定义的复值函数 $h(X,Y)$ 是光滑的.

根据前面的讨论, (M,J) 上的 Hermite 内积等价于 (M,J) 上的 J-不变黎曼度量, 后者是前者的实部. 根据 §8.1 中的讨论, Hermite 结构 h 的虚部是 M 上的 2 次外微分形式, 称为近 Hermite 流形 (M,J,h) 上的 **Kähler 形式**, 并记为 κ, 即

$$\kappa(X,Y)=g(X,JY),\quad \forall X,Y\in T_pM,\quad \forall p\in M. \tag{2.32}$$

定义 2.8 如果 M 是 n 维复流形, 并且在 M 上指定了一个 Hermite 结构, 则称 (M,h) 是一个 n 维 **Hermite 流形**.

在 Hermite 流形之间保持 Hermite 结构不变的全纯映射称为 **等距的全纯映射**; 这样的映射关于由 Hermite 结构给出的黎曼度量显然是等距浸入, 因而又称为 **全纯等距浸入**. 在 Hermite 流形 (M,h) 上保持 Hermite 结构 h 不变的全纯变换称为 (M,h) 上的 **全纯等距变换**. (M,h) 上的全纯等距变换构成的群称为 Hermite 流形 (M,h) 的 **全纯等距变换群**.

下面用 Hermite 流形 M 的局部复坐标把 Hermite 结构 h 表示出来，为此需要对复流形 M 上的 Hermite 结构作一些说明. 根据定义 2.7, 复流形 M 上的 Hermite 结构 h 是指：在每一点 $p \in M$, h_p 是切空间 T_pM 关于复流形的典型复结构 J 所对应的复向量空间上的 Hermite 内积.

设 $(U; z^i)$ 是 M 的一个局部复坐标系，相应的自然复标架场为 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial z^i}\right\}$, 与其对偶的余切标架场是 $\{dz^i\}$. 令 $z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$, 则 $(U; x^i, y^i)$ 是光滑流形 M 的局部坐标系，相应的自然标架场是 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial y^i}\right\}$, 其对偶余切标架场是 $\{dx^i, dy^i\}$. 典型复结构 J 的作用是

$$\begin{aligned} &J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^i}, \\ &J(dx^i) = -dy^i, \quad J(dy^i) = dx^i. \end{aligned} \tag{2.33}$$

记 $\bar{i} = n + i$, $x^{\bar{i}} = y^i$, 并且令

$$g_{\alpha\beta} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right), \quad 1 \le \alpha, \beta \le 2n. \tag{2.34}$$

则由 g 的 J-不变性得

$$\begin{aligned} &g_{ij} = g_{\bar i \bar j} = g_{ji} = g_{\bar j \bar i}, \\ &g_{i\bar j} = -g_{\bar i j} = g_{\bar j i} = -g_{j \bar i}; \end{aligned} \tag{2.35}$$

因而

$$\begin{aligned} g =& g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta \\ =& g_{ij}(dx^i \otimes dx^j + dy^i \otimes dy^j) + g_{i\bar j}(dx^i \otimes dy^j + dy^j \otimes dx^i). \end{aligned} \tag{2.36}$$

由 Kähler 形式的定义和 (2.32) 式有

$$k = k_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta,$$

其中

$$k_{\alpha\beta} = k\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, J\left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)\right).$$

因此

$$k_{ij} = g_{i\bar j}; \quad k_{i\bar j} = -g_{ij}; \quad k_{\bar i j} = g_{ij}, \ k_{\bar i \bar j} = g_{i\bar j}.$$

所以 Kähler 形式 k 可以表示为

$$k = g_{i\bar j}(dx^i \otimes dx^j + dy^i \otimes dy^j) + g_{ij}(-dx^i \otimes dy^j + dy^j \otimes dx^i). \tag{2.37}$$

从 (2.31) 式得到

$$h = g + \sqrt{-1}k = h_{ij} dz^i \otimes d\overline{z^j}, \tag{2.38}$$

其中

$$h_{ij} = g_{ij} + \sqrt{-1}\, g_{i\bar j}; \quad dz^i = dx^i + \sqrt{-1}\, dy^i = dx^i - \sqrt{-1}\, J dx^i. \tag{2.39}$$

上式中的 dz^i 是 T_pM 上的复值实线性函数，即 $dz^i \in (T_p^*M)^{\mathbb{C}}$. 如果考虑 (T_pM, J) 所对应的复向量空间，也就是对于任意的 $v \in T_pM$, 定义 $\sqrt{-1} \cdot v = Jv$, 则由 (2.39) 式不难知道

$$dz^i(\sqrt{-1} \cdot v) = \sqrt{-1}\, dz^i(v). \tag{2.40}$$

换句话说，dz^i 是 (T_pM, J) 所对应的复向量空间上的复线性函数. 由此可见，表达式 (2.38) 是 (T_pM, J) 所对应的复向量空间上的复值实双线性函数，并且它关于第一个自变量是复线性的.

n 维复流形 M 在每一点 $p \in M$ 有三个彼此复线性同构的复向量空间：切空间 T_pM 关于典型复结构 J 所构成的复向量空间，复切空间 T_p^hM 和 (1,0) 切空间 $T_p^{(1,0)}M$. Hermite 结构 (2.38) 同时可以看作 T_p^hM 和 $T_p^{(1,0)}M$ 上的 Hermite 内积.

复向量空间 (T_pM, J) 的复自然基底是 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$, (2.38) 式中的系数是

$$h_{ij} = h\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \sqrt{-1}\, g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right). \tag{2.41}$$

如果把 $\dfrac{\partial}{\partial z^i}$ 看作作用在全纯函数上的算子，则有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p = \left.\frac{\partial f}{\partial z^i}\right|_p, \qquad \forall f \in \mathcal{O}_p,$$

即 $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 和复切向量 $\dfrac{\partial}{\partial z^i}$ 在全纯函数上作用的效果是相同的，$\mathrm{d}z^i$ 看作 $T_p^h M$ 上的复线性函数正好是 $T_p^h M$ 上关于自然基底 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial z^i}\right\}$ 的坐标函数．在这个意义上，(2.38) 式定义的 h 是复向量空间 $T_p^h M$ 上的 Hermite 内积，即

$$h = h\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right) \mathrm{d}z^i \otimes \mathrm{d}\overline{z^j}. \tag{2.42}$$

另一方面，$\dfrac{\partial}{\partial z^i}$ 可以看作切向量的复系数线性组合

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i}\right), \tag{2.43}$$

而 $\mathrm{d}z^i = \mathrm{d}x^i + \sqrt{-1}\,\mathrm{d}y^i \in T_p^{*(1,0)}M = (T_p^{(1,0)}M)^*$，因此 (2.42) 式也是 $T_p^{(1,0)}M$ 上的 Hermite 内积．

最后引进一个新概念．将 §8.1 中的 (1.37) 和 (1.44) 两式相对照，不难从 Hermite 流形 (M,h) 的 Hermite 内积 (2.38) 式得到 Kähler 形式 k 的局部坐标表达式

$$k = -\frac{\sqrt{-1}}{2} h_{i\bar{j}} \mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z^j}, \tag{2.44}$$

它也能从化简 (2.37) 式得到．Kähler 形式作为光滑流形 M 上的 J-不变 2 次外微分形式的外微分是

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}k &= -\frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial z^k}\mathrm{d}z^k + \frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial \overline{z^k}}\mathrm{d}\overline{z^k}\right)\mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z^j} \\
&= -\frac{\sqrt{-1}}{4}\left(\sum_{i,j,k}\left(\frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial z^k} - \frac{\partial h_{k\bar{j}}}{\partial z^i}\right)\mathrm{d}z^k \wedge \mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z^j}\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{i,j,k}\left(\frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial \overline{z^k}} - \frac{\partial h_{i\bar{k}}}{\partial \overline{z^j}}\right)\mathrm{d}\overline{z^k} \wedge \mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z^j}\right) \\
&= -\frac{\sqrt{-1}}{4}\left(\sum_{i,j,k}\left(\frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial z^k} - \frac{\partial h_{k\bar{j}}}{\partial z^i}\right)\mathrm{d}z^k \wedge \mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z^j}\right. \\
&\qquad \left. - \overline{\sum_{i,j,k}\left(\frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial z^k} - \frac{\partial h_{k\bar{j}}}{\partial z^i}\right)\mathrm{d}z^k \wedge \mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z^j}}\right).
\end{aligned} \tag{2.45}$$

定义 2.9 设 (M,h) 是 Hermite 流形．如果它的 Kähler 形式 k 是闭微分式，则称 (M,h) 是 **Kähler 流形**．

于是，由 (2.45) 式得知：Hermite 流形 (M,h) 是 Kähler 流形的充分必要条件是

$$\frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial z^k} = \frac{\partial h_{k\bar{j}}}{\partial z^i} \quad \left(\text{或等价地}\ \frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial \overline{z^k}} = \frac{\partial h_{i\bar{k}}}{\partial \overline{z^j}}\right), \quad \forall i,j,k. \tag{2.46}$$

Kähler 流形具有丰富的几何性质，在 §8.4 将作详细的讨论．

§8.3 复向量丛上的联络

在第二章曾经对光滑流形和向量丛上的联络进行过详细的讨论．在深入研究 Hermite 流形和 Kähler 流形的几何之前，需要对复向量丛上联络的特点作一些分析．

8.3.1 复向量丛

所谓的复向量丛指的是一类以复向量空间为纤维的纤维丛，它的底流形可以是光滑流形，也可以是复流形；在底流形是复流形的情形，还可以对转移函数族提出更强的要求，从而区分出一类特殊的复向量丛——全纯向量丛．

定义 3.1 设 E, M 是两个光滑流形，$\pi: E \to M$ 是一个光滑

的满映射，$V = \mathbb{C}^r$ 是 r 维复向量空间．如果存在 M 的一个开覆盖 $\{U_\lambda, \lambda \in I\}$，以及一组映射 $\{\psi_\lambda, \lambda \in I\}$ 满足下列条件：

(1) 对于每一个 λ，映射 ψ_λ 是从 $U_\lambda \times \mathbb{C}^r$ 到 $\pi^{-1}(U_\lambda)$ 上的光滑同胚，并且对于任意的 $(p, y) \in U_\lambda \times \mathbb{C}^r$ 有

$$\pi \circ \psi_\lambda(p, y) = p;$$

(2) 对于任意固定的 $p \in U_\lambda$，记

$$\psi_{\lambda,p}(y) = \psi_\lambda(p, y), \quad \forall y \in \mathbb{C}^r,$$

则 $\psi_{\lambda,p} : \mathbb{C}^r \to \pi^{-1}(p)$ 是同胚，并且当 $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ 时，映射

$$g_{\lambda\mu}(p) \equiv \psi_{\lambda,p}{}^{-1} \circ \psi_{\mu,p} : \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^r$$

是复线性同构，即 $g_{\lambda\mu}(p) \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$；

(3) 当 $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ 时，映射 $g_{\lambda\mu} : U_\lambda \cap U_\mu \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ 是光滑的，则称 (E, M, π) 是光滑流形 M 上秩为 r 的 **复向量丛**，其中的 E 称为 **丛空间**，M 称为 **底空间**，π 称为 **丛投影**，$V = \mathbb{C}^r$ 称为 **纤维型**.

与第一章定义的实向量丛一样，常常把复向量丛 (E, M, π) 记为 E 或 $\pi : E \to M$；同时，对于任意的 $p \in M$，$E_p = \pi^{-1}(p)$ 称为 E 在 p 点的纤维，它是 r 维复向量空间.

定义 3.1 中的映射 ψ_λ $(\forall \lambda \in I)$ 称为复向量丛 E 的 **局部平凡化**，$g_{\lambda\mu}$ 称为 E 的 **转移函数**.

把复向量丛和实向量丛的定义相比较，不难看出它们的区别在于纤维型由原来的实向量空间 $\mathbb{R}^q$ 换成了复向量空间 $\mathbb{C}^r$；与此同时，转移函数 $g_{\lambda\mu}(p)(p \in U_\lambda \cap U_\mu)$ 是复线性同构，即由原来的 $g_{\lambda\mu} \in \mathrm{GL}(q, \mathbb{R})$ 换成了 $g_{\lambda\mu} \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$.

设 $E = (E, M, \pi)$ 是光滑流形 M 上的一个秩为 $q = 2r$ 的实向量丛，$\{g_{\lambda\mu} : U_\lambda \cap U_\mu \to \mathrm{GL}(q, \mathbb{R})\}$ 是 E 的转移函数族．如果存在 R^{2r}

的复结构 J_0 使得对于任意的满足条件 $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ 的指标 $\lambda, \mu \in I$，以及任意的 $p \in U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ 都有

$$J_0 \circ g_{\lambda\mu}(p) = g_{\lambda\mu}(p) \circ J_0, \tag{3.1}$$

则转移函数 $g_{\lambda\mu}(p) : (R^{2r}, J_0) \to (R^{2r}, J_0)$ 是光滑地依赖于点 $p \in U_\lambda \cap U_\mu$ 的复线性同构．而且，由于 (3.1) 式，在每一点 $p \in M$ 的纤维 E_p 上有确定的复结构

$$J_p = \psi_\lambda \circ J_0 \circ \psi_\lambda^{-1} = \psi_\mu \circ J_0 \circ \psi_\mu^{-1}, \quad p \in U_\lambda \cap U_\mu. \tag{3.2}$$

所以，$E_p = (E_p, J_p), \forall p \in M$ 是 r 维复向量空间，从而使 (E, M, π) 成为秩是 r 的复向量丛.

例 3.1 $2n$ 维近复流形 (M, J) 的切丛 TM 是 M 上秩为 n 的复向量丛.

设 $\pi : TM \to M$ 是 M 的切丛，$\{(U_a, \varphi_a) : a \in I\}$ 是光滑流形 M 的一个容许的坐标覆盖．根据命题 2.4，在每一个 U_a 上存在局部标架场 $\{e_1^{(a)}, \cdots, e_{2n}^{(a)}\}$，使得

$$Je_i^{(a)} = e_{n+i}^{(a)}, \quad Je_{n+i}^{(a)} = -e_i^{(a)}, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{3.3}$$

定义映射 $\psi_a : U_a \times \mathbb{R}^{2n} \to \pi^{-1}(U_a)$ 为

$$\psi_a(x, v) = \sum_{\alpha=1}^{2n} v^\alpha e_\alpha^{(a)}(x), \tag{3.4}$$

这是可微同胚，并且 $\pi \circ \psi_a(x, v) = x, \forall x \in U_a$．因此 ψ_a 是 TM 的局部平凡化．当 $U_a \cap U_b \neq \emptyset$ 时，在 $U_a \cap U_b$ 上有局部标架场的变换公式

$$e_\alpha^{(b)} = (g_{ab})_\alpha^\beta e_\beta^{(a)}, \tag{3.5}$$

其中 $(g_{ab})_\alpha^\beta \in C^\infty(U_a \cap U_b)$．将复结构用于 (3.5) 式，并且考虑到标架场 $e_\alpha^{(a)}$ 和 $e_\alpha^{(b)}$ 所满足的条件 (3.3)，则不难得知

$$(g_{ab})_{n+i}^{n+j} = (g_{ab})_i^j, \quad (g_{ab})_i^{n+j} = -(g_{ab})_{n+i}^j. \tag{3.6}$$

用 J_0 记 R^{2n} 上的典型复结构 (参看 (1.10) 式), 即

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

并且记

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} (g_{ab})_1^1 & \cdots & (g_{ab})_{2n}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ (g_{ab})_1^{2n} & \cdots & (g_{ab})_{2n}^{2n} \end{pmatrix},$$

则 (3.6) 式成为

$$g_{ab} \circ J_0 = J_0 \circ g_{ab}. \tag{3.7}$$

从 (3.4), (3.5) 式得到, 下列条件

$$\psi_a(x, v) = \psi_b(x, \tilde{v}), \quad \forall x \in U_a \cap U_b, \quad v, \tilde{v} \in \mathbb{R}^{2n},$$

即

$$\sum_{\beta=1}^{2n} v^\beta e_\beta^{(a)}(x) = \sum_{\alpha=1}^{2n} \tilde{v}^\alpha e_\alpha^{(b)}(x)$$

成立的充分必要条件是

$$v^\beta = (g_{ab}(x))_\alpha^\beta \tilde{v}^\alpha,$$

即 $g_{ab}(x)$ 恰好是转移函数 $\psi_{a,x}^{-1} \circ \psi_{b,x} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$. 由 (3.7) 式和命题 1.2, $g_{ab}(x) \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ 实际上等同于从 $\mathbb{C}^n$ 到它自身的复线性同构 $\tilde{g}_{ab}(x) = ((g_{ab})_j^i + \sqrt{-1}(g_{ab})_j^{n+i}) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. 因此 TM 是 M 上的复向量丛.

一般线性变换群 $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ 显然是一个复流形. 因此, 当一个复向量丛的底流形是复流形时, 可以对转移函数提出更高的要求.

定义 3.2 设 M 是 n 维复流形, $\pi : E \to M$ 是 M 上秩为 r 的复向量丛. 如果存在该复向量丛的局部平凡化结构 $\{(U_\lambda, \psi_\lambda);\ \lambda \in I\}$, 使得对于任意的 $\lambda, \mu \in I$, 当 $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ 时, 转移函数 $g_{\lambda\mu} : U_\lambda \cap U_\mu \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ 都是全纯映射, 则称 (E, M, π) 是复流形 M 上秩为 r 的**全纯向量丛**.

对于全纯向量丛 (E, M, π) 来说, 在其丛空间 E 上具有自然的复流形结构, 使得 E 成为一个复流形. 事实上, 设 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda; z_\lambda^i)\}$ 是 M 的一个复坐标覆盖, 则 $\{\pi^{-1}(U_\lambda)\}$ 构成 E 的一个开覆盖. 同时, 借助于局部平凡化

$$\psi_\lambda : U_\lambda \times \mathbb{C}^r \to \pi^{-1}(U_\lambda),$$

使 $(z_\lambda^i, y_\lambda) \in \varphi_\lambda(U_\lambda) \times \mathbb{C}^r$ 成为 $\pi^{-1}(U_\lambda)$ 上的复坐标系. 当 $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ 时, 在 $\pi^{-1}(U_\lambda) \cap \pi^{-1}(U_\mu) = \pi^{-1}(U_\lambda \cap U_\mu)$ 上的复坐标系 (z_λ^i, y_λ) 和 (z_μ^i, y_μ) 之间的关系是

$$\begin{aligned} z_\lambda^i &= (\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1})^i (z_\mu^1, \cdots, z_\mu^n), \\ y_\lambda &= (g_{\lambda\mu} \circ \varphi_\mu^{-1}(z_\mu^1, \cdots, z_\mu^n)) \cdot y_\mu. \end{aligned} \tag{3.8}$$

因为 $\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1}$ 和 $g_{\lambda\mu} : U_\lambda \cap U_\mu \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ 都是全纯映射, 所以 (z_λ^i, y_λ) 的每一个分量都是 (z_μ^i, y_μ) 的全纯函数. 由此得知, E 具有复流形结构, 因而是一个 $n + r$ 维复流形. 在此意义下, 丛投影 $\pi : E \to M$ 是全纯映射.

定义 3.3 设 (E, M, π) 是全纯向量丛. 如果 $\sigma : M \to E$ 是全纯映射, 并且满足条件 $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_M$, 则称 σ 是全纯向量丛 $\pi : E \to M$ 的一个**全纯截面**.

全纯向量丛 E 上的全纯截面的集合记作 $\Gamma^h(E)$, 它是一个复向量空间.

例 3.2 设 M 是 n 维复流形, 则 M 的切丛 TM 是 M 上的全纯向量丛.

事实上, 由例 3.1 已知 TM 是 M 上的复向量丛. 因此, 只需要说明 TM 有一个局部平凡化结构, 使得它的转移函数都是全纯的. 设 $(U; z^i)$ 是 M 的一个复坐标系. 令 $z^i = x^i + \sqrt{-1} y^i$, 则 $T_pM (p \in U)$ 的

自然基底是 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$, 并且 $J\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial y^i}$, $J\frac{\partial}{\partial y^i} = -\frac{\partial}{\partial x^i}$, 这里的 J 是 M 上的典型复结构. 在把 T_pM 看作复向量空间时有

$$\sqrt{-1}\cdot v = Jv, \quad \forall v \in T_pM.$$

因此, $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 是复向量空间 (T_pM, J) 的基底.

设 $(V; \tilde{z}^i)$ 是 M 的另一个复坐标系, 并且 $U \cap V \neq \emptyset$. 令 $\tilde{z}^i = \tilde{x}^i + \sqrt{-1}\,\tilde{y}^i$, 则在 $U \cap V$ 上有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x^i} = \dfrac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\dfrac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} + \dfrac{\partial \tilde{y}^j}{\partial x^i}\dfrac{\partial}{\partial \tilde{y}^j}, \\ \dfrac{\partial}{\partial y^i} = \dfrac{\partial \tilde{x}^j}{\partial y^i}\dfrac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} + \dfrac{\partial \tilde{y}^j}{\partial y^i}\dfrac{\partial}{\partial \tilde{y}^j}. \end{cases}$$

由于 $\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j} = J\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} = \sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}$, 上面的第一式可以写成

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}.$$

因为 $U \cap V$ 上的复坐标变换 $\tilde{z}^j = \tilde{z}^j(z^1, \cdots, z^n)$ 是全纯的, 所以

$$\frac{\partial \tilde{z}^j}{\partial z^i} = \frac{\partial \tilde{z}^j}{\partial x^i} = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial x^i}.$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial \tilde{z}^j}{\partial z^i}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}, \tag{3.9}$$

这意味着相应的转移函数是

$$g_{VU} = \left(\frac{\partial \tilde{z}^j}{\partial z^i}\right). \tag{3.10}$$

因为 $\frac{\partial \tilde{z}^j}{\partial z^i}$ 是全纯函数, 所以转移函数 $g_{VU}: U \cap V \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ 是全纯映射. 这就证明了复向量丛 TM 是全纯向量丛.

由此可见, 复流形 M 的切丛 TM 本身是一个 $2n$ 维复流形. 切丛 TM 的全纯截面称为 M 上的 **全纯切向量场**.

此外, 设 ω 是复流形 M 上的 $(1,0)$-微分式. 如果对于 M 上任意的全纯切向量场 X, $\omega(X)$ 是 M 上的全纯函数, 则称 ω 是 M 上的 **全纯微分式**. 容易看出, ω 是 M 上的全纯微分式当且仅当对于 M 上任意的局部复坐标系 $(U; z^i)$, 存在 U 上的一组全纯函数 f_i, 使得 $\omega|_U = f_i \mathrm{d}z^i$. 特别地, $\mathrm{d}z^i$ 是 U 上的全纯微分式.

例 3.3　设 M 是 n 维复流形, 命

$$T^hM = \bigcup_{p\in M} T_p^hM, \qquad T^{(1,0)}M = \bigcup_{p\in M} T_p^{(1,0)}M,$$

则 $T^hM, T^{(1,0)}M$ 和 TM 一样, 都是复流形 M 上秩为 n 的全纯向量丛. 复切空间 T_p^hM, $(1,0)$ 切空间 $T_p^{(1,0)}M$ 以及作为复向量空间的切空间 (T_pM, J) 都可以等同起来. 因此, 全纯向量丛 $T^hM, T^{(1,0)}M$ 和 TM 也可以等同起来, 并且它们有相同的转移函数族. 当然, 它们的元素有不同的几何含义 (参看 (2.6) 和 (2.11) 式). 在强调它们的区别时, 有时称 T^hM 为 **复切丛**, 称 $T^{(1,0)}M$ 为 $(1,0)$**切丛**. 它们的全纯截面都是 M 上的全纯切向量场, 在不同的场合有不同的几何含义.

定义 3.4　设 (E, M, π) 是光滑流形 M 上的复向量丛. 如果在每一点 $p \in M$ 的纤维 $\pi^{-1}(p)$ 上以光滑地依赖于点 p 的方式给定了一个 Hermite 内积 h_p, 则称 $h = \{h_p;\ p \in M\}$ 是复向量丛 $\pi: E \to M$ 上的一个 Hermite 结构.

这里, "以光滑地依赖于点 p 的方式" 是指: 对于任意的 $X, Y \in \Gamma(E)$, 由 $(h(X,Y))(p) = h_p(X(p), Y(p))$ 定义的 $h(X,Y)$ 是 M 上的光滑函数.

指定一个 Hermite 结构 h 的复向量丛 (E, M, π) 称为 **Hermite 向量丛**, 记为 (E, M, π, h). 特别地, 如果在全纯向量丛 $\pi: E \to M$ 上指定一个 Hermite 结构 h, 则称 (E, M, π, h) 是 **Hermite 全纯向量丛**.

显然，近 Hermite 流形的切丛是一个 Hermite 向量丛，而 Hermite 流形的切丛（或复切丛，或 (1,0) 切丛）是 Hermite 全纯向量丛. 但是，一般说来，Hermite 向量丛的底流形 M 可以是光滑流形，而不必是近复流形或者复流形.

复向量丛的概念可以派生出很多子类. 图 7 描述了它们之间的关系，箭头所指的概念是箭头出发处概念的特殊情形.

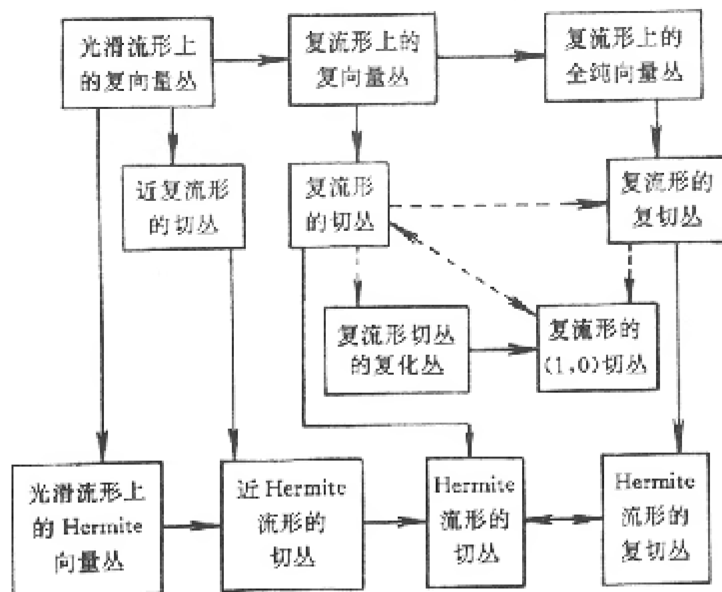


图　7

8.3.2　复向量丛上的联络

现在来讨论复向量丛上的联络.

定义 3.5　设 (E, M, π) 是光滑流形 M 上的复向量丛，$\Gamma(E)$ 是它的光滑截面的集合. 复向量丛 E 上的 **复联络** 是指满足下列条件的映射 $\mathrm{D}: \Gamma(E) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(E)$（其中对于任意的 $(\xi, X) \in \Gamma(E) \times \mathfrak{X}(M)$，记 $\mathrm{D}_X\xi = \mathrm{D}(\xi, X)$）：对于任意的 $\xi, \eta \in \Gamma(E)$，$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$，$\lambda \in \mathbb{C}$，以及（实数值函数）$f \in C^\infty(M)$ 有

(1) $\mathrm{D}_{X+fY}\xi = \mathrm{D}_X\xi + f\mathrm{D}_Y\xi$;

(2) $\mathrm{D}_X(\xi + \lambda\eta) = \mathrm{D}_X\xi + \lambda\mathrm{D}_X\eta$;

(3) $\mathrm{D}_X(f\xi) = X(f)\xi + f\mathrm{D}_X\xi$.

很明显，由于条件 (2)，故条件 (3) 对于任意的复值光滑函数 f 也成立. $\mathrm{D}_X\xi$ 称为光滑截面 ξ 关于切向量场 X 的 **协变导数**.

把上述定义和第二章中的定义 8.1 相对照可知，两者的区别在于条件 (2) 不只是对于任意的实数 λ 成立，而且对于任意的复数 λ 也成立，即对于复向量丛上的复联络，增加了条件

$$\mathrm{D}_X(\sqrt{-1}\xi) = \sqrt{-1}\mathrm{D}_X\xi. \tag{3.11}$$

根据定义 3.1 后面的讨论，复向量丛 E 是具有复结构 J 的实向量丛（参看 (3.2) 式），从而由定义 3.5 和 (3.11) 式得知，复向量丛上的复联络 D 是在相应的实向量丛上满足条件

$$\mathrm{D}_X \circ J = J \circ \mathrm{D}_X, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M) \tag{3.12}$$

的联络. 将 J 看作定义在 M 上的张量场，$\mathrm{D}_X J$ 是 J 沿切向量场 X 的协变导数，即 $\mathrm{D}_X J$ 仍然是定义在 M 上的张量场，且对于任意的 $\xi \in \Gamma(E)$ 有

$$\mathrm{D}_X J(\xi) = \mathrm{D}_X(J\xi) - J(\mathrm{D}_X\xi) = (\mathrm{D}_X \circ J - J \circ \mathrm{D}_X)(\xi).$$

于是 (3.12) 式的含义是：对于任意的 $X \in \mathfrak{X}(M)$，有 $\mathrm{D}_X J = 0$，即 $\mathrm{D}J = 0$. 因此复结构 J 关于复联络 D 是平行的. 反之也然，于是有下面的命题：

命题 3.1　设 $E = (E, M, \pi)$ 是光滑流形 M 上的复向量丛，复结构场是 J，D 是该向量丛上的一个联络，则 D 是复向量丛 E 上的复联络的充分必要条件是 $\mathrm{D}J = 0$.

命题 3.1 的证明留给读者自己完成.

现设 $E=(E,M,\pi)$ 是秩为 r 的复向量丛, D 是该向量丛上的一个复联络. 对于定义在开集 $U\subset M$ 上的局部标架场 $\{s_a; 1\le a\le r\}$, 令

$$\mathrm{D}s_a=\omega_a^b s_b,\quad 1\le a\le r,$$

其中 ω_a^b $(1\le a,b\le r)$ 是 U 上的复值 1 次微分式, 称为 D 在局部标架场 $\{s_a\}$ 下的联络形式. 当局部标架场变换时, 联络形式的变换公式与实向量丛的情形是一样的 (参看第二章 §2.8 的 (8.4) 式).

特别地, 如果 E 是全纯向量丛, D 是该向量丛上的一个复联络, 则对于任意的 $X\in\mathfrak{X}(M)$, 协变导数算子 D_X 是从光滑截面空间 $\Gamma(E)$ 到其自身的映射. 假定 $\{s_a; 1\le a\le r\}$ 是定义在开集 $U\subset M$ 上的全纯标架场 (即它是由 r 个全纯截面构成的标架场), ω_a^b 是 D 在标架场 $\{s_a\}$ 下的联络形式, 即

$$\mathrm{D}s_a=\omega_a^b s_b,\quad 1\le a\le r,\tag{3.13}$$

则 ω_a^b 只是 U 上的复值 1 次微分式, 而不是 U 上的全纯微分式 (全纯微分式是指系数是全纯函数的 (1,0) 微分式, 即余切丛 T^*M 的全纯截面). 原因是, 在定义 3.5 中只要求 $\mathrm{D}_X s_a$ 是 U 上的光滑截面, 而不是全纯截面.

如果 $\{\tilde{s}_a; 1\le a\le r\}$ 是定义在 $U\subset M$ 上的另一个全纯标架场, 则可设

$$\tilde{s}_a=A_a^b s_b,\tag{3.14}$$

其中 A_a^b 是 U 上的全纯函数. 若设 D 关于标架场 $\{\tilde{s}_a\}$ 的联络形式为 $\tilde{\omega}_a^b, 1\le a,b\le r$, 即

$$\mathrm{D}\tilde{s}_a=\tilde{\omega}_a^b\tilde{s}_b,\quad 1\le a\le r,\tag{3.15}$$

则由第二章的 (8.4) 式得到

$$A_c^b\tilde{\omega}_a^c=\mathrm{d}A_a^b+\omega_c^b A_a^c,\quad 1\le a,b\le r.\tag{3.16}$$

由于 A_a^b 是全纯函数, 在 U 上的复坐标系 $\{z^i\}$ 下有

$$\mathrm{d}A_a^b=\frac{\partial A_a^b}{\partial z^i}\mathrm{d}z^i,\tag{3.17}$$

即 $\mathrm{d}A_a^b$ 是 U 的全纯微分式. 由此可见, 当 ω_a^b 是 U 上的 (1,0)-微分式时, $\tilde{\omega}_a^b$ 也必定是 U 上的 (1,0)-微分式, 即联络形式 ω_a^b 是否为 (1,0)-微分式与全纯标架场 $\{s_a\}$ 的选取无关. 此现象导致下面的定义:

定义 3.6 设 (E,M,π) 是复流形 M 上的全纯向量丛, D 是全纯向量丛 E 上的一个复联络. 如果对于定义在 M 的任意一个开子集 U 上的全纯标架场 $\{s_a\}$, 联络 D 的联络形式 ω_a^b 都是 U 上的 (1,0)-微分式, 则称 D 是全纯向量丛 E 上的一个 **(1,0) 型联络**.

定理 3.2 设 M 是 n 维复流形, D 是复切丛 T^hM 上的一个复联络. 则 D 是 (1,0) 型联络, 当且仅当 D 的挠率形式是 M 上的 (2,0)-微分式.

证明 设 $\{e_i\}$ 是 T^hM 的一个局部标架场, $\{\omega^i\}$ 是与之对偶的余切标架场, 则在局部复坐标系 $(U;z^i)$ 下有

$$e_i=A_i^j\frac{\partial}{\partial z^j},\quad \mathrm{d}z^j=A_i^j\omega^i,\tag{3.18}$$

其中 $A_i^j\in C^\infty(U)$, 且 $\det(A_i^j)\ne 0$. 设

$$\mathrm{D}e_i=\omega_i^j e_j,\quad 1\le i\le n,\tag{3.19}$$

则

$$\Omega^i=\mathrm{d}\omega^i-\omega^j\wedge\omega_j^i,\quad 1\le i\le n\tag{3.20}$$

是联络 D 的挠率形式. 当局部标架场 $\{e_i\}$ 变换时, $\{\Omega^i\}$ 遵循反变向量分量的变换规律, 因而它们的类型与局部标架场的选取无关.

特别地, 取 $e_i=\dfrac{\partial}{\partial z^i}$, $\omega^i=\mathrm{d}z^i$, 则 $\{e_i\}$ 是全纯标架场. 此时, (3.20) 式化为

$$\Omega^i=-\mathrm{d}z^j\wedge\omega_j^i.$$

结合定义 3.6 便知， D 是 (1,0) 型联络当且仅当它的挠率形式 Ω^i 是 (2,0)-微分式. 证毕.

定理 3.2 的意义在于，在判断联络是否是 (1,0) 联络时不必取全纯标架场，只要看它的挠率形式是否为 (2,0)-微分式就可以了.

定义 3.7 设 (E,M,π,h) 是光滑流形 M 上的 Hermite 向量丛，D 是复向量丛 E 上的一个复联络. 如果对于任意的 $\xi,\eta\in\Gamma(E)$, 以及任意的 $X\in\mathfrak{X}(M)$, 有

$$X(h(\xi,\eta))=h(\mathrm{D}_X\xi,\eta)+h(\xi,\mathrm{D}_X\eta), \tag{3.21}$$

则称联络 D 和 Hermite 结构 h 是相容的，或称 D 是 Hermite 结构 h 的 **容许联络**.

如所周知， Hermite 向量丛 E 的 Hermite 结构 h 具有 J-不变的实部 g 和虚部 k, 其中 g 是 E 上的 J-不变黎曼结构， k 由 g 唯一确定. 利用 (3.21) 式不难证明， E 上的复联络 D 与 Hermite 结构 h 是相容的充分必要条件是 D 与作为 h 的实部的黎曼结构 g 是相容的.

定理 3.3 设 (E,M,π,h) 是复流形 M 上秩为 r 的 Hermite 全纯向量丛，则在 E 上存在唯一的一个与 Hermite 结构相容的 (1,0) 型联络.

证明 在 M 的复坐标域 $(U;z^i)$ 上取全纯向量丛 E 的全纯标架场 $\{s_a,1\le a\le r\}$, 令

$$h_{ab}=h(s_a,s_b),\quad 1\le a,b\le r. \tag{3.22}$$

设 D 是向量丛 (E,M,π,h) 上的容许联络， $\omega_a^b, 1\le a,b\le r$ 是 D 关于 $\{s_a\}$ 的联络形式，则有

$$\mathrm{D}s_a=\omega_a^b s_b,\quad 1\le a\le r,$$

并且

$$\mathrm{d}h_{ab}=\omega_a^c h_{cb}+\overline{\omega_b^c}h_{ac}. \tag{3.23}$$

如果 D 是 (1,0) 型联络，即 ω_a^b 是 U 上的 (1,0)-微分式，则从 (3.23) 式得到

$$\frac{\partial h_{ab}}{\partial z^i}\mathrm{d}z^i=\omega_a^c h_{cb}. \tag{3.24}$$

用 (h^{ab}) 表示矩阵 (h_{ab}) 的逆矩阵，假设

$$h^{ac}h_{bc}=\delta_b^a, \tag{3.25}$$

则从 (3.24) 式得到

$$\omega_a^b=h^{bc}\frac{\partial h_{ac}}{\partial z^i}\mathrm{d}z^i. \tag{3.26}$$

这就说明了与 Hermite 结构 h 相容的 (1,0) 型联络是唯一的.

反过来，对于每一个全纯标架场 $\{s_a\}$ 可以用 (3.26) 式来定义一组 (1,0)-微分式 ω_a^b; $1\le a,b\le r$. 容易证明：当 $\{s_a\}$ 变换为全纯标架场 $\{\tilde{s}_a\}$ 时，如果 $\tilde{s}_a=A_a^b s_b$, 其中 A_a^b 是全纯函数，则有

$$\tilde{h}_{ab}=h(\tilde{s}_a,\tilde{s}_b)=A_a^c\overline{A_b^d}h_{cd},\quad h^{ab}=A_c^a\overline{A_d^b}\tilde{h}^{cd},$$

由 (3.26) 式不难得到

$$A_c^b\tilde{\omega}_a^c=\mathrm{d}A_a^b+\omega_c^b A_a^c,$$

这恰好是联络形式在标架场变换时的变换公式. 因此，由

$$\mathrm{D}s_a=\omega_a^b s_b$$

在向量丛 $\pi:E\to M$ 上定义了一个复联络，记为 D. 不难验证， D 是与 Hermite 结构 h 相容的 (1,0) 型联络. 证毕.

推论 3.4 设 (M,h) 是 Hermite 流形，则 T^hM 作为 Hermite 全纯向量丛有唯一的一个 (1,0) 型容许联络，称为 (M,h) 上的 **Hermite 联络**.

设 $(U;z^i)$ 是 Hermite 流形 (M,h) 的复坐标系， $\left\{\dfrac{\partial}{\partial z^i}\right\}$ 是自然的复标架场，它是全纯标架场. ω_i^j 是 Hermite 联络 D 关于 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial z^i}\right\}$ 的

联络形式，即

$$\mathrm{D}\frac{\partial}{\partial z^i}=\omega_i^j\frac{\partial}{\partial z^j}. \tag{3.27}$$

如果

$$h=h_{ij}\mathrm{d}z^i\otimes\mathrm{d}\overline{z^j},\quad 其中\quad h_{ij}=h\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial z^j}\right), \tag{3.28}$$

则有 (1,0) 型容许联络形式 ω_i^j 的表达式

$$\omega_i^j=h^{jk}\frac{\partial h_{ik}}{\partial z^l}\mathrm{d}z^l, \tag{3.29}$$

这里 (h^{ij}) 是矩阵 (h_{ij}) 的逆矩阵，使得 $h^{ij}h_{kj}=\delta_k^i$.

§8.4 Kähler 流形的几何

8.4.1 Kähler 流形上的联络

设 (M,h) 是 n 维 Hermite 流形，J 是它的典型复结构. 在下面的讨论中 M 既看作 n 维复流形，也看作 $2n$ 维光滑流形. 因此，M 的切丛有双重身份，它既是秩为 n 的复向量丛，又是秩为 $2n$ 的实向量丛. 在把 M 的切丛理解为复向量丛时，将它等同于 (1,0) 切丛 $T^{(1,0)}M$ 比较方便.

根据推论 3.4, (M,h) 上的 Hermite 联络 D 是在作为复向量丛的切丛 TM 上与 Hermite 结构 h 相容的唯一的 (1,0) 型联络. 当然，D 也是 M 的作为实向量丛的切丛 TM 上的联络. 首先，要弄清楚 D 作为复、实联络两种身份的关系. 在 M 的局部复坐标系 $(U;z^i)$ 下，设

$$\mathrm{D}\frac{\partial}{\partial z^i}=\omega_i^j\frac{\partial}{\partial z^j},\quad 1\le i\le n, \tag{4.1}$$

则 ω_i^j 由 (3.28) 和 (3.29) 两式给出，它们是 U 上的 (1,0)-微分式.

设 $z^i=x^i+\sqrt{-1}\,y^i$, 则 $(U;x^i,y^i)$ 是 M 作为 $2n$ 维光滑流形的局部坐标系. 根据命题 3.1, 典型复结构 J 关于切丛 TM 上的联络 D 是平行的，即

$$\mathrm{D}J=0,$$

或等价地，

$$\mathrm{D}\circ J=J\circ\mathrm{D}. \tag{4.2}$$

联络形式 ω_i^j 作为 M 上的复值微分式可以分解成实部和虚部

$$\omega_i^j=\theta_i^j+\sqrt{-1}\,\theta_i^{\bar{j}}, \tag{4.3}$$

其中 $\bar{j}=n+j$. 那么从 (4.1) 和 (4.2) 式得到

$$\mathrm{D}\frac{\partial}{\partial x^i}=\theta_i^j\frac{\partial}{\partial x^j}+\theta_i^{\bar{j}}\frac{\partial}{\partial y^j},\quad \mathrm{D}\frac{\partial}{\partial y^i}=-\theta_i^{\bar{j}}\frac{\partial}{\partial x^i}+\theta_i^j\frac{\partial}{\partial y^j}.$$

因此，D 关于自然标架场 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$ 的联络形式为 θ_α^β, $1\le\alpha,\beta\le 2n$, 其中

$$\theta_{\bar{i}}^{\bar{j}}=\theta_i^j,\quad \theta_{\bar{i}}^{j}=-\theta_i^{\bar{j}}. \tag{4.4}$$

再把相容性条件

$$\mathrm{d}h_{ij}=h_{kj}\omega_i^k+h_{ik}\overline{\omega_j^k}$$

的两端分解成实部和虚部，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}g_{ij}&=\theta_i^k g_{kj}+\theta_i^{\bar{k}}g_{\bar{k}j}+\theta_j^k g_{ik}+\theta_j^{\bar{k}}g_{i\bar{k}};\\ \mathrm{d}g_{i\bar{j}}&=\theta_i^k g_{k\bar{j}}+\theta_i^{\bar{k}}g_{\bar{k}\bar{j}}+\theta_j^k g_{ik}+\theta_j^{\bar{k}}g_{i\bar{k}}.\end{aligned} \tag{4.5}$$

由此可见，D 与 J-不变黎曼度量 g 是相容的.

但是，$\omega^i=\mathrm{d}z^i=\mathrm{d}x^i+\sqrt{-1}\,\mathrm{d}y^i$, 复联络 D 的挠率形式是

$$\begin{aligned}\Omega^i&=\mathrm{d}\omega^i-\omega^j\wedge\omega_j^i\\ &=-(\mathrm{d}x^j+\sqrt{-1}\,\mathrm{d}y^j)\wedge(\theta_j^i+\sqrt{-1}\,\theta_j^{\bar{i}})\\ &=-(\mathrm{d}x^j\wedge\theta_j^i+\mathrm{d}y^j\wedge\theta_{\bar{j}}^i)-\sqrt{-1}\,(\mathrm{d}x^j\wedge\theta_j^{\bar{i}}+\mathrm{d}y^j\wedge\theta_{\bar{j}}^{\bar{i}})\\ &=\Theta^i+\sqrt{-1}\,\Theta^{\bar{i}}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

于是，D 作为光滑实流形 M 上的联络的挠率形式恰好是上式中的实部 Θ^i 和虚部 $\Theta^{\bar{i}}$.

综上所述， Hermite 联络 D 作为黎曼流形 (M,g) 上的联络是与黎曼度量 g 相容的复联络 (即满足 (4.2) 式和 (4.5) 式)，它的挠率形式是 (2,0) 形式，但未必为零；因此，它未必是黎曼流形 (M,g) 的黎曼联络.

另一方面，Hermite 流形 (M,h) 作为黎曼流形 (M,g) 又有唯一的黎曼联络，暂记为 ∇. 它是与 g 相容的无挠联络，但是它未必是复联络，即未必满足 (4.2) 式. 对于 M 的复坐标系 $(U;z^i)$，令 $z^i = x^i + \sqrt{-1}\,y^i$，并设

$$\nabla\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \varphi_\alpha^\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta},\quad 1\le\alpha\le 2n \tag{4.7}$$

其中记 $\bar{i} = n+i$, $x^{\bar{i}} = y^i$，那么

$$(\nabla\circ J - J\circ\nabla)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \left(\varphi_{\bar{i}}^j + \varphi_i^{\bar{j}}\right)\frac{\partial}{\partial x^j} + \left(\varphi_{\bar{i}}^{\bar{j}} - \varphi_i^j\right)\frac{\partial}{\partial y^j},$$

$$(\nabla\circ J - J\circ\nabla)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = -\left(\varphi_{\bar{i}}^{\bar{j}} - \varphi_i^j\right)\frac{\partial}{\partial x^j} + \left(\varphi_{\bar{i}}^j + \varphi_i^{\bar{j}}\right)\frac{\partial}{\partial y^j}.$$

因此， ∇ 成为复联络的条件是它的联络形式满足关系式

$$\varphi_i^j = \varphi_{\bar{i}}^{\bar{j}},\quad \varphi_i^{\bar{j}} = -\varphi_{\bar{i}}^j. \tag{4.8}$$

根据定理 3.2 和上面的讨论得到

定理 4.1 设 (M,h) 是 n 维 Hermite 流形， J 是 M 上的典型复结构， $g=\mathrm{Re}(h)$. 则 (M,h) 的 Hermite 联络 D 是黎曼流形 (M,g) 的黎曼联络当且仅当它的挠率为零. 反过来， (M,g) 上的黎曼联络 ∇ 是 (M,h) 的 Hermite 联络当且仅当它是复联络，即 $\nabla\circ J = J\circ\nabla$.

利用联络形式的表达式 (3.29)，可以得到 Hermite 联络的挠率形式为零的几何意义：

定理 4.2 设 (M,h) 是 n 维 Hermite 流形，则它的 Hermite 联络 D 的挠率为零当且仅当 (M,h) 是 Kähler 流形.

证明 设 $(U;z^i)$ 是 M 的局部复坐标系，令 $h_{ij} = h\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial z^j}\right)$，则由 (3.29) 式得到

$$\omega_i^j = h^{jk}\frac{\partial h_{ik}}{\partial z^l}\mathrm{d}z^l,$$

故 D 的挠率形式为

$$\begin{aligned}\Omega^i &= \mathrm{d}(\mathrm{d}z^i) - \mathrm{d}z^j\wedge\omega_j^i = -h^{ik}\frac{\partial h_{jk}}{\partial z^l}\mathrm{d}z^j\wedge\mathrm{d}z^l\\ &= \frac{1}{2}h^{il}\left(\frac{\partial h_{kl}}{\partial z^j} - \frac{\partial h_{jl}}{\partial z^k}\right)\mathrm{d}z^j\wedge\mathrm{d}z^k.\end{aligned} \tag{4.9}$$

于是由 (2.46) 式得知， $\Omega^i = 0$ 当且仅当 (M,h) 是 Kähler 流形. 证毕.

推论 4.3 设 (M,h) 是 Kähler 流形，则它的 Hermite 联络和黎曼联络是同一个联络；特别地， Kähler 流形上的黎曼联络 D 和典型复结构 J 满足如下的关系：

$$\mathrm{D}\circ J = J\circ\mathrm{D}. \tag{4.10}$$

综合上面的讨论可知， Kähler 流形 (M,h) 上的三种结构：典型复结构 J 、 Hermite 结构 h 和黎曼联络 D 相互间有密切的联系；典型复结构 J 和 Hermite 内积 h 关于黎曼联络 D 都是平行张量场，即

$$\mathrm{D}J = 0,\quad \mathrm{D}h = 0\quad (\text{或等价地 } \mathrm{D}g = 0). \tag{4.11}$$

由此可见， Kähler 流形是一类特殊的黎曼流形，具有更为丰富的几何性质.

8.4.2 Kähler 流形上的曲率张量

定理 4.4 设 (M,h) 是 Kähler 流形， J 是 M 上的典型复结构， $g=\mathrm{Re}(h)$. 那么作为黎曼流形， (M,g) 的曲率算子 $\mathcal{R}$ 除了具有黎曼流形的曲率算子的一般性质以外，还具有下列性质：对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$，

(1) $\mathcal{R}(X,Y)\circ J = J\circ\mathcal{R}(X,Y)$;

(2) $\mathcal{R}(JX,JY)=\mathcal{R}(X,Y)$.

证明　(1) 利用 $\mathcal{R}(X,Y)=\mathrm{D}_X\mathrm{D}_Y-\mathrm{D}_Y\mathrm{D}_X-\mathrm{D}_{[X,Y]}$ 以及关系式 $\mathrm{D}\circ J=J\circ\mathrm{D}$, 可以直接得到

$$\mathcal{R}(X,Y)\circ J = J\circ\mathcal{R}(X,Y).$$

(2) 对于任意的 $Z,W\in\mathfrak{X}(M)$ 有

$$\begin{aligned}g(\mathcal{R}(JX,JY)Z,W)&=g(\mathcal{R}(Z,W)(JX),JY)\\&=g(J(\mathcal{R}(Z,W)X),JY)=g(\mathcal{R}(Z,W)X,Y)\\&=g(\mathcal{R}(X,Y)Z,W),\end{aligned}$$

由 $Z,W\in\mathfrak{X}(M)$ 的任意性便得到

$$\mathcal{R}(JX,JY)=\mathcal{R}(X,Y).$$

定理得证.

定理 4.5　设 (M,h) 是 n 维 Kähler 流形, J 是 M 上的典型复结构, $g=\mathrm{Re}(h)$. 则黎曼流形 (M,g) 的 Ricci 曲率张量 Ric 具有下列性质: 对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ 有

(1) $\mathrm{Ric}(JX,JY)=\mathrm{Ric}(X,Y)$;

(2) $\mathrm{Ric}(X,Y)=\dfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,(J\circ\mathcal{R}(X,JY))$.

证明　任取一点 $p\in M$, 设 $\{e_\alpha,1\le\alpha\le 2n\}$ 是 T_pM 的一个单位正交基底. 由于黎曼度量 g 是 J-不变的, 故 $\{Je_\alpha,1\le\alpha\le 2n\}$ 也是 T_pM 的单位正交基底.

(1) 根据 Ricci 曲率张量的定义和定理 4.4,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(JX,JY)&=\sum_\alpha g(\mathcal{R}(JX,e_\alpha)e_\alpha,JY)\\&=\sum_\alpha g(\mathcal{R}(X,Je_\alpha)(Je_\alpha),Y)=\mathrm{Ric}(X,Y).\end{aligned}$$

(2) 利用 Bianchi 恒等式,

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\,(J\circ\mathcal{R}(X,JY))\\&=\sum_\alpha g(J(\mathcal{R}(X,JY)e_\alpha),e_\alpha)=-\sum_\alpha g(\mathcal{R}(X,JY)e_\alpha,Je_\alpha)\\&=\sum_\alpha g(\mathcal{R}(JY,e_\alpha)X,Je_\alpha)+\sum_\alpha g(\mathcal{R}(e_\alpha,X)(JY),Je_\alpha)\\&=\sum_\alpha g(\mathcal{R}(Y,Je_\alpha)(Je_\alpha),X)+\sum_\alpha g(J(\mathcal{R}(e_\alpha,X)Y),Je_\alpha)\\&=\sum_\alpha g(\mathcal{R}(Y,Je_\alpha)(Je_\alpha),X)+\sum_\alpha g(\mathcal{R}(Y,e_\alpha)e_\alpha,X)\\&=2\mathrm{Ric}(X,Y).\end{aligned}$$

定理证毕.

在前面已经知道, 从 J-不变度量 g 可以得到 2 次外微分式 k(Kähler 形式), 即 $k(X,Y)=g(X,JY)$ $(\forall X,Y\in\mathfrak{X}(M))$. 现在, Ricci 曲率张量 Ric 是 (M,g) 上另一个 J-不变的 2 阶协变对称张量场, 所以对应地在 M 上有 2 次外微分式 ρ, 使得

$$\rho(X,Y)=\mathrm{Ric}(X,JY),\quad \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M). \tag{4.12}$$

这个 2 次外微分式 ρ 称为 Kähler 流形 (M,h) 的 **Ricci 形式**.

8.4.3　Kähler 流形上的曲率张量的局部坐标表达式

本小节的目的是在局部坐标系下给出 Kähler 流形上的 Hermite 联络的曲率形式用黎曼曲率张量表示的表达式.

设 $(U;z^i)$ 是 Kähler 流形 (M,h) 的一个局部复坐标系, $z^i=x^i+\sqrt{-1}\,y^i$. 记 $\bar{i}=n+i$, $x^{\bar{i}}=y^i$. 用 ω_i^j 表示 (M,h) 上的 Hermite 联络 D 关于标架场 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial z^i}\right\}$ 的联络形式, 即 $\mathrm{D}\dfrac{\partial}{\partial z^i}=\omega_i^j\dfrac{\partial}{\partial z^j}$. 把 ω_i^j 分解为实部和虚部

$$\omega_i^j=\theta_i^j+\sqrt{-1}\,\theta_i^{\bar{j}},$$

并且令

$$\theta_{\bar i}^{\bar j} = \theta_i^j, \quad \theta_{\bar i}^j = -\theta_i^{\bar j},$$

则 θ_α^β $(1 \le \alpha, \beta \le 2n)$ 是黎曼联络 D 的联络形式，即

$$\mathrm{D}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \theta_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}, \quad 1 \le \alpha \le 2n.$$

令

$$\Omega_i^j = \mathrm{d}\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \quad \Theta_\alpha^\beta = \mathrm{d}\theta_\alpha^\beta - \theta_\alpha^\gamma \wedge \theta_\gamma^\beta. \tag{4.13}$$

则 Θ_α^β 是黎曼流形 (M,g) 的曲率形式. 将 ω_i^j 的分解式代入 Ω_i^j 得到

$$\Omega_i^j = \Theta_i^j + \sqrt{-1}\,\Theta_i^{\bar j}, \tag{4.14}$$

且有

$$\Theta_{\bar i}^{\bar j} = \Theta_i^j, \quad \Theta_{\bar i}^j = -\Theta_i^{\bar j}. \tag{4.15}$$

根据第四章的定理 2.1,

$$\Theta_\alpha^\beta = \frac{1}{2} R_{\alpha\gamma\delta}^\beta \mathrm{d}x^\gamma \wedge \mathrm{d}x^\delta, \tag{4.16}$$

其中 $R_{\alpha\gamma\delta}^\beta$ 是黎曼流形 (M,g) 的曲率张量，即有

$$R_{\alpha\gamma\delta}^\beta = \mathrm{d}x^\beta\left(\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^\gamma}, \frac{\partial}{\partial x^\delta}\right)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right). \tag{4.17}$$

由 (4.15) 式得

$$R_{\bar i\gamma\delta}^{\bar j} = R_{i\gamma\delta}^j, \quad R_{\bar i\gamma\delta}^j = -R_{i\gamma\delta}^{\bar j}. \tag{4.18}$$

另外，从定理 4.4 的 (2) 可得

$$R_{\alpha\bar i\bar j}^\beta = R_{\alpha ij}^\beta, \quad R_{\alpha\bar i j}^\beta = -R_{\alpha i\bar j}^\beta. \tag{4.19}$$

另一方面，经过直接计算得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z^j} \\
&= (\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j + \mathrm{d}y^i \wedge \mathrm{d}y^j) + \sqrt{-1}\,(-\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}y^j + \mathrm{d}y^i \wedge \mathrm{d}x^j),
\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j + \mathrm{d}y^i \wedge \mathrm{d}y^j &= \frac{1}{2}(\mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z^j} + \mathrm{d}\overline{z^i} \wedge \mathrm{d}z^j), \\
-\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}y^j + \mathrm{d}y^i \wedge \mathrm{d}x^j &= -\frac{\sqrt{-1}}{2}(\mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z^j} - \mathrm{d}\overline{z^i} \wedge \mathrm{d}z^j).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

把 (4.16) 代入 (4.14) 式，并利用 (4.20) 式得到

$$\begin{aligned}
\Omega_i^j &= \frac{1}{2}(R_{i\gamma\delta}^j + \sqrt{-1}\,R_{i\gamma\delta}^{\bar j})\mathrm{d}x^\gamma \wedge \mathrm{d}x^\delta \\
&= \frac{1}{2}(R_{ikl}^j + \sqrt{-1}\,R_{ikl}^{\bar j})(\mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^l + \mathrm{d}y^k \wedge \mathrm{d}y^l) \\
&\quad + \frac{1}{2}(R_{ik\bar l}^j + \sqrt{-1}\,R_{ik\bar l}^{\bar j})(\mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}y^l - \mathrm{d}y^k \wedge \mathrm{d}x^l) \\
&= \frac{1}{2}((R_{ikl}^j + R_{i\bar k l}^{\bar j}) + \sqrt{-1}\,(R_{ik\bar l}^j + R_{i\bar k\bar l}^{\bar j}))\mathrm{d}z^k \wedge \mathrm{d}\overline{z^l}.
\end{aligned}$$

令

$$K_{ikl}^j = (R_{ikl}^j + R_{i\bar k l}^{\bar j}) + \sqrt{-1}\,(R_{ik\bar l}^j + R_{i\bar k\bar l}^{\bar j}), \tag{4.21}$$

则有

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2} K_{ikl}^j \mathrm{d}z^k \wedge \mathrm{d}\overline{z^l}. \tag{4.22}$$

注记 4.1　记号 K_{ikl}^j 有几何意义. 首先，把曲率张量 $\mathcal{R}$ 作复线性扩张成为复化切空间上的线性函数，那么利用 (4.18), (4.19) 两式不难得到

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \overline{z^l}}\right)\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2}K_{ikl}^j \frac{\partial}{\partial z^j}, \tag{4.23}$$

其中 $\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \overline{z^l}}$ 是复化切向量 (参看 (2.4) 式). 这说明 $\frac{1}{2}K_{ikl}^j$ 是复线性变换 $\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \overline{z^l}}\right): T_p^h M \to T_p^h M, p \in M$ 在自然基底 $\frac{\partial}{\partial z^i}$ 下的矩阵.

命 $K_{ijkl} = h_{pj}K_{ikl}^p$, 则 $K_{ikl}^j = h^{jp}K_{ipkl}$, 并且

$$h\left(\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \overline{z^l}}\right)\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right) = \frac{1}{2}K_{ijkl}.$$

利用 $g_{\bar{i}j} = -g_{i\bar{j}}$, $g_{\bar{i}\bar{j}} = g_{ij}$, 可以算得

$$K_{ijkl} = (R_{ijkl} - R_{\bar{i}jk\bar{l}}) + \sqrt{-1}\,(R_{i\bar{j}kl} + R_{ijk\bar{l}}). \tag{4.24}$$

注记 4.2 容易证明:

$$K^j_{ikl} = K^j_{kil}. \tag{4.25}$$

事实上, 反复利用 Bianchi 恒等式, 黎曼曲率张量的对称性和 (4.18), (4.19) 式得到

$$\begin{aligned} K^j_{ikl} =&(R^j_{ikl} + R^{\bar{j}}_{\bar{i}kl}) + \sqrt{-1}\,(R^j_{ik\bar{l}} + R^{\bar{j}}_{ik\bar{l}}) \\ =&(-R^j_{kli} - R^j_{lik} + R^{\bar{j}}_{\bar{i}kl}) + \sqrt{-1}\,(-R^j_{k\bar{l}i} - R^j_{\bar{l}ik} + R^{\bar{j}}_{\bar{i}k\bar{l}}) \\ =&K^j_{kil} + (-R^{\bar{j}}_{k\bar{i}l} - R^j_{lik} + R^{\bar{j}}_{\bar{i}kl}) + \sqrt{-1}\,(-R^{\bar{j}}_{k\bar{i}\bar{l}} - R^j_{\bar{l}ik} + R^{\bar{j}}_{\bar{i}k\bar{l}}) \\ =&K^j_{kil} + (-R^{\bar{j}}_{\bar{l}ki} - R^j_{lik}) + \sqrt{-1}\,(R^{\bar{j}}_{lki} - R^j_{\bar{l}ik}) = K^j_{kil}. \end{aligned}$$

注记 4.3 顺便能够得到 K^j_{ikl} 用 h_{ij} 表示的表达式. 由于

$$\omega^j_i = h^{jk}\frac{\partial h_{ik}}{\partial z^l}\mathrm{d}z^l,$$

故

$$\begin{aligned} \Omega^j_i =&\mathrm{d}\omega^j_i - \omega^k_i \wedge \omega^j_k \\ =&\left(\frac{\partial h^{jk}}{\partial z^p}\mathrm{d}z^p + \frac{\partial h^{jk}}{\partial \overline{z^p}}\mathrm{d}\overline{z^p}\right) \wedge \frac{\partial h_{ik}}{\partial z^l}\mathrm{d}z^l + h^{jk}\left(\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial z^p \partial z^l}\mathrm{d}z^p\right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial \overline{z^p}\partial z^l}\mathrm{d}\overline{z^p}\right) \wedge \mathrm{d}z^l - h^{kp}\frac{\partial h_{ip}}{\partial z^r}\mathrm{d}z^r \wedge h^{jq}\frac{\partial h_{kq}}{\partial z^l}\mathrm{d}z^l \\ =&\left(\frac{\partial h^{jp}}{\partial \overline{z^k}}\frac{\partial h_{ip}}{\partial z^l} + h^{jp}\frac{\partial^2 h_{ip}}{\partial \overline{z^k}\partial z^l}\right)\mathrm{d}\overline{z^k} \wedge \mathrm{d}z^l \\ =&\frac{\partial}{\partial \overline{z^k}}\left(h^{jp}\frac{\partial h_{ip}}{\partial z^l}\right)\mathrm{d}\overline{z^k} \wedge \mathrm{d}z^l. \end{aligned}$$

将上式与 (4.22) 式相对照得到

$$K^j_{ikl} = -2\frac{\partial}{\partial \overline{z^l}}\left(h^{jp}\frac{\partial h_{ip}}{\partial z^k}\right). \tag{4.26}$$

由于 (M, h) 是 Kähler 流形, 故由 (2.46) 式也能得到

$$K^j_{ikl} = -2\frac{\partial}{\partial \overline{z^l}}\left(h^{jp}\frac{\partial h_{ip}}{\partial z^k}\right) = -2\frac{\partial}{\partial \overline{z^l}}\left(h^{jp}\frac{\partial h_{kp}}{\partial z^i}\right) = K^j_{kil}.$$

8.4.4 Ricci 形式

根据定义 (第四章的 (4.2) 式), Ricci 曲率张量的分量为

$$R_{\alpha\beta} = \sum_\gamma R^\gamma_{\alpha\gamma\beta} = \sum_k R^k_{\alpha k\beta} + \sum_k R^{\bar{k}}_{\alpha\bar{k}\beta}. \tag{4.27}$$

利用 (4.18) 和 (4.19) 两式得到

$$R_{\bar{i}\bar{j}} = R_{ij}, \quad R_{\bar{i}j} = -R_{i\bar{j}}. \tag{4.28}$$

由此可知, Ricci 曲率张量的表达式是

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric} =& \sum_{\alpha,\beta} R_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \otimes \mathrm{d}x^\beta \\ =& \sum_{i,j} R_{ij}(\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j + \mathrm{d}y^i \otimes \mathrm{d}y^j) + \sum_{i,j} R_{i\bar{j}}(\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}y^j - \mathrm{d}y^i \otimes \mathrm{d}x^j). \end{aligned}$$

于是由 Ricci 形式 ρ 的定义式 (4.12) 以及典型复结构 J 在余标架场上作用的公式 $J(\mathrm{d}x^i) = -\mathrm{d}y^i, J(\mathrm{d}y^i) = \mathrm{d}x^i$ 得到

$$\begin{aligned} \rho =& \sum_{\alpha,\beta} R_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \otimes J(\mathrm{d}x^\beta) \\ =& \sum_{i,j} R_{ij}(-\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}y^j + \mathrm{d}y^i \otimes \mathrm{d}x^j) + \sum_{i,j} R_{i\bar{j}}(\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j + \mathrm{d}y^i \otimes \mathrm{d}y^j) \\ =& \sum_{i,j} R_{ij}\mathrm{d}y^i \wedge \mathrm{d}x^j + \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{i\bar{j}}(\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j + \mathrm{d}y^i \wedge \mathrm{d}y^j) \\ =& \frac{1}{2}\sum_{i,j}(R_{ij}(-\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}y^j + \mathrm{d}y^i \wedge \mathrm{d}x^j) + R_{i\bar{j}}(\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j + \mathrm{d}y^i \wedge \mathrm{d}y^j)). \end{aligned}$$

将 (4.20) 式代入便得到

$$\rho = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i,j}(R_{ij} + \sqrt{-1}\,R_{i\bar{j}})\mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z^j}. \tag{4.29}$$

从 K^j_{ikl} 的表达式 (4.21) 以及 (4.25) 式得到

$$\sum_k K^k_{kij} = \sum_k K^k_{ikj} = R_{ij} + \sqrt{-1}\,R_{i\bar{j}}.$$

于是由 (4.22) 式得到

$$\rho = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i,j,k} K^k_{kij}\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}\overline{z^j} = -\sqrt{-1}\sum_i \Omega^i_i. \tag{4.30}$$

(4.30) 式也能够从定理 4.5 的 (2) 得到. 根据表达式 (4.30) 容易证明下面的重要结论:

定理 4.6 设 (M,h) 是 n 维 Kähler 流形, 则它的 Ricci 形式 ρ 是闭的 2 次外微分式.

证明 对曲率形式 Ω^j_i 的定义式 (4.13) 求外微分得到 (第二个)Bianchi 恒等式

$$\mathrm{d}\Omega^j_i = \omega^k_i\wedge\Omega^j_k - \Omega^k_i\wedge\omega^j_k.$$

将上式关于指标 i,j 进行缩并便得

$$\mathrm{d}\rho = -\sqrt{-1}\sum_i \mathrm{d}\Omega^i_i = -\sqrt{-1}\,(\omega^k_i\wedge\Omega^i_k - \Omega^k_i\wedge\omega^i_k) = 0.$$

定理证毕.

定理 4.7 设 (M,h) 是 n 维 Kähler 流形, 在复坐标系 $(U;z^i)$ 下, 令 $h_{i\bar{j}} = h\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial \overline{z^j}}\right)$, 则 Ricci 形式为

$$\rho = \sqrt{-1}\,\frac{\partial^2\ln H}{\partial z^i\partial\overline{z^j}}\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}\overline{z^j}, \tag{4.31}$$

其中 $H = \det(h_{i\bar{j}})$.

证明 由曲率形式的定义得到 $\sum_i\Omega^i_i = \sum_i \mathrm{d}\omega^i_i$. 根据 (3.29) 式,

$$\sum_i \omega^i_i = h^{i\bar{k}}\frac{\partial h_{i\bar{k}}}{\partial z^j}\mathrm{d}z^j = \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial z^i}\mathrm{d}z^i = \frac{\partial\ln H}{\partial z^i}\mathrm{d}z^i.$$

因此, 由 (4.30) 式

$$\begin{aligned}\rho &= -\sqrt{-1}\sum_i\Omega^i_i = -\sqrt{-1}\sum_i\mathrm{d}\omega^i_i\\ &= -\sqrt{-1}\sum_{i,j}\frac{\partial^2\ln H}{\partial\overline{z^j}\partial z^i}\mathrm{d}\overline{z^j}\wedge\mathrm{d}z^i\\ &= \sqrt{-1}\sum_{i,j}\frac{\partial^2\ln H}{\partial z^i\partial\overline{z^j}}\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}\overline{z^j}.\end{aligned}$$

定理证毕.

注记 4.4 Ricci 形式 ρ 和 Kähler 形式 k 都是闭的 2 次外微分式. ρ 的表达式 (4.31) 启示我们去寻找 k 的类似表达式. 首先, 对于复流形上的外微分算子 d 作一些说明. 设 f 是复流形 M 上的复数值光滑函数, 则有

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z^i}\mathrm{d}z^i + \frac{\partial f}{\partial\overline{z^i}}\mathrm{d}\overline{z^i}.$$

命

$$\partial = \mathrm{d}z^i\frac{\partial}{\partial z^i},\qquad \overline{\partial} = \mathrm{d}\overline{z^i}\frac{\partial}{\partial\overline{z^i}},$$

则

$$\mathrm{d} = \partial + \overline{\partial}, \tag{4.32}$$

于是 $\mathrm{d}f = \partial f + \overline{\partial} f$. 一般地, 外微分算子 d 在外微分式上的作用也能分解成 (4.32) 式. 特别地,

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(\partial f + \overline{\partial} f) = \partial\partial f + (\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial)f + \overline{\partial}\,\overline{\partial} f = 0,$$

由于 $\partial\partial f, (\partial\overline{\partial}+\overline{\partial}\partial)f, \overline{\partial}\,\overline{\partial} f$ 分别是 (2,0)-微分式, (1,1)-微分式和 (0,2)-微分式, 所以它们必须分别为零, 故有

$$\partial\partial f = 0,\quad (\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial)f = 0,\quad \overline{\partial}\,\overline{\partial} f = 0. \tag{4.33}$$

上式对于任意的外微分式也成立.

现在要证明：在 Kähler 流形上存在局部定义的实值光滑函数 F, 使得

$$k=\sqrt{-1}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 F}{\partial z^i\partial\overline{z^j}}\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}\overline{z^j}. \tag{4.34}$$

事实上，因为 k 是实值闭微分式，根据 Poincaré 引理，对于任意一点 $p\in M$, 都有一个局部复坐标系 $(U;z^i)$ 以及 U 上的实值 1 次微分式 α, 使得 $k=\mathrm{d}\alpha$. 设

$$\alpha=\alpha'+\alpha'',\quad \alpha'\in A^{(1,0)}(U),\quad \alpha''\in A^{(0,1)}(U).$$

因为 α 是实值微分式，故有 $\alpha''=\overline{\alpha'}$. 于是

$$k=\mathrm{d}\alpha=\partial\alpha+\overline{\partial}\alpha=\partial\alpha'+(\overline{\partial}\alpha'+\partial\alpha'')+\overline{\partial}\alpha''.$$

因为 k 是 (1,1)-微分式，而 $\partial\alpha',\overline{\partial}\alpha''$ 分别是 (2,0)-微分式和 (0,2)-微分式，所以

$$\partial\alpha'=0,\quad \overline{\partial}\alpha''=0.$$

根据 Dolbeault-Grothendieck 引理 (参看参考文献 [16, §3, 定理 E]), 存在局部定义的复值光滑函数 u, 使得

$$\alpha''=\overline{\partial}u=\frac{\partial u}{\partial\overline{z^i}}\mathrm{d}\overline{z^i},\quad \alpha'=\overline{\alpha''}=\frac{\partial\overline{u}}{\partial z^i}\mathrm{d}z^i.$$

因此

$$\begin{aligned}k&=\overline{\partial}\alpha'+\partial\alpha''\\&=\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\overline{z^j}\partial z^i}\mathrm{d}\overline{z^j}\wedge\mathrm{d}z^i+\frac{\partial^2 u}{\partial z^i\partial\overline{z^j}}\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}\overline{z^j}\\&=\frac{\partial^2(u-\overline{u})}{\partial z^i\partial\overline{z^j}}\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}\overline{z^j}.\end{aligned}$$

定义实值光滑函数 F 为

$$F=-\sqrt{-1}\,(u-\overline{u}),$$

则得 (4.34) 式.

比较 (4.34) 和 (2.44) 式可知

$$h_{ij}=h\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial z^j}\right)=-2\frac{\partial^2 F}{\partial z^i\partial\overline{z^j}}.$$

于是，Hermite 内积可以表示为

$$h=-2\frac{\partial^2 F}{\partial z^i\partial\overline{z^j}}\mathrm{d}z^i\otimes\mathrm{d}\overline{z^j}. \tag{4.35}$$

反过来，对于任意的实值光滑函数 $F\in C^\infty(M)$, 只要由

$$h_{ij}=-2\frac{\partial^2 F}{\partial z^i\partial\overline{z^j}}$$

构成的矩阵是处处正定的，则 $h=h_{ij}\mathrm{d}z^i\otimes\mathrm{d}\overline{z^j}$ 与局部复坐标系 $(U;z^i)$ 的选取无关，因而给出了 M 上的一个 Hermite 结构. 显然，上述定义的 h_{ij} 满足 (2.46) 式，因而相应的 Hermite 流形是 Kähler 流形. 这个事实在构造 Kähler 流形的例子时很有用处.

§8.5 全纯截面曲率

8.5.1 全纯截面曲率的定义和局部坐标表达式

在本节，首先给出在 Kähler 流形上全纯截面曲率的定义，然后讨论 Kähler 流形具有常全纯截面曲率的条件.

定义 5.1 设 (M,h) 是 n 维 Kähler 流形，对于任意的点 $p\in M$, $X\in T_pM$, 沿二维截面 $[X\wedge JX]$ 的截面曲率 $K(X)\equiv K(X,JX)$ 称为 Kähler 流形 (M,h) 在点 p 沿方向 X 的 **全纯截面曲率**; 相应的二维截面 $[X\wedge JX]$ 称为 M 在点 p 的一个二维 **全纯截面**.

由于 $JX\perp X$, $g(X,X)g(JX,JX)-(g(X,JX))^2=(g(X,X))^2$, 故全纯截面曲率的定义式为

$$K(X)=-\frac{R(X,JX,X,JX)}{g(X,X)^2}. \tag{5.1}$$

注记 5.1 在近 Hermite 流形 (M,J,h) 上同样能够定义在点 p 沿方向 X 的全纯截面曲率 $K(X)=K(X,JX)$. 这里的截面曲率 K 是关于 (M,J,h) 的黎曼联络定义的.

命题 5.1 设 (M,h) 是 n 维 Kähler 流形，$p\in M$, $(U;z^i)$ 是点 p 的复坐标系，$z^i=x^i+\sqrt{-1}y^i$. 则在 p 点对于任意一个非零切向量 $X=X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}+X^{\bar i}\dfrac{\partial}{\partial y^i}\in T_pM$ 的全纯截面曲率是

$$K(X)=\frac{K_{i\bar j k\bar l}Z^i\overline{Z^j}Z^k\overline{Z^l}}{(h_{i\bar j}Z^i\overline{Z^j})^2}, \tag{5.2}$$

其中 $Z^i=X^i+\sqrt{-1}X^{\bar i}$.

证明 将 $R(X,Y,Z,W)=g(\mathcal{R}(Z,W)X,Y)$ 作复线性扩张，使得 $R:(T_pM)^{\mathbb C}\times(T_pM)^{\mathbb C}\times(T_pM)^{\mathbb C}\times(T_pM)^{\mathbb C}\to\mathbb C$ $(\forall p\in M)$ 成为四重复线性函数，它仍然满足黎曼曲率张量的对称性质 (即引理 5.2 中的条件 (1)~(3)). 同样地，让黎曼度量也作复线性扩张. 对于 $X\in T_pM$, 命

$$Z=\frac12(X-\sqrt{-1}JX)\in T_p^{(1,0)}M, \tag{5.3}$$

则当 $X=X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}+X^{\bar i}\dfrac{\partial}{\partial y^i}$ 时，$Z=(X^i+\sqrt{-1}X^{\bar i})\dfrac{\partial}{\partial z^i}=Z^i\dfrac{\partial}{\partial z^i}$. 由 Z 的定义得到

$$X=Z+\bar Z,\qquad JX=\sqrt{-1}(Z-\bar Z), \tag{5.4}$$

所以

$$\begin{aligned}g(X,X)&=g(Z+\bar Z,Z+\bar Z)\\&=g(Z,Z)+2g(Z,\bar Z)+g(\bar Z,\bar Z).\end{aligned}$$

由 g 的 J-不变性 (参看 (2.35) 式) 得到

$$g\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial z^j}\right)=\frac14 g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}-\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial x^j}-\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^j}\right)$$

$$=\frac14\left(g_{ij}-\sqrt{-1}g_{\bar i j}-\sqrt{-1}g_{i\bar j}-g_{\bar i\bar j}\right)=0,$$

因此

$$g(Z,Z)=Z^iZ^jg\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial z^j}\right)=0.$$

同理

$$g\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z^i}},\frac{\partial}{\partial \overline{z^j}}\right)=0,\quad g(\bar Z,\bar Z)=0.$$

此外，

$$\begin{aligned}g\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial \overline{z^j}}\right)&=\frac14 g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}-\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial x^j}+\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^j}\right)\\&=\frac14\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)+g\left(\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right)\right)\\&\quad+\frac{\sqrt{-1}}{4}\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right)-g\left(\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)\\&=\frac14(g_{ij}+g_{\bar i\bar j})+\frac{\sqrt{-1}}{4}(g_{i\bar j}-g_{\bar i j})\\&=\frac12(g_{ij}+\sqrt{-1}g_{i\bar j})=\frac12 h_{ij}.\end{aligned}$$

因此

$$g(Z,\bar Z)=Z^i\overline{Z^j}g\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial \overline{z^j}}\right)=\frac12 h_{ij}Z^i\overline{Z^j}, \tag{5.5}$$

故

$$g(X,X)=h_{ij}Z^i\overline{Z^j}=h(Z,Z). \tag{5.6}$$

另一方面，利用黎曼曲率张量的对称性质得到

$$\begin{aligned}&R(X,JX,X,JX)\\&=-R(Z+\bar Z,Z-\bar Z,Z+\bar Z,Z-\bar Z)\\&=-4R(Z,\bar Z,Z,\bar Z)\\&=-4Z^i\overline{Z^j}Z^k\overline{Z^l}R\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial \overline{z^j}},\frac{\partial}{\partial z^k},\frac{\partial}{\partial \overline{z^l}}\right)\end{aligned}$$

$$= -4Z^i\overline{Z^j}Z^k\overline{Z^l}g\left(\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial z^k},\frac{\partial}{\partial \overline{z^l}}\right)\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial \overline{z^j}}\right).$$

用 (4.23) 式代入，得到

$$\begin{aligned}
&R(X,JX,X,JX)\\
&= -2Z^i\overline{Z^j}Z^k\overline{Z^l}g\left(K^p_{ikl}\frac{\partial}{\partial z^p},\frac{\partial}{\partial \overline{z^j}}\right)\\
&= -2Z^i\overline{Z^j}Z^k\overline{Z^l}K^p_{ikl}g\left(\frac{\partial}{\partial z^p},\frac{\partial}{\partial \overline{z^j}}\right)\\
&= -Z^i\overline{Z^j}Z^k\overline{Z^l}K^p_{ikl}h_{pj} = -K_{ijkl}Z^i\overline{Z^j}Z^k\overline{Z^l}.
\end{aligned}$$

因此

$$K(X) = -\frac{R(X,JX,X,JX)}{g(X,X)^2} = \frac{K_{ijkl}Z^i\overline{Z^j}Z^k\overline{Z^l}}{(h_{ij}Z^i\overline{Z^j})^2}.$$

证毕.

8.5.2 常全纯截面曲率 Kähler 流形

为了进一步讨论全纯截面曲率，需要作一些代数上的准备.

引理 5.2 设 V 是 n 维复向量空间，J 是 V 上的典型复结构，R 是 V 上的四重实线性函数，满足下列条件:

(1) $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W) = -R(X,Y,W,Z)$;

(2) $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$;

(3) $R(X,Y,Z,W) + R(Z,Y,W,X) + R(W,Y,X,Z) = 0$;

(4) $R(JX,JY,Z,W) = R(X,Y,JZ,JW) = R(X,Y,Z,W)$.

如果 T 是 V 上另一个满足上述条件的四重实线性函数，并且对于任意的 $X\in V$ 有

$$R(X,JX,X,JX) = T(X,JX,X,JX), \tag{5.7}$$

则必有 $R = T$.

在实向量空间的情形下有类似的结果 (参看第四章的引理 3.1). 引理中的前三个条件说明 R 是曲率型张量，条件 (4) 则是 Kähler 流形的黎曼曲率张量的特有性质 (参看定理 4.4).

证明 不妨假定 $T=0$, 于是只要证明当 R 满足条件 $R(X,JX,X,JX)=0, \forall X\in V$ 时必有 $R=0$ 即可. 首先，把函数 $R(X,JY,Z,JW)$ 关于自变量 X,Y,Z,W 作对称化. 利用 R 所满足的条件 (1)~(4) 不难验证:

$$\begin{aligned}
&Q(X,Y,Z,W)\\
&=R(X,JY,Z,JW)+R(X,JZ,Y,JW)+R(X,JW,Y,JZ)
\end{aligned} \tag{5.8}$$

关于 X,Y,Z,W 是对称的. 根据假设

$$Q(X,X,X,X) = 3R(X,JX,X,JX) = 0, \quad \forall X\in V. \tag{5.9}$$

因此，根据 Q 的对称性容易证明

$$Q(X,Y,Z,W) = 0, \quad \forall X,Y,Z,W\in V. \tag{5.10}$$

实际上，由假设 (5.9) 得到，对于任意的 $X,Y\in V$ 和 $t\in\mathbb{R}$ 有

$$Q(X+tY,X+tY,X+tY,X+tY) = 0,$$

将它按照 t 展开得到

$$t(t^2Q(X,Y,Y,Y)+2tQ(X,X,Y,Y)+Q(X,X,X,Y)) = 0, \quad \forall t.$$

因此

$$Q(X,Y,Y,Y) = Q(X,X,X,Y) = Q(X,X,Y,Y) = 0.$$

再用 $X+tZ, Y+tW$ 代入上式，并且按照 t 展开便可得到 (5.10) 式.

在 (5.8) 式中令 $Z=X$, $W=Y$, 得

$$2R(X,JY,X,JY) + R(X,JX,Y,JY) = 0. \tag{5.11}$$

利用条件 (3), (1) 和 (4) 得到

$$R(X,JX,Y,JY) = -R(Y,JX,JY,X) - R(JY,JX,X,Y)$$
$$= R(X,Y,X,Y) + R(X,JY,X,JY).$$

代入 (5.11) 式得

$$3R(X,JY,X,JY) + R(X,Y,X,Y) = 0. \tag{5.12}$$

用 JY 代替上式中的 Y 得

$$3R(X,Y,X,Y) + R(X,JY,X,JY) = 0. \tag{5.13}$$

联合 (5.12) 和 (5.13) 两式得知

$$R(X,Y,X,Y) = 0, \quad \forall X,Y \in V.$$

根据第四章的引理 3.1, $R = 0$.

十分幸运的是，借助于 J-不变黎曼度量能够构造出满足引理 5.2 的各个条件的四重实线性函数 R_0. 具体的作法如下：假设 g 是 V 上的一个 J-不变黎曼度量．对于任意的 $X,Y,Z,W \in V$, 定义

$$r(X,Y,Z,W) = g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z),$$

则 r 满足条件 (1), (2) 和 (3)(参看第四章定理 3.2 的证明), 并且满足

$$r(JX,JY,Z,W) = r(X,Y,JZ,JW),$$
$$r(JX,JY,JZ,JW) = r(X,Y,Z,W).$$

再令

$$\tilde{r}(X,Y,Z,W) = r(X,Y,Z,W) + r(X,Y,JZ,JW),$$

则 $\tilde{r}$ 满足条件 (1), (2) 和 (4), 但是 $\tilde{r}$ 未必满足条件 (3).

经直接计算得到

$$\tilde{r}(X,Y,Z,W) + \tilde{r}(Z,Y,W,X) + \tilde{r}(W,Y,X,Z)$$
$$= r(X,Y,JZ,JW) + r(Z,Y,JW,JX) + r(W,Y,JX,JZ)$$
$$= -2(g(X,JY)g(Z,JW) + g(Z,JY)g(W,JX)$$
$$+ g(W,JY)g(X,JZ)).$$

容易验证，$g(X,JY)g(Z,JW)$ 恰好满足引理 5.2 的条件 (1), (2) 和 (4). 因此，如果令

$$R_0(X,Y,Z,W) = \tilde{r}(X,Y,Z,W) + 2g(X,JY)g(Z,JW),$$

则 R_0 满足引理 5.2 的条件 (1)~(4). 将 $\tilde{r}(X,Y,Z,W)$ 的表达式代入 R_0 便得到

$$R_0(X,Y,Z,W)$$
$$= g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z)$$
$$+ g(X,JZ)g(Y,JW) - g(X,JW)g(Y,JZ)$$
$$+ 2g(X,JY)g(Z,JW). \tag{5.14}$$

这就是满足引理 5.2 的条件的四重实线性函数．由表达式 (5.14) 式得到

$$\begin{aligned} &R_0(X,Y,X,Y) = g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2 + 3g(X,JY)^2, \\ &R_0(X,JX,X,JX) = 4(g(X,X))^2. \end{aligned} \tag{5.15}$$

引理证毕.

现在回到 Kähler 流形上来.

定义 5.2 设 (M,h) 是 n 维 Kähler 流形．如果对于所有的点 $p \in M$ 以及所有的切向量 $X \in T_pM$, 沿 X 的全纯截面曲率 $K(X)$ 都等于常值 c, 则称 (M,h) 是**具有常全纯截面曲率 c 的 Kähler 流形**，简称为**常全纯曲率空间**.

从引理 5.2 和 (5.15) 式不难得知

定理 5.3　Kähler 流形 (M,h) 具有常全纯截面曲率 c, 当且仅当它的曲率张量是

$$
\begin{aligned}
&R(X,Y,Z,W)\\
&=-\frac{c}{4}R_0(X,Y,Z,W)\\
&=-\frac{c}{4}(g(X,Z)g(Y,W)-g(X,W)g(Y,Z)\\
&\quad+g(X,JZ)g(Y,JW)-g(X,JW)g(Y,JZ)\\
&\quad+2g(X,JY)g(Z,JW)),\quad \forall X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M).
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

如果 X,Y 是 M 在点 p 处的任意两个彼此正交的单位切向量, 则沿二维截面 $[X\wedge Y]$ 的截面曲率是

$$
K(X,Y)=-R(X,Y,X,Y)=\frac{c}{4}(1+3\cos^2\alpha),\tag{5.17}
$$

其中 $\alpha=\angle(X,JY)$. 由此可见, 常全纯曲率空间未必具有常截面曲率. 但是, 下面的定理成立:

定理 5.4　常全纯截面曲率的 Kähler 流形的 Ricci 曲率必是常数, 因而是 Einstein 流形.

证明　事实上, 对于任意取定的的单位切向量 $X\in T_pM$, 取 T_pM 的单位正交基底 $\{e_i,Je_i\}$, 使得 $e_1=X$, 那么

$$
\mathrm{Ric}(X)=\sum_{i=2}^{n}K(e_1,e_i)+\sum_{i=1}^{n}K(e_1,Je_i).
$$

当 $i\geq 2$ 时, $e_1\perp e_i$, $e_1\perp Je_i$, 故由 (5.17) 式得到

$$
\mathrm{Ric}(X)=\frac{c}{4}\cdot 2(n-1)+c=\frac{n+1}{2}c.\tag{5.18}
$$

证毕.

作为本节的结束, 我们用曲率张量在局部复坐标系下的分量来刻画常全纯曲率空间的特征.

定理 5.5　Kähler 流形 (M,h) 具有常全纯截面曲率 c 的充分必要条件是在任意一个局部复坐标系 $(U;z^i)$ 下有

$$
K^j_{ikl}=\frac{c}{2}(\delta^j_i h_{kl}+\delta^j_k h_{il}),\tag{5.19}
$$

其中 $h_{ij}=h\left(\dfrac{\partial}{\partial z^i},\dfrac{\partial}{\partial z^j}\right)$.

证明　由命题 5.1 得知充分性是显然的, 在此只要证明必要性.

当 Kähler 流形 (M,h) 具有常全纯截面曲率 c 时, 它的黎曼曲率张量由 (5.12) 式给出. 设 $z^i=x^i+\sqrt{-1}y^i$, 则

$$
\begin{aligned}
R_{ijkl}=&R\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\\
=&-\frac{c}{4}R_0\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\\
=&\frac{c}{4}\left\{g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},J\frac{\partial}{\partial x^l}\right)g\left(\frac{\partial}{\partial x^j},J\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right.\\
&+g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^l}\right)g\left(\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\\
&-g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},J\frac{\partial}{\partial x^k}\right)g\left(\frac{\partial}{\partial x^j},J\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\\
&-g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^k}\right)g\left(\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\\
&\left.-2g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},J\frac{\partial}{\partial x^j}\right)g\left(\frac{\partial}{\partial x^k},J\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\right\}\\
=&\frac{c}{4}(g_{i\bar l}g_{j\bar k}+g_{il}g_{jk}-g_{i\bar k}g_{j\bar l}-g_{ik}g_{jl}-2g_{i\bar j}g_{k\bar l}).
\end{aligned}
$$

同理可得

$$
\begin{aligned}
R_{i\bar jk\bar l}=&\frac{c}{4}(-g_{il}g_{\bar j\bar k}+g_{i\bar l}g_{\bar jk}+g_{i\bar k}g_{\bar jl}-g_{ik}g_{\bar j\bar l}-2g_{i\bar j}g_{kl}),\\
R_{i\bar jkl}=&\frac{c}{4}(g_{i\bar l}g_{\bar j\bar k}+g_{il}g_{\bar jk}-g_{i\bar k}g_{\bar j\bar l}-g_{ik}g_{\bar jl}+2g_{i\bar j}g_{k\bar l}),\\
R_{ijk\bar l}=&\frac{c}{4}(-g_{il}g_{j\bar k}+g_{i\bar l}g_{jk}+g_{i\bar k}g_{jl}-g_{ik}g_{j\bar l}+2g_{i\bar j}g_{kl}).
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
K_{ijkl} =&(R_{ijkl} - R_{i\bar{j}k\bar{l}}) + \sqrt{-1}\,(R_{i\bar{j}kl} + R_{ijk\bar{l}})\\
=&\frac{c}{2}(g_{i\bar{l}}g_{j\bar{k}} + g_{il}g_{jk} + g_{ij}g_{kl} - g_{i\bar{j}}g_{k\bar{l}})\\
&+ \frac{c}{2}\sqrt{-1}\,(g_{i\bar{l}}g_{jk} + g_{il}g_{\bar{j}k} + g_{ij}g_{k\bar{l}} + g_{i\bar{j}}g_{kl})\\
=&\frac{c}{2}\{(g_{ij}g_{kl} - g_{i\bar{j}}g_{k\bar{l}} + g_{il}g_{kj} - g_{i\bar{l}}g_{k\bar{j}})\\
&+ \sqrt{-1}\,(g_{ij}g_{k\bar{l}} + g_{i\bar{j}}g_{kl} + g_{il}g_{k\bar{j}} + g_{i\bar{l}}g_{kj})\}.
\end{aligned}
$$

另一方面，因为 $h_{ij} = g_{ij} + \sqrt{-1}\,g_{i\bar{j}}$, 所以

$$
\begin{aligned}
&h_{ij}h_{kl} + h_{il}h_{kj}\\
&=(g_{ij} + \sqrt{-1}\,g_{i\bar{j}})(g_{kl} + \sqrt{-1}\,g_{k\bar{l}})\\
&\quad + (g_{il} + \sqrt{-1}\,g_{i\bar{l}})(g_{kj} + \sqrt{-1}\,g_{k\bar{j}})\\
&=g_{ij}g_{kl} - g_{i\bar{j}}g_{k\bar{l}} + g_{il}g_{kj} - g_{i\bar{l}}g_{k\bar{j}}\\
&\quad + \sqrt{-1}\,(g_{ij}g_{k\bar{l}} + g_{i\bar{j}}g_{kl} + g_{il}g_{k\bar{j}} + g_{i\bar{l}}g_{kj}).
\end{aligned} \tag{5.20}
$$

因此

$$
K_{ijkl} = \frac{c}{2}(h_{ij}h_{kl} + h_{il}h_{kj}), \quad K^{j}_{ikl} = \frac{c}{2}(\delta^j_i h_{kl} + \delta^j_k h_{il}).
$$

证毕.

推论 5.6 Kähler 流形 (M, h) 具有常全纯截面曲率 c 的充分必要条件是，它在任意一个局部复坐标系 $(U; z^i)$ 下的曲率形式的表达式是

$$
\Omega^j_i = \frac{c}{4}(\delta^j_i h_{kl} + \delta^j_k h_{il})\mathrm{d}z^k \wedge \mathrm{d}\overline{z^l}. \tag{5.21}
$$

8.5.3 Kähler 流形上的酉标架场

我们知道，在 Kähler 流形 (M, h) 上，典型复结构 J 关于黎曼联络 D 是平行的. 所以，在 M 上使用活动标架是比较方便的. 下面的

推导尽管与 §8.4 中在复坐标系下的计算是平行的，但是对于了解和掌握 Kähler 流形的几何是重要的.

设 (M, h) 是一个 n 维 Kähler 流形，则 $g = \mathrm{Re}(h)$ 是切丛 TM 上的 J-不变黎曼度量. 所以，对于任意的 $X \in TM$, 有 $X \perp JX$. 于是，在每一点 $p \in M$ 的一个邻域 U 内必存在单位正交标架场 $\{e_i, Je_i\}$. 记

$$
\bar{i} = n + i, \quad e_{\bar{i}} = Je_i
$$

并用 $\{\theta^\alpha, 1 \le \alpha \le 2n\}$ 表示 $\{e_i, e_{\bar{i}}\}$ 的对偶标架场，那么

$$
J\theta^i = -\theta^{\bar{i}}, \quad J\theta^{\bar{i}} = \theta^i.
$$

如果令

$$
\delta_i = \frac{1}{2}(e_i - \sqrt{-1}\,e_{\bar{i}}), \quad \omega^i = \theta^i + \sqrt{-1}\,\theta^{\bar{i}}, \tag{5.22}
$$

则 $\{\delta_i\}$ 是复向量丛 $T^{(1,0)}M$ 的一个局部标架场，并且以 $\{\omega^i\}$ 为它的对偶标架场. 这时，J-不变黎曼度量 g 具有表达式

$$
g = \sum_{\alpha=1}^{2n} \theta^\alpha \otimes \theta^\alpha; \tag{5.23}
$$

相应的 Kähler 形式为

$$
k = \sum_{\alpha=1}^{2n} \theta^\alpha \otimes J\theta^\alpha = \sum_{i=1}^{n} \theta^{\bar{i}} \wedge \theta^i = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^{n} \omega^i \wedge \overline{\omega^i}. \tag{5.24}
$$

因此，Hermite 内积为

$$
h = g + \sqrt{-1}\,k = \sum_{i=1}^{n} \omega^i \otimes \overline{\omega^i}. \tag{5.25}
$$

显然，$h_{ij} = h(\delta_i, \delta_j) = \delta_{ij}$. 这样的标架场 $\{\delta_i\}$ 称为 (M, h) 上的**酉标架场**，与其对偶的余切标架场 $\{\omega^i\}$ 称为 (M, h) 上的**酉余标架场**.

设 D 是黎曼联络，令

$$
\mathrm{D}e_\alpha = \theta^\beta_\alpha e_\beta. \tag{5.26}
$$

由于在 Kähler 流形上黎曼联络必是复联络 (见推论 4.3), 故有

$$\mathrm{D}(Je_\alpha) = J(\mathrm{D}e_\alpha). \tag{5.27}$$

因此, 联络形式 θ_α^β 满足如下的关系式:

$$\theta_{\bar i}^{\bar j} = \theta_i^j, \quad \theta_i^{\bar j} = -\theta_{\bar i}^j. \tag{5.28}$$

定义

$$\omega_i^j = \theta_i^j + \sqrt{-1}\,\theta_i^{\bar j}, \tag{5.29}$$

则 ω_i^j 是复向量丛 TM 上的复联络 D 在酉标架场 $\{\delta_i\}$ 下的联络形式, 即

$$\mathrm{D}\delta_i = \omega_i^j \delta_j. \tag{5.30}$$

从黎曼联络的性质得到复联络形式 ω_i^j 满足下列条件:

$$\mathrm{d}\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i; \quad \omega_i^j + \overline{\omega_j^i} = 0, \tag{5.31}$$

它们反映了 ω_i^j 的无挠性以及与 Hermite 结构的相容性.

设联络 D 关于标架场 $\{e_\alpha\}$ 的曲率形式是

$$\Theta_\alpha^\beta = \mathrm{d}\theta_\alpha^\beta - \theta_\alpha^\gamma \wedge \theta_\gamma^\beta = \frac{1}{2} R_{\alpha\gamma\delta}^\beta \theta^\gamma \wedge \theta^\delta, \tag{5.32}$$

其中 $R_{\alpha\gamma\delta}^\beta$ 是黎曼流形 (M,g) 曲率张量关于标架场 $\{e_\alpha\}$ 的分量. 由 (5.28) 式可得

$$\Theta_{\bar i}^{\bar j} = \Theta_i^j, \quad \Theta_i^{\bar j} = -\Theta_{\bar i}^j. \tag{5.33}$$

于是

$$R_{\bar i\gamma\delta}^{\bar j} = R_{i\gamma\delta}^j, \quad R_{i\gamma\delta}^{\bar j} = -R_{\bar i\gamma\delta}^j. \tag{5.34}$$

根据定理 4.4

$$R_{\alpha\bar i\bar j}^\beta = R_{\alpha ij}^\beta, \quad R_{\alpha\bar i j}^\beta = -R_{\alpha i\bar j}^\beta. \tag{5.35}$$

复联络形式 ω_i^j 的曲率形式是

$$\Omega_i^j = \mathrm{d}\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \tag{5.36}$$

经直接计算得到

$$\Omega_i^j = \Theta_i^j + \sqrt{-1}\,\Theta_i^{\bar j}. \tag{5.37}$$

因此

$$\Omega_i^j + \overline{\Omega_j^i} = 0. \tag{5.38}$$

把 (5.29) 式代入 (5.37) 式又可得到

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2} K_{ikl}^j \omega^k \wedge \overline{\omega^l}, \tag{5.39}$$

其中

$$K_{ikl}^j = (R_{ikl}^j + R_{i\bar k l}^{\bar j}) + \sqrt{-1}\,(R_{ik\bar l}^j + R_{ikl}^{\bar j}). \tag{5.40}$$

现在, 定理 5.5 可以重新叙述成

定理 5.5′ n 维 Kähler 流形 (M,h) 具有常全纯截面曲率 c 当且仅当对于任意的酉余标架场 $\{\omega^i\}$, 相应的曲率形式是

$$\Omega_i^j = \frac{c}{4}\left(\omega^j \wedge \overline{\omega^i} + \delta_{ij} \sum_k \omega^k \wedge \overline{\omega^k}\right). \tag{5.41}$$

定理的证明留给读者完成.

§8.6 Kähler 流形的例子

在学习了 Kähler 流形的一般理论之后, 下面要介绍一些常见的 Kähler 流形的例子. 一方面要搞清楚它们的复流形结构和 Hermite 结构, 另一方面要计算它们的全纯截面曲率以及 Ricci 形式.

例 6.1 n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$.

设 $\mathbb{C}^n$ 是由有序的 n 个复数组成的数组的全体构成的 n 维复向量空间, 其元素记为 $z = (z^1, \cdots, z^n)$. 令

$$h = \sum_i \mathrm{d}z^i \otimes \mathrm{d}\overline{z^i}, \tag{6.1}$$

则 h 是 $\mathbb{C}^n$ 上的 Hermite 度量，它的实部是

$$g = \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^i + \mathrm{d}y^i \otimes \mathrm{d}y^i),$$

其中 $z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$. 可见，$\mathbb{C}^n$ 作为黎曼流形等同于通常的欧氏空间 $\mathbb{R}^{2n}$, 因而是完备平坦的. $\mathbb{C}^n$ 上的 Kähler 形式是

$$k = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_i \mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z^i} = -\sum_i \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}y^i. \tag{6.2}$$

显然 $\mathrm{d}k = 0$, 因而 $\mathbb{C}^n$ 是一个 Kähler 流形. 因为 $\mathbb{C}^n$ 是平坦的，故 $\mathbb{C}^n$ 的全纯截面曲率恒为零，Ricci 形式也是零.

由 (6.1) 式定义的 Hermite 度量 h 称为 $\mathbb{C}^n$ 上的 **标准 Hermite 度量 (内积)**, 通常记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

例 6.2 复射影空间 $\mathbb{C}P^n$.

设 $\mathbb{C}^{n+1}_* = \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$, 其中 0 表示 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的零向量. $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的标准 Hermite 内积是

$$\langle z, w\rangle = \sum_{\alpha=1}^{n+1} z^\alpha \overline{w^\alpha}, \tag{6.3}$$

其中 $z = (z^1,\cdots,z^{n+1})$, $w = (w^1,\cdots,w^{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$. 在 $\mathbb{C}^{n+1}_*$ 中引入等价关系 $\sim$ 如下：$\forall z, w \in \mathbb{C}^{n+1}_*$, $z \sim w$ 当且仅当存在一个非零复数 λ, 使得 $w = \lambda z$. 用 $[z]$ 表示 $z \in \mathbb{C}^{n+1}_*$ 所在的等价类，令

$$\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1}_*/\sim = \{[z];\ z \in \mathbb{C}^{n+1}_*\},$$

并用 $\pi: \mathbb{C}^{n+1}_* \to \mathbb{C}P^n$ 表示自然投影, 则 $\mathbb{C}P^n$ 相当于 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的一维复子空间的全体所构成的集合. 对于任意的 $z = (z^1,\cdots,z^{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}_*$, $\pi(z) = [z]$ 对应于 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中由非零向量 z 所确定的一维复子空间. 设 $\mathscr{T}$ 是 $\mathbb{C}P^n$ 上的商拓扑，即令

$$\mathscr{T} = \{U \subset \mathbb{C}P^n;\ \pi^{-1}(U)\text{是 } \mathbb{C}^{n+1}_* \text{ 中的开集}\},$$

则 $\mathbb{C}P^n$ 关于 $\mathscr{T}$ 成为一个拓扑空间. 由于对角线集

$$S = \{(z, w) \in \mathbb{C}^{n+1}_*;\ z \sim w\}$$

是 $\mathbb{C}^{n+1}_* \times \mathbb{C}^{n+1}_*$ 的闭子集，$\mathbb{C}P^n$ 是 Hausdorff 空间 (参看参考文献 [3, 第二章，引理 5.1]).

对于每一个 $\alpha = 1, 2, \cdots, n+1$, 定义 $\mathbb{C}P^n$ 的子集

$$U_\alpha = \{[(z^1,\cdots,z^{n+1})] \in \mathbb{C}P^n;\ z^\alpha \neq 0\}.$$

显然，$\{U_\alpha;\ 1 \le \alpha \le n+1\}$ 是 $\mathbb{C}P^n$ 的开复盖. 对于每一个 α, 定义映射 $\varphi_\alpha: U_\alpha \to \mathbb{C}^n$, 使得

$$\varphi_\alpha([(z^1,\cdots,z^{n+1})]) = (\xi^1_\alpha,\cdots,\xi^n_\alpha)$$
$$(\forall [z] = [(z^1,\cdots,z^{n+1})] \in U_\alpha), \tag{6.4}$$

其中

$$\xi^i_\alpha = \begin{cases} \dfrac{z^i}{z^\alpha}, & \text{当 } 1 \le i < \alpha \text{ 时;} \\ \dfrac{z^{i+1}}{z^\alpha}, & \text{当 } n \ge i \ge \alpha \text{ 时.} \end{cases} \tag{6.5}$$

容易看出，φ_α 与 U_α 中元素的代表元的选取无关，并且是 U_α 到 $\mathbb{C}^n$ 上的一一对应，其逆映射 $\varphi_\alpha^{-1}: \mathbb{C}^n \to U_\alpha$ 由

$$\varphi^{-1}(\xi^1,\cdots,\xi^n) = [(\xi^1,\cdots,\xi^{\alpha-1},1,\xi^\alpha,\cdots,\xi^n)]$$
$$(\forall \xi = (\xi^1,\cdots,\xi^n) \in \mathbb{C}^n)$$

给出. 由商拓扑的定义还可以看出，每一个映射 φ_α 都是同胚.

对于任意的 $\alpha \neq \beta$, 必有 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 并且

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(\xi^1_\alpha,\cdots,\xi^n_\alpha) = (\xi^1_\beta,\cdots,\xi^n_\beta)$$
$$(\forall (\xi^1_\alpha,\cdots,\xi^n_\alpha) \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)), \tag{6.6}$$

其中 (不妨设 $\alpha < \beta$)

$$
\xi_\beta^i = \begin{cases} \dfrac{\xi_\alpha^i}{\xi_\alpha^{\beta-1}}, & \text{当 } i < \alpha \text{ 或 } i \geq \beta \text{ 时;} \\ \dfrac{1}{\xi_\alpha^{\beta-1}}, & \text{当 } i = \alpha \text{ 时;} \\ \dfrac{\xi_\alpha^{i-1}}{\xi_\alpha^{\beta-1}}, & \text{当 } \alpha < i < \beta \text{ 时.} \end{cases} \tag{6.7}
$$

由此可见, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 是从 $\mathbb{C}^n$ 中的开子集 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 映到开子集 $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ 的全纯映射. 根据定义, $\mathbb{C}P^n$ 是 n 维复流形, 称为 n 维**复射影空间**.

容易证明, 自然投影 $\pi : \mathbb{C}_*^{n+1} \to \mathbb{C}P^n$ 是全纯的开映射 (参看本章习题第 20 题的 (2)).

下面在 $\mathbb{C}P^n$ 上引入 Hermite 度量. whchen

对于每一个 α, 在局部复坐标域 U_α 内定义函数

$$
f_\alpha = 1 + \sum_{i=1}^{n} |\xi_\alpha^i|^2. \tag{6.8}
$$

则当 $\alpha \neq \beta$ 时, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 并且利用 (6.7) 式可得

$$
\begin{aligned}
f_\beta &= 1 + \sum_{i=1}^{n} |\xi_\beta^i|^2 = 1 + \frac{1}{|\xi_\alpha^\beta|^2}\left(1 + \sum_{i\neq\beta} |\xi_\alpha^i|^2\right) \\
&= \frac{1}{|\xi_\alpha^\beta|^2}\left(|\xi_\alpha^\beta|^2 + 1 + \sum_{i\neq\beta} |\xi_\alpha^i|^2\right) = \frac{f_\alpha}{|\xi_\alpha^\beta|^2},
\end{aligned}
$$

即有关系式

$$
f_\alpha = f_\beta |\xi_\alpha^\beta|^2. \tag{6.9}
$$

因此在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln f_\alpha}{\partial \xi_\alpha^i \partial \overline{\xi_\alpha^j}} &= \frac{\partial^2 \ln f_\beta}{\partial \xi_\alpha^i \partial \overline{\xi_\alpha^j}} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_\alpha^i \partial \overline{\xi_\alpha^j}} (\ln \xi_\alpha^\beta + \ln \overline{\xi_\alpha^\beta}) \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha^i}\left(\frac{\partial \ln f_\beta}{\partial \overline{\xi_\beta^l}} \frac{\partial \overline{\xi_\beta^l}}{\partial \overline{\xi_\alpha^j}}\right) = \frac{\partial^2 \ln f_\beta}{\partial \xi_\beta^k \partial \overline{\xi_\beta^l}} \frac{\partial \xi_\beta^k}{\partial \xi_\alpha^i} \frac{\partial \overline{\xi_\beta^l}}{\partial \overline{\xi_\alpha^j}}.
\end{aligned} \tag{6.10}
$$

取定 $c > 0$, 则对于任意的 $\alpha \neq \beta$ 有

$$
\begin{aligned}
&\frac{4}{c} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \ln f_\alpha}{\partial \xi_\alpha^i \partial \overline{\xi_\alpha^j}} \mathrm{d}\xi_\alpha^i \otimes \mathrm{d}\overline{\xi_\alpha^j} \\
=& \frac{4}{c} \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial^2 \ln f_\beta}{\partial \xi_\beta^k \partial \overline{\xi_\beta^l}} \frac{\partial \xi_\beta^k}{\partial \xi_\alpha^i} \frac{\partial \overline{\xi_\beta^l}}{\partial \overline{\xi_\alpha^j}} \mathrm{d}\xi_\alpha^i \otimes \mathrm{d}\overline{\xi_\alpha^j} \\
=& \frac{4}{c} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \ln f_\beta}{\partial \xi_\beta^i \partial \overline{\xi_\beta^j}} \mathrm{d}\xi_\beta^i \otimes \mathrm{d}\overline{\xi_\beta^j}.
\end{aligned} \tag{6.11}
$$

于是上式在 $\mathbb{C}P^n$ 上大范围地确定了一个 Hermite 形式, 记为 h, 使得

$$
h|_{U_\alpha} = \frac{4}{c} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \ln f_\alpha}{\partial \xi_\alpha^i \partial \overline{\xi_\alpha^j}} \mathrm{d}\xi_\alpha^i \otimes \mathrm{d}\overline{\xi_\alpha^j}. \tag{6.12}
$$

容易证明 h 是正定的, 所以 h 是 $\mathbb{C}P^n$ 上的一个 Hermite 度量, 通常称该度量为 **Fubini-Study 度量**. 事实上, 通过直接计算得到

$$
h_{ij}^{(\alpha)} \equiv \frac{4}{c} \frac{\partial^2 \ln f_\alpha}{\partial \xi_\alpha^i \partial \overline{\xi_\alpha^j}} = \frac{4(1 + \sum_k |\xi_\alpha^k|^2)\delta_{ij} - 4\xi_\alpha^j \overline{\xi_\alpha^i}}{c(1 + \sum_k |\xi_\alpha^k|^2)^2}, \tag{6.13}
$$

因此对于任意的 $Z|_{U_\alpha} = \sum Z_\alpha^i \dfrac{\partial}{\partial \xi_\alpha^i}$ 有

$$
\sum_{i,j} h_{ij}^{(\alpha)} Z_\alpha^i \overline{Z_\alpha^j} = \frac{2(2\sum_i |Z_\alpha^i|^2 + \sum_{i,j} |\xi_\alpha^i Z_\alpha^j - \xi_\alpha^j Z_\alpha^i|^2)}{c(1 + \sum_k |\xi_\alpha^k|^2)^2}.
$$

与 Hermite 度量 h 对应的 Kähler 形式是

$$
\begin{aligned}
k|_{U_\alpha} &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} \cdot \frac{4}{c} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \ln f_\alpha}{\partial \xi_\alpha^i \partial \overline{\xi_\alpha^j}} \mathrm{d}\xi_\alpha^i \wedge \mathrm{d}\overline{\xi_\alpha^j} \\
&= -\frac{2}{c} \sqrt{-1}\, \partial\bar{\partial} \ln f_\alpha.
\end{aligned} \tag{6.14}
$$

根据定理 4.7 后面的注记 4.4 知道 k 是闭微分式，所以 CP^n 是一个 Kähler 流形．用 CP^n 的齐次坐标 z^α 表示，则它的 Fubini-Study 度量是

$$h = \frac{4}{c}\frac{\sum_\alpha |z^\alpha|^2 \sum_\beta \mathrm{d}z^\beta \mathrm{d}\overline{z^\beta} - \sum_\alpha \overline{z^\alpha}\mathrm{d}z^\alpha \sum_\beta z^\beta \mathrm{d}\overline{z^\beta}}{(\sum_\alpha |z^\alpha|^2)^2}$$
$$= \frac{4}{c}\frac{\langle z,z\rangle\langle \mathrm{d}z,\mathrm{d}z\rangle - \langle \mathrm{d}z,z\rangle\langle z,\mathrm{d}z\rangle}{\langle z,z\rangle^2}. \tag{6.15}$$

下面求 $\mathbb{C}P^n$ 的全纯截面曲率．为此，考虑作用在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的 $n+1$ 阶酉群 $\mathrm{U}(n+1)$．对于任意的 $A\in \mathrm{U}(n+1)$，由于 A 是线性的，它自然地诱导出 $\mathbb{C}P^n$ 到自身的一个变换 (仍记为 A)，使得

$$A([z]) = [A(z)], \quad \forall [z]\in \mathbb{C}P^n, \tag{6.16}$$

其中 $z\in \mathbb{C}_*^{n+1}$ 是 $[z]$ 的代表元．由酉群的定义可知，$\mathrm{U}(n+1)$ 在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的作用保持标准 Hermite 度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 不变，于是从 (6.15) 式得知 $\mathrm{U}(n+1)$ 在 $\mathbb{C}P^n$ 上的诱导作用 (6.16) 保持 Fubini-Study 度量 h 不变．另一方面，$\mathrm{U}(n+1)$ 在 $\mathbb{C}_*^{n+1}$ 上的作用是全纯的，很明显 $\mathrm{U}(n+1)$ 在 $\mathbb{C}P^n$ 上的诱导作用也是全纯的，并且是可迁的，即 $\mathrm{U}(n+1)$ 在 $\mathbb{C}P^n$ 上的诱导作用构成 $\mathbb{C}P^n$ 上的一个可迁的全纯等距变换群．由此可见，在 $\mathbb{C}P^n$ 上任意两点的局部结构在全纯等距的意义下是一样的．要求出 $\mathbb{C}P^n$ 的全纯截面曲率，只需要在一点处进行计算即可．

在局部坐标系 $(U_1;\xi_1^i)$ 下，记 $\xi^i=\xi_1^i$，并设 U_1 中对应于 $\xi^i=0$ 的点为 O 点．则由 (6.13) 式得知，在点 O 处有

$$h_{ij} = \frac{4}{c}\delta_{ij};\quad h^{ij} = \frac{c}{4}\delta^{ij};\quad \frac{\partial h_{ij}}{\partial \xi^k} = 0;\quad \frac{\partial h_{ij}}{\partial \overline{\xi^k}} = 0;$$
$$\frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial \xi^k \partial \overline{\xi^l}} = -\frac{4}{c}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{kj}). \tag{6.17}$$

代入 (4.26) 式得到在点 O 处有

$$K^j_{ikl} = -2\frac{\partial h^{jp}}{\partial \overline{\xi^l}}\frac{\partial h_{ip}}{\partial \xi^k} - 2h^{jp}\frac{\partial^2 h_{ip}}{\partial \xi^k\partial \overline{\xi^l}}$$

$$= 2(\delta^j_i\delta_{kl} + \delta^j_k\delta_{il}) = \frac{c}{2}(\delta^j_i h_{kl} + \delta^j_k h_{il}).$$

根据定理 5.5, $\mathbb{C}P^n$ 在点 O 处具有常全纯截面曲率 c, 因而 $\mathbb{C}P^n$ 的全纯截面曲率恒等于 c.

例 6.3 复双曲空间 D^n.

设 D^n 是 n 维复空间 $\mathbb{C}^n$ 中的单位开球，即

$$D^n = \{z = (z^1,\cdots,z^n)\in \mathbb{C}^n;\ |z|^2 = z\bar{z}^t < 1\}.$$

对于固定的常数 $c>0$, 在复坐标系 $z=(z^1,\cdots,z^n)\in D^n$ 下定义 D^n 上的 Hermite 度量

$$h = h_{ij}\mathrm{d}z^i\otimes \mathrm{d}\overline{z^j},\quad 其中\quad h_{ij} = \frac{4((1-|z|^2)\delta_{ij} + z^j\overline{z^i})}{c(1-|z|^2)^2}. \tag{6.18}$$

容易验证

$$h_{ij} = -\frac{4}{c}\frac{\partial^2 \ln(1-|z|^2)}{\partial z^i\partial\overline{z^j}},$$

所以相应的 Kähler 形式是

$$k = -\frac{\sqrt{-1}}{2}h_{ij}\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}\overline{z^j} = \frac{2}{c}\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\ln(1-|z|^2). \tag{6.19}$$

因此，k 是闭微分式，D^n 关于 Hermite 度量 (6.18) 是 Kähler 流形，称为 n 维**复双曲空间**.

当 $z=0$ 时，由 (6.18) 式可以求出

$$h_{ij} = \frac{4}{c}\delta_{ij},\quad h^{ij} = \frac{c}{4}\delta^{ij},\quad \frac{\partial h_{ij}}{\partial z^k} = \frac{\partial h_{ij}}{\partial \overline{z^k}} = 0;$$
$$\frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial z^k\partial\overline{z^l}} = \frac{4}{c}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{kj}).$$

于是在点 $z=0$ 处，

$$K^j_{ikl} = -2\frac{\partial h^{jp}}{\partial\overline{z^l}}\frac{\partial h_{ip}}{\partial z^k} - 2h^{jp}\frac{\partial^2 h_{ip}}{\partial z^k\partial\overline{z^l}}$$

$$= -2(\delta_i^j\delta_{kl} + \delta_k^j\delta_{il}) = -\frac{c}{2}(\delta_i^j h_{kl} + \delta_k^j h_{il}).$$

根据定理 5.5, D^n 在点 $z=0$ 处的全纯截面曲率等于 $-c$.

为了证明 D^n 具有常全纯曲率, 需要引入它的另一个几何模型.

在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上定义一个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$, 使得对于任意的 $Z=(z^1,\cdots,z^n,z^{n+1})$, $W=(w^1,\cdots,w^n,w^{n+1})\in\mathbb{C}^{n+1}$, 有

$$\langle Z,W\rangle_1 = \sum_{i=1}^n z^i\overline{w^i} - z^{n+1}\overline{w^{n+1}}. \tag{6.20}$$

令

$$\tilde{D} = \{Z\in\mathbb{C}^{n+1};\ \langle Z,Z\rangle_1 < 0\}, \tag{6.21}$$

则 $\tilde{D}$ 是 $\mathbb{R}^{2n+2}=\mathbb{C}^{n+1}$ 中的一个开子集. 设 $\mathrm{U}(n+1,1)$ 是 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上保持内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ 不变的复线性变换群, 则 $\mathrm{U}(n+1,1)$ 在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的作用保持 $\tilde{D}$ 不变, 因而可以看作作用在 $\tilde{D}$ 上的变换群. 于是, $\mathrm{U}(n+1,1)$ 是 $\tilde{D}$ 上的全纯变换群. 在 $\tilde{D}$ 上引进等价关系 "$\sim$", 使得

$$(z^1,\cdots,z^n,z^{n+1})\sim(w^1,\cdots,w^n,w^{n+1})$$
$$\Longleftrightarrow (w^1,\cdots,w^n,w^{n+1}) = \lambda(z^1,\cdots,z^n,z^{n+1}),$$

其中 $\lambda\in\mathbb{C}_*=\mathbb{C}\backslash\{0\}$. 令 $\tilde{D}^n=\tilde{D}/\sim$, 则通过自然投影 $\pi:\tilde{D}\to\tilde{D}^n$, $\mathrm{U}(n+1,1)$ 在 $\tilde{D}^n$ 上具有自然的诱导作用, 很明显这个作用是可迁的. 定义映射 $\psi: D^n\to\tilde{D}^n$, 使得对于任意的 $(z^1,\cdots,z^n)\in D^n$, 有

$$\psi(z^1,\cdots,z^n) = [(z^1,\cdots,z^n,1)] = \pi(z^1,\cdots,z^n,1).$$

容易验证, ψ 是 D^n 到 $\tilde{D}^n$ 的一一对应. 因此, 通过映射 ψ 可以把 D^n 和 $\tilde{D}^n$ 等同起来. 此时, Hermite 度量 h 用齐次坐标 $Z=(z^1,\cdots,z^n,z^{n+1})$ 表示为

$$h = -\frac{4}{c}\frac{\langle Z,Z\rangle_1\langle \mathrm{d}Z,\mathrm{d}Z\rangle_1 - \langle \mathrm{d}Z,Z\rangle_1\langle Z,\mathrm{d}Z\rangle_1}{(\langle Z,Z\rangle_1)^2}. \tag{6.22}$$

由于 $\mathrm{U}(n+1,1)$ 保持 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ 不变, 所以它借助于等同 ψ 在 D^n 上诱导的可迁作用保持 Hermite 内积不变. 由此可见, D^n 具有常全纯曲率 $-c$.

不难把 $\mathrm{U}(n+1,1)$ 在 D^n 上的可迁作用显式表示出来. 设 $\mathrm{M}(n,\mathbb{C})$ 是 n 阶复方阵的全体构成的集合, 则任意的 $T\in\mathrm{U}(n+1,1)$ 可以表示为如下的分块矩阵

$$T = \begin{pmatrix} A & B\\ C & d\end{pmatrix}, \tag{6.23}$$

其中 $n\times n$ 复矩阵 $A\in\mathrm{M}(n,\mathbb{C})$ 、 $n\times 1$ 复矩阵 B 、 $1\times n$ 复矩阵 C 以及复数 d 满足如下条件

$$A\cdot\bar{A}^t - B\cdot\bar{B}^t = I,\quad A\cdot\bar{C}^t - B\cdot\bar{d} = 0,\quad |d|^2 = 1 + C\cdot\bar{C}^t.$$

设 $z=(z^1,\cdots,z^n)\in D^n$, 则 $T(z)$ 具有如下的表达式

$$T(z) = \frac{z\cdot A + C}{z\cdot B + d}. \tag{6.24}$$

例 6.4 n 维复环面 $\mathbb{C}T^n$.

在 $\mathbb{C}^n=\mathbb{R}^{2n}$ 中任意取定 $2n$ 个实线性无关的向量 v_α; $1\le\alpha\le 2n$. 设 Γ 是在 $\mathbb{C}^n$ 中由 $\{v_1,v_2,\cdots,v_{2n}\}$ 生成的加法子群 (称为 **格**), 即

$$\Gamma = \left\{\sum_{\alpha=1}^{2n} m^\alpha v_\alpha;\ m^\alpha\in\mathbb{Z}\right\},\quad \mathbb{Z}\text{是整数集}. \tag{6.25}$$

定义 Γ 在 $\mathbb{C}^n$ 上的作用为: 对于任意的 $g=\sum_{\alpha=1}^{2n} m^\alpha v_\alpha\in\Gamma$ 以及 $z\in\mathbb{C}^n$, 命

$$\Phi_g(z) = z + g = z + \sum_{\alpha=1}^{2n} m^\alpha v_\alpha,$$

则 Γ 成为自由地、纯不连续地作用在 $\mathbb{C}^n$ 上的离散李氏变换群 (参看参考文献 [3, 第二章, 例 2°]). 于是, 仿照参考文献 [3] 中第一章定理 5.2 的证明方法可以说明: 在商空间 $\mathbb{C}T^n=\mathbb{C}^n/\Gamma$ 中存在确定的复流

形结构，使得自然投影 $\pi:\mathbb{C}^n\to \mathbb{C}T^n$ 在局部上是双全纯映射．事实上，对于任意的 $p\in \mathbb{C}T^n$，存在点 p 的开邻域 U，使得 $\pi^{-1}(U)=\bigcup_i U_i$，并且 $\pi|_{U_i}:U_i\to U$ 是双全纯映射，其中 $\{U_i\}$ 是 $\pi^{-1}(U)$ 中的所有连通分支．于是，每一个 $(\pi|_{U_i})^{-1}:U\to U_i$ 都可以作为 $\mathbb{C}T^n$ 在点 p 的复坐标映射．显而易见，Γ 在 $\mathbb{C}^n$ 上的作用关于 $\mathbb{C}^n$ 上的标准 Hermite 结构是全纯等距．所以，在 $\mathbb{C}T^n$ 上存在唯一的 Hermite 结构 h 使得 π^*h 正好是 $\mathbb{C}^n$ 上的标准 Hermite 度量 (证明留作练习)．于是 $\pi:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}T^n$ 是局部全纯等距，因而 $\mathbb{C}T^n$ 和 $\mathbb{C}^n$ 作为 Kähler 流形具有相同的局部结构．特别地，$\mathbb{C}T^n$ 的全纯截面曲率和 Ricci 形式恒为 0．

需要指出的是，对于不同的格 $\Gamma,\tilde\Gamma$，所得到的复环面 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ 和 $\mathbb{C}^n/\tilde\Gamma$ 未必是全纯同胚的，也就是说在 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ 和 $\mathbb{C}^n/\tilde\Gamma$ 之间未必存在同胚 f，使得 f 和 f^{-1} 都是全纯映射．

例 6.5　典型域 $D_{p,q}$．

设 p,q 是两个自然数，$\mathrm{M}(p,q;\mathbb{C})$ 是 $p\times q$ 复矩阵的全体构成的集合，它等同于 pq 维复向量空间 $\mathbb{C}^{pq}$，是平坦的 Kähler 流形 (参看例 6.1)．对于任意的 $X\in\mathrm{M}(p,q;\mathbb{C})$，用 $\overline{X}$ 和 X^t 分别表示矩阵 X 的复共轭矩阵和转置矩阵．此外，还用 $Y>0$ 表示方阵 Y 是正定的．令

$$D_{p,q}=\{Z\in\mathrm{M}(p,q;\mathbb{C});\ I_q-\overline{Z}^t Z>0\},\tag{6.26}$$

其中 I_q 表示 q 阶单位矩阵．则 $D_{p,q}$ 是复流形 $\mathrm{M}(p,q;\mathbb{C})$ 的非空开子集，因而是一个 pq 维复流形，用 J 记它的典型复结构．设 $Z=(z_i^\lambda)$，约定 $1\le\lambda\le p$，$1\le i\le q$．

对于任意的正数 c，在 $D_{p,q}$ 上定义 2 次外微分式

$$k=\frac{2}{c}\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\ln(\det(I_q-\overline{Z}^t Z)),\quad Z\in D_{p,q}.\tag{6.27}$$

显然，k 是闭微分式．命

$$h=-\frac{4}{c}\sum_{i,j,\lambda,\mu}\frac{\partial^2\ln(\det(I_q-\overline{Z}^t Z))}{\partial z_i^\lambda\partial\overline{z_j^\mu}}\mathrm{d}z_i^\lambda\otimes\mathrm{d}\overline{z_j^\mu}.\tag{6.28}$$

下面要证明 h 是正定的，因而 $(D_{p,q},h)$ 是一个 Kähler 流形．

首先定义集合 $\mathrm{U}(p+q,q)$ 如下：

$$\mathrm{U}(p+q,q)=\{T\in\mathrm{M}(p+q,p+q;\mathbb{C});\ \overline{T}^t\varepsilon_{p,q}T=\varepsilon_{p,q}\},\tag{6.29}$$

其中

$$\varepsilon_{p,q}=\begin{pmatrix} I_p & 0\\ 0 & -I_q\end{pmatrix}.$$

很明显，它关于矩阵的乘法构成一个群．若把 $T\in\mathrm{U}(p+q,q)$ 表示为分块矩阵

$$T=\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix},$$

其中 $A\in\mathrm{M}(p,p;\mathbb{C})$，$B\in\mathrm{M}(p,q;\mathbb{C})$，$C\in\mathrm{M}(q,p;\mathbb{C})$，$D\in\mathrm{M}(q,q;\mathbb{C})$，则矩阵 A,B,C,D 必须满足下列条件：

$$\bar A^t\cdot A-\bar C^t\cdot C=I_p;\quad \bar A^t\cdot B-\bar C^t\cdot D=0,\quad \bar B^t\cdot B-\bar D^t\cdot D=-I_q.\tag{6.30}$$

我们将要说明：对于任意的 $Z\in D_{p,q}$，矩阵 $CZ+D$ 是可逆的．实际上，从条件 (6.30) 得到

$$\begin{aligned}&\overline{(CZ+D)}^t(CZ+D)\\ &\quad=\bar Z^t\bar C^t CZ+\bar D^t CZ+\bar Z^t\bar C^t D+\bar D^t D\\ &\quad=\bar Z^t(\bar A^t A-I_p)Z+\bar B^t AZ+\bar Z^t\bar A^t B+\bar B^t B+I_q\\ &\quad=\overline{(AZ+B)}^t(AZ+B)+(I_q-\bar Z^t Z).\end{aligned}\tag{6.31}$$

终端的第一项是半正定矩阵，第二项是正定矩阵，所以 $\overline{(CZ+D)}^t(CZ+D)$ 是正定矩阵，故 $CZ+D$ 是可逆的．

因此，对于上面的 $T\in\mathrm{U}(p+q,q)$，可以定义映射 $\Phi_T:D_{p,q}\to\mathrm{M}(p,q;\mathbb{C})$，使得

$$\Phi_T(Z)=(AZ+B)(CZ+D)^{-1},\quad\forall Z\in D_{p,q}.\tag{6.32}$$

经过直接计算得到

$$
\begin{aligned}
&I_q-\overline{\Phi_T(Z)}^{\mathrm{t}}\Phi_T(Z)\\
&\quad= I_q-\left(\overline{(AZ+B)(CZ+D)^{-1}}\right)^{\mathrm{t}}(AZ+B)(CZ+D)^{-1}\\
&\quad= I_q-\left((\overline{CZ+D})^{-1}\right)^{\mathrm{t}}\left(\overline{AZ+B}\right)^{\mathrm{t}}(AZ+B)(CZ+D)^{-1}\\
&\quad= \left((\overline{CZ+D})^{-1}\right)^{\mathrm{t}}\left\{\overline{(CZ+D)}^{\mathrm{t}}(CZ+D)\right.\\
&\qquad\left.-\overline{(AZ+B)}^{\mathrm{t}}(AZ+B)\right\}(CZ+D)^{-1}\\
&\quad= \left((\overline{CZ+D})^{-1}\right)^{\mathrm{t}}(I_q-\overline{Z}^{\mathrm{t}}Z)(CZ+D)^{-1},
\end{aligned}
\tag{6.33}
$$

然而矩阵的正定性在矩阵的合同变换下是不变的，故 $I_q-\overline{\Phi_T(Z)}^{\mathrm{t}}\Phi_T(Z)>0$，即 $\Phi_T(Z)\in D_{p,q}$. 因此，(6.32) 式定义了群 $\mathrm{U}(p+q,q)$ 在 $D_{p,q}$ 上的作用，而且每一个 $\Phi_T(T\in\mathrm{U}(p+q,q))$ 是从 $D_{p,q}$ 到它自身的全纯同胚. 另外，还可以证明 $\mathrm{U}(p+q,q)$ 在 $D_{p,q}$ 上的作用是可迁的 (留作练习).

由 (6.33) 式得到

$$
\begin{aligned}
&\partial\overline{\partial}\ln(\det(I_q-\overline{\Phi_T(Z)}^{\mathrm{t}}\Phi_T(Z)))\\
&\quad=\partial\overline{\partial}\ln\left(\left((\overline{CZ+D})^{-1}\right)^{\mathrm{t}}(I_q-\overline{Z}^{\mathrm{t}}Z)(CZ+D)^{-1}\right)\\
&\quad=\partial\overline{\partial}\ln(\det(I_q-\overline{Z}^{\mathrm{t}}Z))-\partial\overline{\partial}\ln|\det(CZ+D)|^2\\
&\quad=\partial\overline{\partial}\ln(\det(I_q-\overline{Z}^{\mathrm{t}}Z)).
\end{aligned}
\tag{6.34}
$$

由此可见，2 次外微分式 k 在 $\mathrm{U}(p+q,q)$ 的作用下是不变的，所以形式 h 在 $\mathrm{U}(p+q,q)$ 的作用下也是不变的.

容易验证：在 $Z=0$ 处

$$
h=\frac{4}{c}\sum_{i,\lambda;j,\mu}\delta_{ij}\delta_{\lambda\mu}\mathrm{d}z_i^\lambda\otimes\mathrm{d}\overline{z_j^\mu}=\frac{4}{c}\sum_{i\lambda}\mathrm{d}z_i^\lambda\otimes\mathrm{d}\overline{z_i^\lambda}.
\tag{6.35}
$$

因此，h 是在 $D_{p,q}$ 上处处正定的 Hermite 度量，并以 k 为其 Kähler 形式. $\mathrm{U}(p+q,q)$ 是可迁地作用在 $(D_{p,q},h)$ 上的一个全纯等距变换群.

请读者求出 $D_{p,q}$ 的全纯截面曲率. 不难看出，当 $p=n,q=1$ 时本例就是例 6.3 中的复双曲空间 D^n.

例 6.6　Kähler 子流形.

设 (N,h) 是 Kähler 流形，M 是复流形，$f:M\to N$ 是全纯浸入. 因为 $g=\mathrm{Re}(h)$ 是 N 上的 J-不变黎曼度量. 由映射 f 的全纯性知道，$f_*\circ J=J\circ f_*$. 所以 f^*g 是 M 上的 J-不变黎曼度量，因而 f^*h 是 M 上的一个 Hermite 结构. 利用等式 $\mathrm{d}\circ f^*=f^*\circ\mathrm{d}$ 又可以说明 f^*h 所对应的 Kähler 形式是闭微分式，所以 (M,f^*h) 也是一个 Kähler 流形. 这样得到的 Kähler 流形 (M,f^*h) 称为 (N,h) 的复子流形，或 **Kähler 子流形**. 既然 M 是 N 的浸入子流形，因此第七章有关子流形的理论适用于 M 和 N.

下面将导出 Kähler 流形 N 及其 Kähler 子流形 M 的全纯截面曲率、Ricci 曲率张量之间的关系. 为简便起见，在以下讨论中略去映射 f 及其切映射 f_* 等记号.

设 M 和 N 的复维数分别是 m 和 $n=m+p$, D 和 $\tilde{\mathrm{D}}$ 分别是 M 和 N 的黎曼联络，它们也分别是 M 和 N 的 Hermite 联络.

如果用 $B:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\Gamma(T^\perp M)$ 记 M 在 N 中的第二基本形式 (参看第七章，§7.1)，则由定义，对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ 有

$$
\tilde{\mathrm{D}}_X(JY)=\mathrm{D}_X(JY)+B(X,JY).
$$

因为 D 和 $\tilde{\mathrm{D}}$ 都是复联络，$J\circ\mathrm{D}=\mathrm{D}\circ J$ 成立，即 $J\circ\tilde{\mathrm{D}}=\tilde{\mathrm{D}}\circ J$, 所以上式又能写成

$$
\tilde{\mathrm{D}}_X(JY)=J\tilde{\mathrm{D}}_XY=J(\mathrm{D}_XY)+JB(X,Y).
$$

将两式相对照，并且利用 B 的对称性得到

$$
B(JX,Y)=B(X,JY)=JB(X,Y).
\tag{6.36}
$$

从上式容易导出下面的命题：

命题 6.1 Kähler 流形 (N,h) 的复子流形必是 (N,h) 的极小子流形.

证明 设 $f: M \to N$ 是 (N,h) 的复子流形. 在 M 上取单位正交标架场 $\{e_i, Je_i\}$, 则由 (6.36) 式得到 M 在 N 中的平均曲率向量是

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}(B(e_i,e_i)+B(Je_i,Je_i)) \\ &= \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}(B(e_i,e_i)-B(e_i,e_i)) = 0. \end{aligned}$$

因此 (M, f^*h) 是 (N,h) 的极小子流形. 证毕.

假设 R 和 $\tilde{R}$ 分别是黎曼流形 M 和 N 的黎曼曲率张量, 则由第七章 §7.2 的 Gauss 方程、度量 g 的 J-不变性以及 (6.36) 式, 对于任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ 有

$$\begin{aligned} R(X,Y,Y,X) &= \tilde{R}(X,Y,Y,X) + g(B(X,X),B(Y,Y)) \\ &\quad - g(B(X,Y),B(X,Y)), \\ R(X,JY,JY,X) &= \tilde{R}(X,JY,JY,X) - g(B(X,X),B(Y,Y)) \\ &\quad - g(B(X,Y),B(X,Y)), \end{aligned} \tag{6.37}$$

$$R(X,JX,JX,X) = \tilde{R}(X,JX,JX,X) - 2g(B(X,X),B(X,X)). \tag{6.38}$$

所以, M 和 N 的全纯截面曲率 K 和 $\tilde{K}$ 有如下关系:

$$\begin{aligned} K(X,JX) =& \tilde{K}(X,JX) \\ & - \frac{2g(B(X,X),B(X,X))}{(g(X,X))^2}, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M),\ X \neq 0. \end{aligned} \tag{6.39}$$

上式说明, Kähler 子流形 M 的全纯截面曲率不大于外围空间 N 的全纯截面曲率.

设 M 和 N 的 Ricci 曲率张量分别记为 Ric_M, Ric_N. 设 $x \in M$. 取 $X_1, \cdots, X_{m+p} \in T_xN$, 使得 $X_1, \cdots, X_m \in T_xM$, 并且 $\{X_1, \cdots, X_{m+p}, JX_1, \cdots, JX_{m+p}\}$ 构成 T_xN 的一个单位正交基. 则对于任意的 $X \in T_xM$, 有

$$\mathrm{Ric}_M(X,X) = \sum_{i=1}^{m}(R(X,X_i,X_i,X) + R(X,JX_i,JX_i,X)), \tag{6.40}$$

$$\mathrm{Ric}_N(X,X) = \sum_{\alpha=1}^{m+p}(\tilde{R}(X,X_\alpha,X_\alpha,X) + \tilde{R}(X,JX_\alpha,JX_\alpha,X)). \tag{6.41}$$

由 (6.37) 和 (6.40) 式,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}_M(X,X) &= \sum_{i=1}^{m}(\tilde{R}(X,X_i,X_i,X) + \tilde{R}(X,JX_i,JX_i,X)) \\ &\quad - 2\sum_{i=1}^{m} g(B(X_i,X),B(X_i,X)). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ric}_M(X,X) \\ &= \mathrm{Ric}_N(X,X) - \sum_{\alpha=m+1}^{m+p}(\tilde{R}(X,X_\alpha,X_\alpha,X) + \tilde{R}(X,JX_\alpha,JX_\alpha,X)) \\ &\quad - 2\sum_{i=1}^{m} g(B(X_i,X),B(X_i,X)). \end{aligned} \tag{6.42}$$

§8.7 陈示性类

纤维丛是在 20 世纪 30 年代末提出来的重要数学结构, 受到几何学家和拓扑学家的高度重视. 在 20 世纪 40 年代末出现的 "示性类" 在纤维丛的分类理论中扮演重要的角色. 示性类理论经过许多杰出数学家的努力已经形成公理化系统, 但是难以计算在几何问题中出现的

纤维丛的示性类. 陈省身在 1946 年用联络的曲率形式给出复向量丛的示性类代表元的显式表示, 使示性类理论的面貌完全更新了. 现在把陈省身给出的曲率表达式称为陈示性式, 它们代表的示性类称为陈类. 陈示性式和陈类是复流形、纤维丛理论、代数几何以及拓扑学中最基本的概念, 在这里对此作一些初步的介绍. 陈省身除了最初在 1946 年发表的论文《Characteristic classes of Hermitian manifolds》外, 还撰写了多篇论文阐述陈类的理论, 本节就是按照陈省身的论文 [19] 改写的.

设 $E=(E,M,\pi)$ 是 m 维光滑流形 M 上秩为 r 的复向量丛, D 是 E 上的一个复联络. 对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, 可以定义映射 $\mathcal{R}(X,Y):\Gamma(E)\to\Gamma(E)$, 使得对于任意的 $\sigma\in\Gamma(E)$ 有

$$\mathcal{R}(X,Y)\sigma=\mathrm{D}_X\mathrm{D}_Y\sigma-\mathrm{D}_Y\mathrm{D}_X\sigma-\mathrm{D}_{[X,Y]}\sigma.$$

该映射具有如下的性质: 对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$,

(1) $\mathcal{R}(X,Y)\sigma$ 关于 X,Y 是实线性的, 关于 σ 是复线性的;

(2) $\mathcal{R}(X,Y)=-\mathcal{R}(Y,X)$;

(3) 对于任意的 (实值光滑函数)$f\in C^\infty(M)$, 有

$$\mathcal{R}(fX,Y)=\mathcal{R}(X,fY)=f\mathcal{R}(X,Y);$$

(4) 对于 M 上的复值光滑函数 f 有 $\mathcal{R}(X,Y)(f\sigma)=f\mathcal{R}(X,Y)\sigma$.

映射 $\mathcal{R}(X,Y)$ 称为联络 D 的曲率算子.

设 $\{s_\alpha,1\le\alpha\le r\}$ 是复向量丛 E 在 $U\subset M$ 上的一个局部标架场, 令

$$\mathrm{D}s_\alpha=\omega_\alpha^\beta s_\beta,\tag{7.1}$$

则称 ω_α^β 为 D 在标架场 $\{s_\alpha\}$ 下的联络形式. 相应的曲率形式是

$$\Omega_\alpha^\beta=\mathrm{d}\omega_\alpha^\beta-\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta=\mathrm{d}\omega_\alpha^\beta+\omega_\gamma^\beta\wedge\omega_\alpha^\gamma.\tag{7.2}$$

容易证明:

$$\mathcal{R}(X,Y)s_\alpha=\Omega_\alpha^\beta(X,Y)s_\beta.\tag{7.3}$$

对 (7.2) 式求外微分, 得到

$$\mathrm{d}\Omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\Omega_\gamma^\beta-\Omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta=\Omega_\gamma^\beta\wedge\omega_\alpha^\gamma-\omega_\gamma^\beta\wedge\Omega_\alpha^\gamma.\tag{7.4}$$

(7.4) 式称为 Bianchi 恒等式.

若 $\{\tilde{s}_\alpha,1\le\alpha\le r\}$ 是复向量丛 E 在 V 上的局部标架场, 则当 $U\cap V\neq\emptyset$ 时, 在 $U\cap V$ 上可设

$$\tilde{s}_\alpha=A_\alpha^\beta s_\beta;\tag{7.5}$$

其中复值函数 $A_\alpha^\beta\in C^\infty(U\cap V)$, 且 $\det(A_\alpha^\beta)\neq0$. 设联络 D 在局部标架场 $\{\tilde{s}_\alpha\}$ 下的联络形式为 $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$, 曲率形式为

$$\tilde{\Omega}_\alpha^\beta=\mathrm{d}\tilde{\omega}_\alpha^\beta-\tilde{\omega}_\alpha^\gamma\wedge\tilde{\omega}_\gamma^\beta,$$

则

$$A_\beta^\gamma\tilde{\omega}_\alpha^\beta=\mathrm{d}A_\alpha^\gamma+\omega_\beta^\gamma A_\alpha^\beta.$$

对它求外微分得

$$A_\beta^\gamma\tilde{\Omega}_\alpha^\beta=\Omega_\beta^\gamma A_\alpha^\beta.$$

若记矩阵 $\omega=(\omega_\alpha^\beta)$, $\Omega=(\Omega_\alpha^\beta)$, $A=(A_\alpha^\beta)$, 并且上指标代表行数、下指标代表列数 (如同在 §2.6 中的规定), 则上面两式成为

$$A\tilde{\omega}=\mathrm{d}A+\omega A,\quad\tilde{\Omega}=A^{-1}\Omega A.\tag{7.6}$$

由于 Ω_α^β 是 2 次外微分式, 它们之间的外积是可交换的, 故能够定义行列式 $\det\left(I+\dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)$, 其中 I 是单位矩阵, 即

$$\det\left(I+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)$$

$$= \delta^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{1\cdots r}\left(\delta^1_{\alpha_1}+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega^1_{\alpha_1}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\delta^r_{\alpha_r}+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega^r_{\alpha_r}\right)$$

$$= \frac{1}{r!}\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_r}\left(\delta^{\beta_1}_{\alpha_1}+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega^{\beta_1}_{\alpha_1}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\delta^{\beta_r}_{\alpha_r}+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega^{\beta_r}_{\alpha_r}\right).$$

将上式展开得

$$\det\left(I+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)=1+c_1(\Omega)+\cdots+c_r(\Omega), \tag{7.7}$$

其中 $c_i(\Omega)$ $(1\le i\le r)$ 是 $2i$ 次外微分式. 由于在不同的局部标架场下, 联络的曲率形式的矩阵之间差一个相似变换 (见 (7.6) 式的第二式), 故

$$\det\left(I+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)=\det\left(I+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\tilde{\Omega}\right).$$

这意味着

$$c_i(\Omega)=c_i(\tilde{\Omega}),\quad 1\le i\le r, \tag{7.8}$$

所以 $c_i(\Omega)$ 是大范围地定义在光滑流形 M 上的 $2i$ 次外微分式. 为了突出它们对于复向量丛 E 上的联络 D 的依赖性, 记成

$$c_i(E;\mathrm{D})=c_i(\Omega),\quad 1\le i\le r. \tag{7.9}$$

外微分式 $c_i(E,\mathrm{D})$ 称为复向量丛 E 关于联络 D 的 **第 i 个陈示性式**.

还可以考虑另一组外微分式

$$b_i(\Omega)=\mathrm{tr}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)^i,\quad 1\le i\le r. \tag{7.10}$$

这里的 $(\ )^i$ 是指 i 个矩阵 $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega$ 的乘积. 很明显, $b_i(\Omega)$ 同样与局部标架场 $\{s_\alpha\}$ 的取法无关, 故 $b_i(\Omega)$ 也是大范围地定义在 M 上的 $2i$ 次外微分式.

为了考察 $c_i(\Omega)$ 和 $b_i(\Omega)$ 之间的关系, 先对数值矩阵的情形进行讨论. 设 A 是 $r\times r$ 矩阵, $c_i(A)$ 是 A 的特征多项式的系数, 即

$$\det(\lambda I+A)=\sum_{i=0}^{r}c_i(A)\lambda^{r-i}.$$

命 $b_i(A)=\mathrm{tr}\,(A^i)$. 设 A 的若当型是 B, 则 $c_i(A)$ 恰好是 B 的对角线元素 (即 A 的特征值) 的第 i 个初等对称多项式, $b_i(A)$ 是 B 的对角线元素的 i 次幂之和, 也是 B 的对角线元素的对称多项式. 众所周知, 在 r 个变量的各个初等对称多项式和这 r 个变量的同次方幂和之间有如下的 Newton 恒等式

$$b_i-c_1b_{i-1}+c_2b_{i-2}+\cdots+(-1)^{i-1}c_{i-1}b_1+(-1)^i ic_i=0,\quad 1\le i\le r. \tag{7.11}$$

由此可见, $b_i(A)$ 是 $c_1(A),\cdots,c_i(A)$ 的整系数多项式, $c_i(A)$ 是 $b_1(A),\cdots,b_i(A)$ 的有理系数多项式. 例如:

$$\begin{aligned}&b_1=c_1,\\&b_2=c_1^2-2c_2,\\&b_3=c_1^3-3c_1c_2+3c_3,\\&\cdots\cdots\end{aligned}$$

上述关系式对于外微分式 $c_i(\Omega)$ 和 $b_i(\Omega)$ 也成立.

定理 7.1 外微分式 b_i, c_i, $1\le i\le r$ 是 M 上的闭形式.

证明 只要证明 b_i 是闭微分式就够了.

利用 Bianchi 恒等式 (7.4) 得到 $\mathrm{d}\Omega=\Omega\wedge\omega-\omega\wedge\Omega$. 于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{tr}\,\Omega^i)=&\mathrm{tr}\,(\mathrm{d}\Omega^i)=i\,\mathrm{tr}\,(\mathrm{d}\Omega\wedge\Omega^{i-1})\\=&i\,\mathrm{tr}\,((\Omega\wedge\omega-\omega\wedge\Omega)\wedge\Omega^{i-1})\\=&i\,\mathrm{tr}\,(\Omega\wedge\omega\wedge\Omega^{i-1}-\omega\wedge\Omega^i)=0.\end{aligned}$$

证毕.

定理 7.2 设 D_0 和 D_1 是复向量丛 (E,M,π) 上的任意两个复联络, 则 $b_i(E;\mathrm{D}_0)-b_i(E;\mathrm{D}_1)$ 和 $c_i(E;\mathrm{D}_0)-c_i(E;\mathrm{D}_1)$ $(1\le i\le r)$ 都是恰当微分式.

证明　因为 c_i 是 $b_1,\cdots,b_i$ 的有理系数多项式，而恰当微分式与闭微分式的外积仍然是恰当的，于是只要对 b_i 证明定理就可以了. 例如：因为 $c_2=\frac{1}{2}b_1^2-\frac{1}{2}b_2$, 所以

$$\begin{aligned}&c_2(E,\mathrm{D}_0)-c_2(E,\mathrm{D}_1)\\&\quad=\frac{1}{2}(b_1(E,\mathrm{D}_0)-b_1(E,\mathrm{D}_1))\wedge b_1(E,\mathrm{D}_0)\\&\quad\quad+\frac{1}{2}b_1(E,\mathrm{D}_1)\wedge(b_1(E,\mathrm{D}_0)-b_1(E,\mathrm{D}_1))\\&\quad\quad-\frac{1}{2}(b_2(E,\mathrm{D}_0)-b_2(E,\mathrm{D}_1)).\end{aligned}$$

因此，若能证明 $b_i(E,\mathrm{D}_0)-b_i(E,\mathrm{D}_1)$ 是恰当微分式，则 $c_2(E,\mathrm{D}_0)-c_2(E,\mathrm{D}_1)$ 也是恰当微分式.

令

$$\mathrm{D}_t=(1-t)\mathrm{D}_0+t\mathrm{D}_1,\quad 0\leq t\leq 1,$$

则 D_t 也是 (E,M,π) 上的复联络. 设它在局部标架场 $\{s_\alpha\}$ 下的联络形式的矩阵是 ω_t, 则

$$\omega_t=(1-t)\omega_0+t\omega_1=\omega_0+t(\omega_1-\omega_0),\tag{7.12}$$

其曲率形式的矩阵为

$$\Omega_t=\mathrm{d}\omega_t+\omega_t\wedge\omega_t,\tag{7.13}$$

相应的 Bianchi 恒等式是

$$\mathrm{d}\Omega_t=\Omega_t\wedge\omega_t-\omega_t\wedge\Omega_t.\tag{7.14}$$

令

$$\eta=\omega_1-\omega_0,\tag{7.15}$$

则在局部标架场的变换 (7.5) 下，由 (7.6) 式得到

$$\tilde{\eta}=A^{-1}\eta A,\quad \tilde{\Omega}_t=A^{-1}\Omega_t A.\tag{7.16}$$

因此

$$\tilde{\eta}\wedge\tilde{\Omega}_t^{i-1}=A^{-1}\eta\wedge\Omega_t^{i-1}A.$$

从而

$$\alpha=\mathrm{tr}\,(\eta\wedge\Omega_t^{i-1})\tag{7.17}$$

是在 M 上大范围定义的 $2i-1$ 次外微分式.

对 (7.17) 式求外微分，并且用 (7.14) 式代入得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\alpha=&\mathrm{tr}\;\mathrm{d}(\eta\wedge\Omega_t^{i-1})\\=&\mathrm{tr}\left(\mathrm{d}\eta\wedge\Omega_t^{i-1}-\eta\wedge\sum_{a=1}^{i-1}\Omega_t^{a-1}\wedge\mathrm{d}\Omega_t\wedge\Omega_t^{i-a-1}\right)\\=&\mathrm{tr}\left(\mathrm{d}\eta\wedge\Omega_t^{i-1}-\eta\wedge\sum_{a=1}^{i-1}\Omega_t^{a-1}\wedge(\Omega_t\wedge\omega_t-\omega_t\wedge\Omega_t)\wedge\Omega_t^{i-a-1}\right)\\=&\mathrm{tr}\,(\mathrm{d}\eta\wedge\Omega_t^{i-1}+\eta\wedge\omega_t\wedge\Omega_t^{i-1}-\eta\wedge\Omega_t^{i-1}\wedge\omega_t)\\=&\mathrm{tr}\,((\mathrm{d}\eta+\eta\wedge\omega_t+\omega_t\wedge\eta)\wedge\Omega_t^{i-1}).\end{aligned}$$

将上式终端圆括号内的第一个因子记作 β, 则

$$\begin{aligned}\beta=&\mathrm{d}\eta+\eta\wedge\omega_t+\omega_t\wedge\eta\\=&\mathrm{d}\eta+\eta\wedge(\omega_0+t\eta)+(\omega_0+t\eta)\wedge\eta\\=&\mathrm{d}\eta+\eta\wedge\omega_0+\omega_0\wedge\eta+2t\eta\wedge\eta.\end{aligned}$$

另一方面，将 (7.13) 式展开得到

$$\begin{aligned}\Omega_t=&\mathrm{d}(\omega_0+t\eta)+(\omega_0+t\eta)\wedge(\omega_0+t\eta)\\=&\Omega_0+t(\mathrm{d}\eta+\eta\wedge\omega_0+\omega_0\wedge\eta)+t^2\eta\wedge\eta.\end{aligned}$$

所以 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega_t=\beta$. 由此可得

$$\frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{tr}\;\Omega_t^i)=\mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{d}\Omega_t}{\mathrm{d}t}\wedge\Omega_t^{i-1}\right)=\mathrm{tr}\,(\beta\wedge\Omega_t^{i-1})=\mathrm{d}\alpha.$$

两边对 t 求积分，得到

$$\mathrm{tr}\ \Omega_1^i - \mathrm{tr}\ \Omega_0^i = i\int_0^1 (\mathrm{d}\alpha)\mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(i\int_0^1 \alpha \mathrm{d}t\right), \tag{7.18}$$

这意味着 $b_i(E;\mathrm{D}_0)$ 和 $b_i(E;\mathrm{D}_1)$ 只差一个恰当微分式. 证毕.

在第一章 §1.7 已经把光滑流形 M 上的 r 次闭微分式的集合记为 $Z^r(M)$; 把 M 上的 r 次恰当微分式的集合记为 $B^r(M) = \mathrm{d}A^{r-1}(M)$. 则 $B^r(M)$ 是 $Z^r(M)$ 的加法子群. 商群 $Z^r(M)/B^r(M)$ 称为光滑流形 M 上的第 r 个 de Rham 上同调群，记为 $H^r(M;\mathbb{R})$. 现在，每个 $c_i(E;\mathrm{D})$ 是光滑流形 M 上的复值 $2i$ 次闭微分式，故 $c_i(E;\mathrm{D})$ 给出了复系数 de Rham 上同调群 $H^{2i}(M;\mathbb{C})$ 中的一个元素，即 de Rham 上同调类 $\{c_i(E;\mathrm{D})\}$. 然而，定理 7.2 说明：若在复向量丛 $\pi: E \to M$ 上取不同的复联络 D 和 D_1, 则 $c_i(E;\mathrm{D})$ 和 $c_i(E;\mathrm{D}_1)$ 只差一个恰当微分式，因而 de Rham 上同调类 $\{c_i(E;\mathrm{D})\} = \{c_i(E;\mathrm{D}_1)\}$. 换言之，de Rham 上同调类 $\{c_i(E;\mathrm{D})\}$ 仅与复向量丛 E 有关. 于是可以记

$$c_i(E) = \{c_i(E;\mathrm{D})\}, \tag{7.19}$$

称为复向量丛 $\pi: E \to M$ 的 **第 i 个陈类**(Chern Class).

同样道理，$b_i(E;\mathrm{D})$ 也确定了 $H^{2i}(M;\mathbb{C})$ 中的一个元素，它与联络 D 的取法无关. de Rham 上同调类 $\{b_i(E;\mathrm{D})\}$ 称为复向量丛 $\pi: E \to M$ 的 **第 i 个陈特征**(Chern Character), 记为 $ch_i(E)$.

如果 M 是紧致的偶数维有向光滑流形，设它的维数是 $m = 2n$. 取一组非负整数 $i_1, \cdots, i_r$, 使得 $i_1 + \cdots + i_r = m$, 则可以求 $c_{i_1}(E) \wedge \cdots \wedge c_{i_r}(E)$ 在 M 上的积分，得

$$c_{i_1\cdots i_r}(E) = \int_M c_{i_1}(E) \wedge \cdots \wedge c_{i_r}(E), \tag{7.20}$$

称为 E 的 **陈数**(Chern Number).

对于给定的复向量丛 (E, π, M), 任意取定 E 的一个复联络 D, 用该联络的曲率形式按照矩阵特征值的初等对称多项式构造出一些 M 上的闭微分式，它们的 de Rham 上同调类与联络 D 的取法是无关的，从而得到向量丛 E 的一系列不变量. 这个事实是很了不起的. 在用局部平凡化结构构造向量丛的时候，并不知道它是否是平凡的，即不知道它是否是底流形 M 和纤维空间的直积. 如果 E 是一个平凡丛，则在 E 上存在大范围定义的标架场 $\{s_\alpha\}$. 因此可以在 E 上定义复联络使得标架场 $\{s_\alpha\}$ 是平行的，于是相应的曲率形式为零. 故平凡向量丛的陈类 $c_i(E)$, $1 \le i \le r$, 都是零. 由此可见，陈示性类刻画了复向量丛偏离平凡丛的程度，因而对于复向量丛的研究具有重要的意义.

进一步可以证明，陈类在实际上是实系数的 de Rham 上同调类.

定理 7.3　设 $\pi: E \to M$ 是光滑流形 M 上的复向量丛，则陈类 $c_i(E) \in H^{2i}(M;\mathbb{R})$.

证明　在复向量丛 (E, M, π) 上取一个 Hermite 结构 h, 以及与 h 相容的复联络 D. 这样的联络总是存在的.

对于任意一点 $p \in M$, 存在 p 点的一个邻域 U 以及复向量丛在 U 上的酉标架场 $\{s_\alpha, 1 \le \alpha \le r\}$, 即 s_α 满足条件

$$h(s_\alpha, s_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \quad 1 \le \alpha, \beta \le r.$$

设 D 关于标架场 $\{s_\alpha\}$ 的联络形式为 ω_α^β, 那么 D 与 h 相容的条件成为

$$\omega_\alpha^\beta + \overline{\omega_\beta^\alpha} = 0.$$

这样，相应的曲率形式 Ω_α^β 也有同样的性质. 实际上

$$\overline{\Omega_\beta^\alpha} = \mathrm{d}\overline{\omega_\beta^\alpha} - \overline{\omega_\beta^\gamma} \wedge \overline{\omega_\gamma^\alpha} = -\mathrm{d}\omega_\alpha^\beta - \omega_\gamma^\beta \wedge \omega_\alpha^\gamma = -\Omega_\alpha^\beta.$$

用矩阵记法，上面的性质可以表示为

$$\overline{\Omega} = -\Omega^t,$$

这里 Ω^t 表示 Ω 的转置. 因此

$$\overline{\det\left(I + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)} = \det\left(I - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\overline{\Omega}\right)$$

$$= \det\left(I+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega^t\right) = \det\left(I+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right).$$

由 (7.7) 式得知

$$\overline{c_i(\Omega)} = c_i(\Omega), \quad 1\le i\le r,$$

即 $c_i(\Omega)$ 是实值 $2i$ 次闭微分式, 换言之, $c_i(E)=\{c_i(\Omega)\}\in H^{2i}(M,\mathbb{R})$. 证毕.

注记 7.1 还可以证明 $c_i(E)$ 是整系数上同调类, 即 $c_i(E)\in H^{2i}(M,\mathbb{Z})$. 有关的证明细节可以参阅参考文献 [26].

同样的作法也适用于实向量丛, 这是因为表达式 (7.7)、定理 7.1 和定理 7.2 对于实向量丛仍然成立. 设 $\pi: E\to M$ 是光滑流形 M 上的一个实向量丛, 在上面取一个黎曼结构 g, 并设 D 是向量丛 E 上与 g 相容的联络. 设 $\{s_\alpha, 1\le\alpha\le r\}$ 是局部的单位正交标架场, ω_α^β 是 D 关于标架场 $\{s_\alpha\}$ 的联络形式, 则有

$$\omega_\alpha^\beta+\omega_\beta^\alpha=0, \quad \Omega_\alpha^\beta+\Omega_\beta^\alpha=0,$$

即

$$\Omega=-\Omega^t.$$

此时 Ω 是实数值外微分式的矩阵, 故

$$\begin{aligned}\overline{\det\left(I+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)} &= \det\left(I-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)\\ &= \det\left(I+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega^t\right) = \det\left(I+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right).\end{aligned}$$

因此所有的 $c_i(\Omega)$ 都是实的. 另外, 上式还蕴含着

$$\det\left(I-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right) = \det\left(I+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right),$$

展开之后得到

$$c_i(\Omega) = (-1)^i c_i(\Omega), \quad 1\le i\le r.$$

因此, 当 i 是奇数时

$$c_i(\Omega)=0.$$

令

$$p_i(\Omega) = (-1)^i c_{2i}(\Omega), \tag{7.21}$$

则 p_i 是 M 上的 $4i$ 次闭微分式, 称为实向量丛 $\pi: E\to M$ 的 **Pontrjagin 示性式**, 它所决定的 de Rham 上同调类 $p_i(E)=\{p_i(\Omega)\}\in H^{4i}(M;\mathbb{R})$ 称为 E 的第 i 个 **Pontrjagin 示性类**.

定义 7.1 设 M 是 n 维复流形, 则它的切丛 TM 可以看作秩为 n 的复向量丛. 复向量丛 TM 的第 i 个陈类称为 M 的第 i 个陈类, 记为 $c_i(M)$.

例 7.1 Hermite 全纯向量丛的第一陈类.

设 $\pi: E\to M$ 是复流形 M 上的全纯向量丛, h 是该向量丛上的 Hermite 结构. 则在 $\pi: E\to M$ 上存在唯一的一个 Hermite 联络 D(参看定理 3.3).

设 $(U; z^i)$ 是 M 上的局部复坐标系, $\{s_a, 1\le a\le r\}$ 是全纯向量丛 E 在开邻域 U 上的一个全纯标架场. 令

$$h_{ab} = h(s_a, s_b),$$

则 Hermite 联络 D 由

$$\omega_a^b = h^{bc}\frac{\partial h_{ac}}{\partial z^i}\mathrm{d}z^i$$

给出. 根据曲率形式的定义,

$$\sum_a \Omega_a^a = \sum_a \mathrm{d}\omega_a^a = \frac{\partial^2 \ln H}{\partial z^i\partial\overline{z^j}}\mathrm{d}\overline{z^j}\wedge\mathrm{d}z^i,$$

其中 $H=\det(h_{ab})$. 因此 E 的第一陈类由

$$c_1(\Omega) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_a \Omega_a^a = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\frac{\partial^2\ln H}{\partial z^i\partial\overline{z^j}}\mathrm{d}\overline{z^j}\wedge\mathrm{d}z^i \tag{7.22}$$

确定.

作为例 7.1 的特例则有

定理 7.4 设 (M,h) 是 Kähler 流形, ρ 是 (M,h) 的 Ricci 形式, 则 M 的第一陈类 $c_1(M)=-\frac{1}{2}\pi\{\rho\}$.

证明 这是 (4.30) 式和 (7.22) 式的直接推论.

例 7.2 复线丛的陈类.

所谓的 **复线丛** 是指秩为 1 的复向量丛, 它在数学的许多分支中有重要的应用. 尤其是, 在一般复向量丛的陈类计算中, 复线丛陈类的计算是基础.

设 $\pi: E\to M$ 是光滑流形 M 上的复线丛. 设 $\{s\}$ 是 E 的局部标架场, 则 s 是 E 的一个处处不为零的局部截面. 设 D 是该复线丛上的一个联络, 于是联络形式 ω 定义为

$$\mathrm{D}s=\omega s,$$

这里 ω 是在 M 上局部定义的复值 1 次微分式. 相应的曲率形式为

$$\Omega=\mathrm{d}\omega.$$

所以 E 的第一陈类为

$$c_1(E)=\left\{\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right\}. \tag{7.23}$$

在复线丛上取 Hermite 结构 h, 以及关于 h 的酉标架场 $\{s\}$(即 $h(s,s)=1$), 并设 D 是与 h 相容的联络, 则有

$$\omega+\overline{\omega}=0,\quad \Omega+\overline{\Omega}=0,$$

于是 $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega$ 是 M 上的实值 2 次闭微分式.

例 7.3 CP^n 上的典型复线丛.

在 §8.6 已经知道, 对于任意的正数 c, 在 $\mathbb{C}P^n$ 上存在 Fubini-Study 度量使得 $\mathbb{C}P^n$ 成为具有常全纯截面曲率 c 的 Kähler 流形.

$\mathbb{C}P^n$ 可以看作在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的一维复子空间的集合, 并且有自然投影

$$\pi:\mathbb{C}_*^{n+1}=\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}\to\mathbb{C}P^n.$$

$z\in\mathbb{C}_*^{n+1}$ 称为 $[z]=\pi(z)\in\mathbb{C}P^n$ 的 **齐次坐标**. 因此, 在每一点 $p=\pi(z)\in\mathbb{C}P^n$ 处有一个确定的一维复向量空间 $\pi^{-1}(p)\cup\{0\}=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{z\}$, 它们构成 $\mathbb{C}P^n$ 上的一个复线丛 $(E,\tilde{\pi},\mathbb{C}P^n)$, 称为 $\mathbb{C}P^n$ 上的 **典型复线丛**.

令

$$U_\alpha=\{[z^1,\cdots,z^{n+1}]\in\mathbb{C}P^n;\ z^\alpha\neq 0\},\quad 1\le\alpha\le n+1.$$

在 U_α 上的复坐标定义为

$$\xi_\alpha^i=\begin{cases}\dfrac{z^i}{z^\alpha}, & \text{当 } 1\le i<\alpha \text{ 时};\\[2mm] \dfrac{z^{i+1}}{z^\alpha}, & \text{当 } n\ge i\ge\alpha \text{ 时}.\end{cases}$$

由此得到复向量丛 $\tilde{\pi}: E\to\mathbb{C}P^n$ 的局部平凡化映射 $\psi_\alpha: U_\alpha\times\mathbb{C}\to\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$ 是

$$\begin{aligned}&\psi_\alpha([z^1,\cdots,z^{n+1}],\lambda)\\ &=\lambda\left(\frac{z^1}{z^\alpha},\cdots,\frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha},1,\frac{z^{\alpha+1}}{z^\alpha},\cdots,\frac{z^{n+1}}{z^\alpha}\right)\\ &=\frac{\lambda}{z^\alpha}(z^1,\cdots,z^{n+1}),\quad \forall z\in U_\alpha,\ \lambda\in\mathbb{C}.\end{aligned} \tag{7.24}$$

因此, 转移函数是

$$g_{\beta\alpha}(x)=\psi_{\beta,x}^{-1}\circ\psi_{\alpha,x}=\frac{z^\beta}{z^\alpha}=\xi_\alpha^\beta\neq 0,\quad \forall x=[z]\in U_\alpha\cap U_\beta. \tag{7.25}$$

在 $E|_{U_\alpha} = \pi^{-1}(U_\alpha)$ 中引进 Hermite 结构 h, 使得

$$h(\psi_\alpha([z],\lambda),\psi_\alpha([z],\lambda)) = |\psi_\alpha([z],\lambda)|^2 = |\lambda|^2 \sum_{\beta=1}^{n+1} \left|\frac{z^\beta}{z^\alpha}\right|^2.$$

定义

$$h_\alpha([z]) = \sum_{\beta=1}^{n+1} \left|\frac{z^\beta}{z_\alpha}\right|^2, \quad [z] \in U_\alpha. \tag{7.26}$$

这是在 E 上定义好的 Hermite 结构. 实际上, 当 $[z] \in U_\alpha \cap U_\beta$ 时, $\psi_\alpha([z],\lambda) = \psi_\beta([z],\mu)$ 当且仅当 $\mu = \lambda \cdot \dfrac{z^\beta}{z^\alpha}$; 于是

$$|\psi_\beta([z],\mu)|^2 = |\mu|^2 \sum_{\gamma=1}^{n+1} \left|\frac{z^\gamma}{z^\beta}\right|^2 = |\lambda|^2 \sum_{\gamma=1}^{n+1} \left|\frac{z^\gamma}{z^\alpha}\right|^2 = |\psi_\alpha([z],\lambda)|^2.$$

任意固定 α, 命 $U = U_\alpha$, 只要在 U 中计算即可, 其余情形是一样的. 在 U 上, Hermite 结构 h 的分量是

$$h_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n+1} \left|\frac{z^\beta}{z^\alpha}\right|^2 = 1 + \sum_{i=1}^{n} |\xi^i|^2, \tag{7.27}$$

其中 $\xi^i = \xi^i_\alpha$. 根据推论 3.4 中的 (3.29) 式, 在 E 上与 Hermite 结构 h 相容的 (1,0) 型联络形式是

$$\omega = h_\alpha^{-1} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \xi^j} \mathrm{d}\xi^j = \frac{\sum_j \overline{\xi}^j \mathrm{d}\xi^j}{1 + \sum_{k=1}^{n} |\xi^k|^2}, \tag{7.28}$$

曲率形式为

$$\begin{aligned}\Omega =& \mathrm{d}\omega = \frac{\partial^2 \ln h_\alpha}{\partial \xi^j \partial \overline{\xi^i}} \mathrm{d}\overline{\xi}^i \wedge \mathrm{d}\xi^j \\ =& -\frac{(1 + \sum_k |\xi^k|^2) \sum_j \mathrm{d}\xi^j \wedge \mathrm{d}\overline{\xi}^j - \sum_{i,j} \xi^i \overline{\xi}^j \mathrm{d}\xi^j \wedge \mathrm{d}\overline{\xi}^i}{(1 + \sum_k |\xi^k|^2)^2}.\end{aligned} \tag{7.29}$$

把 (7.29) 与 Fubini-Study 度量的 Kähler形式 k 相对照便知 (参看 (6.13) 和 (6.14) 两式)

$$\Omega = -\frac{\sqrt{-1}\,c}{2} k. \tag{7.30}$$

因此由例 7.2, $\mathbb{C}P^n$ 的典型复线丛的第一陈类是

$$c_1 = \left\{\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right\} = \frac{c}{4\pi}\{k\}, \tag{7.31}$$

其中 k 是 $\mathbb{C}P^n$ 在 Fubini-Study 度量下的 Kähler形式.

特别地, 若取 $c = 4$, 则有

$$c_1 = \frac{1}{\pi}\{k\}. \tag{7.32}$$

习　题　八

1. 设 V 是复向量空间, 同时 V 也是实向量空间 (此时把它记为 $V_{\mathbb{R}}$), $V^{\mathbb{C}}$ 是 $V_{\mathbb{R}}$ 的复化空间. V 的典型复结构 J 经复线性扩张后成为 $V^{\mathbb{C}}$ 上的复结构 $\tilde{J}$. 用 $V^{(1,0)}$ 表示 $\tilde{J}$ 的对应于特征根 $\sqrt{-1}$ 的所有特征向量构成的集合, 即

$$V^{(1,0)} = \{v \in V^{\mathbb{C}};\ \tilde{J}(v) = \sqrt{-1}\,v\}.$$

证明:

(1) $V^{(1,0)}$ 是 $V^{\mathbb{C}}$ 的复向量子空间.

(2) 对于任意的 $X \in V_{\mathbb{R}} = V$, 令 $\Phi(X) = \frac{1}{2}(X - \sqrt{-1}\,JX)$, 则由 $X \mapsto \Phi(X) \in V^{(1,0)}$ 确定的映射 $\Phi: V \to V^{(1,0)}$ 是复线性同构.

2. 设 V^* 是实向量空间 V 的对偶空间. 证明: V^* 的复化空间 $(V^*)^{\mathbb{C}}$ 恰好是由 V 上的复值实线性函数构成的.

3. 设 V 是复向量空间, h 是 V 上的一个 Hermite 内积, $g = \mathrm{Re}(h)$ 是 h 的实部. 又设 $V^{\mathbb{C}}$ 是实向量空间 $V_{\mathbb{R}}$ 的复化空间. 把 g 进行复线

性扩张，得到 $V^{\mathbb{C}}$ 上的双复线性形式 $\tilde{g}$(称为 $V^{\mathbb{C}}$ 上的对称内积). 定义映射 $\tilde{h}: V^{\mathbb{C}}\times V^{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}$, 使得

$$\tilde{h}(X,Y)=\tilde{g}(X,\overline{Y}),\quad \forall X,Y\in V^{\mathbb{C}},$$

其中 $\overline{Y}$ 表示 $V^{\mathbb{C}}$ 中向量 Y 的复共轭. 证明:

(1) $\tilde{h}$ 是 $V^{\mathbb{C}}$ 上的 Hermite 内积，它在 $V^{(1,0)}$ 上的限制是 $V^{(1,0)}$ 上的 Hermite 内积.

(2) 通过复线性同构 Φ(见上页第 1 题的 (2)), Hermite 内积 h 在 $V^{(1,0)}$ 上诱导出一个 Hermite 内积，仍记为 h, 则在 $V^{(1,0)}$ 上有 $h=2\tilde{h}$.

4. 设 M 是 n 维复流形， $p\in M$, $(U;z^i)$ 是 p 点附近的复坐标系. 证明:

(1) 设 $(U;z^i)$ 是包含点 p 的复坐标系，则对于任意的 $f\in\mathcal{O}_p$ 有

$$f(q)=f(p)+\sum_{i=1}^{n}(z^i(q)-z^i(p))F_i(q),$$

其中 $F_i\in\mathcal{O}_p$, 并且 $F_i(p)=\left.\dfrac{\partial f}{\partial z^i}\right|_p$.

(2) M 在 p 点的全体复切向量构成一个复向量空间 T_p^hM.

(3) $\left\{\dfrac{\partial}{\partial z^i}|_p;\ 1\le i\le n\right\}$ 是复向量空间 T_p^hM 的一个基底，因而 $\dim T_p^hM=n$.

5. 证明命题 2.2 的结论.

6. 证明等式 (2.40).

7. 证明：例 3.3 中给出的复切丛 T^hM 和 (1,0) 切丛 $T^{(1,0)}M$ 是 M 上的全纯向量丛.

8. 设 M 是复流形，J 是 M 上的典型复结构. 对于任意的 $p\in M$, 在余切空间 $T_p{}^*M$ 上由 J 诱导的复结构仍记为 J. 把 (T_p^*M,J) 看作复向量空间. 在此意义下，证明：余切丛 T^*M 是 M 上的全纯向量丛.

9. 设 M 是复流形，定义

$$T^{*(1,0)}M=\bigcup_{p\in M}T_p^{*(1,0)}M,\quad T^{*(0,1)}M=\bigcup_{p\in M}T_p^{*(0,1)}M,$$
$$(T^*M)^{\mathbb{C}}=\bigcup_{p\in M}(T_p^*M)^{\mathbb{C}}.$$

证明:

(1) $T^{*(1,0)}M$, $T^{*(0,1)}M$ 和 $(T^*M)^{\mathbb{C}}$ 都是 M 上的复向量丛.

(2) $T^{*(1,0)}M$ 是 M 上的全纯向量丛.

10. 证明命题 3.1.

11. 设 D 是 Hermite 向量丛 (E,h) 上的一个复联络，g 是 Hermite 结构 h 的实部. 证明： D 是 Hermite 结构 h 的容许联络当且仅当 D 与黎曼结构 g 是相容的.

12. 设 F 是复流形 M 上的一个实值光滑函数，并且对于任意的局部复坐标系 $(U;z^i)$, $\left(\dfrac{\partial^2F}{\partial z^i\partial\overline{z^j}}\right)$ 是正定的 Hermite 矩阵. 令 $h_{ij}=\dfrac{\partial^2F}{\partial z^i\partial\overline{z^j}}$. 证明： $h=h_{ij}\mathrm{d}z^i\otimes\mathrm{d}\overline{z^j}$ 与局部复坐标系 $(U;z^i)$ 的选取无关，并且 (M,h) 是一个 Kähler 流形.

13. 设 G 是一个复流形，同时又是一个群. 此时，乘积空间 $G\times G$ 具有自然的复流形结构. 如果 G 的乘法运算 $(g_1,g_2)\mapsto g_1g_2$ 以及求逆运算 $g\mapsto g^{-1}$ 都是全纯映射，则称 G 是一个 **复李群**. 显然，每一个复李群都是 (实) 李群 (参看第一章习题中的第 44 题). 设 J 是 G 上由复流形结构确定的典型复结构， L_a 和 $R_a: G\to G$ $(a\in G)$ 分别是 G 上的左移动和右移动， $\mathrm{ad}(a)=L_a\circ R_{a^{-1}}$ 是 G 上的内自同构. $\mathrm{Ad}(a)=(\mathrm{ad}(a))_*$ 是 G 的伴随表示.

(1) 证明： L_a, R_a 和 $\mathrm{Ad}(a)$ 均保持 J-不变，即有

$$(L_a)_*\circ J=J\circ(L_a)_*,\quad (R_a)_*\circ J=J\circ(R_a)_*,$$
$$\mathrm{Ad}(a)\circ J=J\circ\mathrm{Ad}(a).$$

(2) 设 $\mathrm{M}(m,n;\mathbb{C})$ 是全体 $m\times n$ 复矩阵构成的集合，

$$\mathrm{M}(n,\mathbb{C})=\mathrm{M}(n,n;\mathbb{C}),\quad \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})=\{a\in\mathrm{M}(n,\mathbb{C});\ \det(a)\neq 0\}.$$

证明： $\mathrm{M}(m,n;\mathbb{C})$ 和 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 分别关于矩阵加法和乘法是复李群；其中 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 等同于 $\mathbb{C}^n$ 上的非退化复线性变换构成的乘法群，称为**复一般线性群**.

14. 设 H 和 G 都是复李群， $H\subset G$. 如果 H 是 G 的子群并且包含映射 $i:H\to G$ 是全纯浸入，则称 H 是 G 的 **复李子群**. 显然，G 的任意一个复李子群必定是 G 的 (实) 李子群 (参看第一章习题中的第 46 题). 定义

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})=\{A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C});\ \det A=1\},$$
$$\mathrm{O}(n,\mathbb{C})=\{A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C});\ AA^t=I_n\},$$
$$\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})=\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})\cap\mathrm{O}(n,\mathbb{C}).$$

证明： $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$ 和 $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$ 都是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的复李子群，同时，$\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$ 又是 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 和 $\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$ 的复李子群. $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$ 和 $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$ 分别称为 n 阶 **复特殊线性群**, **复正交群** 和 **复特殊正交群**.

15. 证明：第 14 题中定义的复一般线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是 (实) 一般线性群 $\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$ 的 $2n^2$ 维 (实) 李子群 (参看第一章习题中的第 44 题和第 46 题).

16. 设 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 上的标准 Hermite 内积，即对于任意的 $z=(z^1,\cdots,z^n)$, $w=(w^1,\cdots,w^n)\in\mathbb{C}^n$, 有

$$\langle z,w\rangle=z^1\overline{w^1}+\cdots+z^n\overline{w^n}.$$

定义

$$\mathrm{U}(n)=\{A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C});\ \langle z\cdot A,w\cdot A\rangle=\langle z,w\rangle,\ \forall z,w\in\mathbb{C}^n\},$$
$$\mathrm{SU}(n)=\{A\in\mathrm{U}(n);\ \det A=1\}.$$

证明： $\mathrm{U}(n)$ 和 $\mathrm{SU}(n)$ 都是李群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的 (实) 李子群，同时，$\mathrm{SU}(n)$ 又是 $\mathrm{U}(n)$ 的 (实) 李子群. $\mathrm{U}(n)$ 和 $\mathrm{SU}(n)$ 分别称为 n 阶 **酉群** 和 **特殊酉群**.

17. 设 M 是连通的 Kähler 流形，其复维数不小于 2. 证明：如果在每一点点 $p\in M$, M 在点 p 的全纯截面曲率与全纯截面的取法无关，则 M 的全纯截面曲率为常数.

18. 证明定理 5.5′.

19. 设 M 是具有常全纯截面曲率 c 的 n 维 Kähler 流形， $n>1$. 证明：如果 M 作为黎曼流形具有常截面曲率，则它必是平坦的，并且 $c=0$.

20. 设 $\mathbb{C}P^n$ 是在例 6.2 中定义的商空间， $\mathscr{T}$ 是相应的商拓扑，映射 $\varphi_\alpha:U_\alpha\to\mathbb{C}^n$ 由 (6.4), (6.5) 式定义. 证明：

(1) $\mathscr{T}$ 可以等价地表示为

$$\mathscr{T}=\{V\subset\mathbb{C}P^n;\ \varphi_\alpha(V\cap U_\alpha)\text{是}\mathbb{C}^n\text{中的开集},\quad 1\leq\alpha\leq n+1\};$$

由此说明，对于每一个 α: $1\leq\alpha\leq n+1$, 映射 $\varphi_\alpha:U_\alpha\to\mathbb{C}^n$ 是同胚.

(2) 自然射影 $\pi:\mathbb{C}_*^{n+1}\to\mathbb{C}P^n$ 是连续的开映射；进一步说明，相对于在例 6.2 中确定的复流形结构，映射 π 是全纯的.

21. 设 $\mathbb{C}P^n$ 是具有 Fubini-Study 度量的复射影空间 (参看例 6.2), 试求 $\mathbb{C}P^n$ 的 Ricci 形式的表达式.

22. 证明：在例 6.3 中定义的 $\mathrm{U}(n+1,1)$ 是复一般线性群 $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})$ 的 (实) 李子群.

23. 证明：复环面 $\mathbb{C}T^n$ 是紧致连通复李群. 此结论之逆也是成立的，即：任何连通的紧致复李群全纯等价于一个复环面 (其证明参看参考文献 [29, Vol.II, 第 131 页]).

24. 在复环面 $\mathbb{C}T^n$ 上定义一个 Hermite 结构 h, 使得 π^*h 是 $\mathbb{C}^n$ 上的标准 Hermite 度量，其中 $\pi:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}T^n$ 是自然投影.

25. 设 M 是 Kähler 流形，如果 M 的 Ricci 形式是 Kähler 形式 k 的常数倍，则称 M 是 **Kähler-Einstein 流形**. 证明：

(1) Kähler 流形 M 是 Kähler-Einstein 流形当且仅当 M 作为黎曼流形是 Einstein 流形.

(2) n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$, 复射影空间 $\mathbb{C}P^n$, 复双曲空间 D^n 以及复环面 $\mathbb{C}T^n$ 都是 Kähler-Einstein 流形.

26. 设 (M,g) 是一个有向的二维黎曼流形. 证明: 在 M 上存在一个自然的复流形结构, 使得 M 关于度量 g 成为一维 Kähler 流形.

27. 设 D^n 是复双曲空间, $\tilde{D}$, $\tilde{D}^n$ 以及映射 $\pi:\tilde{D}\to\tilde{D}^n$ 和 $\psi:D^n\to\tilde{D}^n$ 由例 6.3 给出.

(1) 证明: 映射 ψ 是从 D^n 到 $\tilde{D}^n$ 上的双全纯映射.

(2) 对于任意的 $T\in \mathrm{U}(n+1,1)$, 如果把 T 写成如下的分块矩阵

$$T=\begin{pmatrix} A & B\\ C & d\end{pmatrix},\quad 其中\ A\in \mathrm{M}(n,\mathbb{C}),$$

证明: 对于任意的 $z\in D^n$, $z\cdot B+d$ 不等于零, 并且 $\frac{z\cdot A+C}{z\cdot B+d}\in D^n$.

(3) $\mathrm{U}(n+1,1)$ 在 D^n 上的作用定义为:

$$T(z)=\psi^{-1}([(z^1,\cdots,z^n,1)\cdot T]),$$
$$\forall z=(z^1,\cdots,z^n)\in D^n,\qquad \forall T\in \mathrm{U}(n+1,1),$$

证明: 如果 $T=\begin{pmatrix} A & B\\ C & d\end{pmatrix}$, $A\in \mathrm{M}(n,\mathbb{C})$, 则 $T(z)=\frac{z\cdot A+C}{z\cdot B+d}$.

28. 证明: 例 6.5 中定义的 $\mathrm{U}(p+q,q)$ 是复一般线性群 $\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{C})$ 的 (实) 李子群.

29. 设 $D_{p,q}$ 是例 6.5 中定义的典型域, $\mathrm{U}(p+q,q)$ 由 (6.29) 确定. 证明:

(1) 对于任意的 $T\in \mathrm{U}(p+q,q)$, 由 (6.32) 式定义的映射 $\Phi_T: D_{p,q}\to D_{p,q}$ 既是可逆的, 也是双全纯的.

(2) $\mathrm{U}(p+q,q)$ 在 $D_{p,q}$ 上的作用是可迁的.

30. 求典型域 $D_{p,q}$ 在点 $Z=0$ 处的全纯截面曲率和 Ricci 形式; 由此进一步判定 $D_{p,q}$ 是否为 Kähler-Einstein 流形.

31. 设 N 是 Kähler 流形, M 是 N 的 Kähler 子流形. 证明: 如果 N 作为黎曼流形是平坦的, 则 M 的 Ricci 曲率张量 Ric_M 是负半定的, 即对于任意的 $X\in\mathfrak{X}(M)$, $\mathrm{Ric}_M(X,X)\le 0$.

32. 设 N 是具有常全纯截面曲率 c 的 Kähler 流形, M 是 N 的一个 m 维 Kähler 子流形. 对于任意的 $x\in M$, 取定 $X_1,\cdots,X_m\in T_xM$, 使得 $\{X_1,\cdots,X_m,JX_1,\cdots,JX_m\}$ 构成 T_xM 的一个单位正交基. 证明: M 的 Ricci 曲率张量 Ric_M 由下式给出:

$$\mathrm{Ric}_M(X,X)=\frac{1}{2}(m+1)cg(X,X)-2\sum_{i=1}^{m}g(B(X_i,X),B(X_i,X)),$$

其中 B 是子流形 M 在 N 中的第二基本形式.

33. 试推导 Kähler 流形 N 及其 Kähler 子流形 M 的 Ricci 形式之间的关系式.

34. 设 D 是复向量丛 $\pi:E\to M$ 上的复联络, $\mathcal{R}$ 是 D 的曲率算子, Ω_α^β 是 D 关于局部标架场 $\{s_\alpha\}$ 的曲率形式. 证明: 对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, $\mathcal{R}(X,Y)s_\alpha=\Omega_\alpha^\beta(X,Y)s_\beta$.

35. 设 $c_i=c_i(\Omega)$ 和 $b_i=b_i(\Omega)$ 分别是由 (7.7) 式和 (7.10) 式定义的 $2i$ 次外微分式. 证明: b_i 是 $c_1,\cdots,c_i$ 的整系数多项式, c_i 是 $b_1,\cdots,b_i$ 的有理数系数多项式.

36. 设 $\Omega=(\Omega_\beta^\alpha)$ 是复向量丛 $\pi:E\to M$ 在一个局部标架场下的曲率矩阵. 证明: E 的陈示性式具有如下的表达式:

$$c_i(\Omega)=\frac{1}{i!}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^i\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_i}_{\beta_1\cdots\beta_i}\Omega^{\beta_1}_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\Omega^{\beta_i}_{\alpha_i}.$$

37. 设 D 和 D_1 是复向量丛 $\pi:E\to M$ 上的两个复联络. 试用定理 7.1 和定理 7.2 的证明方法直接说明: (1) 每一个陈示性式 $c_i(E,\mathrm{D})$ 是闭形式; (2) $c_i(E,\mathrm{D})-c_i(E,\mathrm{D}_1)$ 是恰当形式.

38. 设 E_1 和 E_2 是光滑流形 M 上的复向量丛, 试求直和 $E_1\oplus E_2$ 的陈类.

39. 设 $f: M \to N$ 是光滑流形间的光滑映射， $\pi: E \to N$ 是复向量丛， D 是 E 上的复联络. 证明:

(1) 拉回向量丛 f^*E 是 M 上的一个复向量丛, 并且联络 D 在 f^*E 上的诱导联络 $\tilde{\mathrm{D}}$ 也是一个复联络.

(2) $c_i(f^*E) = f^*(c_i(E))$.

40. 设 E 是光滑流形 M 上的一个秩为 q 的复向量丛， L 是 M 上的一个复线丛. 证明:

$$c_1(E \otimes L) = c_1(E) + q \cdot c_1(L).$$

41. 设 $\pi: E \to M$ 是光滑流形 M 上的一个秩为 q 的复向量丛.

(1) 仿照实向量丛的情形, 定义复向量丛 E 的对偶复向量丛 E^*.

(2) 证明: $c_i(E^*) = (-1)^i c_i(E)$.

42. 设 T^*M 是复流形 M 的余切向量丛, 它是 M 上的秩为 $n = \dim_{\mathbb{C}} M$ 的全纯向量丛.

(1) 证明: $\bigwedge^n T^*M$ 是 M 上的一个全纯线丛.

(2) 求复线丛 $\bigwedge^n T^*M$ 的第一陈类.

第九章 黎曼对称空间

在第五章我们已经知道最重要、最简单的黎曼流形是所谓的空间形式, 即完备、单连通的常曲率空间 $\mathbb{R}^n$, S^n 和 H^n. 在本章, 我们将把空间形式纳入一类更广的特殊黎曼空间——黎曼对称空间. 在这类空间上有等距变换群的可迁作用, 对这类空间的研究与李群、李代数理论有密切的关系, 而且这类空间中的子流形微分几何、该空间上的函数论以及谱几何都是当前重要的研究课题. 因此, 熟悉黎曼对称空间的基本理论对于深入地开展大范围分析的研究工作有重要的意义. 本章的目的是介绍黎曼对称空间的基本概念和性质, 并且把黎曼对称空间的研究转化为对应的李群、李代数理论的研究.

§9.1 定义和例子

先从欧氏空间谈起. 设 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维欧氏空间, 它同时又是一个实向量空间. 分别用 d 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示其中的距离和标准内积. 对于任意取定的一点 $p \in \mathbb{R}^n$, 都有 $\mathbb{R}^n$ 关于点 p 的 "中心对称" $\sigma_p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, 它把任意一点 $q \in \mathbb{R}^n$ 映为点 $q' = \sigma_p(q)$, 使得有向线段 $\overrightarrow{pq'} = -\overrightarrow{pq}$. 从几何上来讲, 关于点 p 的中心对称 σ_p 就是 $\mathbb{R}^n$ 关于点 p 的反射变换.

如果在 $\mathbb{R}^n$ 中取以点 p 为原点的笛卡儿直角坐标系 (x^i), 则上面引入的关于点 p 的中心对称 σ_p 可以用坐标表示为

$$\sigma_p(x^1, \cdots, x^n) = (-x^1, \cdots, -x^n).$$

显然, 中心对称 σ_p 具有下列性质:

(1) σ_p 是等距变换, 即对于任意的 $q, \tilde{q} \in \mathbb{R}^n$, 距离 $d(\sigma_p(q), \sigma_p(\tilde{q})) = d(q, \tilde{q})$. 或等价地讲, 对于在 $\mathbb{R}^n$ 的任意一点 q 处的任意两个切向量 X, Y, 都有 $\langle(\sigma_p)_{*q}(X), (\sigma_p)_{*q}(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle$. 这里需要特别指出的是,

由于目前的 σ_p 是一个线性映射，它的切映射 $(\sigma_p)_{*q}$ 和它自身是等同的；

(2) $\sigma_p\circ\sigma_p=\mathrm{id}$，即 σ_p 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个对合变换；

(3) p 是 σ_p 的孤立不动点，即 $\sigma_p(p)=p$，并且在点 p 的一个邻域内除点 p 以外 σ_p 没有其他不动点.

在黎曼流形上仍然可以定义具有上述性质的变换.

定义 1.1　设 (M,g) 是 m 维黎曼流形，$p\in M$. 若有映射 $\sigma_p: M\to M$ 满足下列条件，则称映射 σ_p 是 M 关于点 p 的 **中心对称**:

(1) σ_p 是黎曼流形 (M,g) 到它自身的等距变换，即 $\sigma_p: M\to M$ 是光滑同胚，并且满足 $\sigma_p^*(g)=g$;

(2) σ_p 是 **对合**，即 $\sigma_p\circ\sigma_p=\mathrm{id}$;

(3) p 是 σ_p 的孤立不动点，即 $\sigma_p(p)=p$，并且存在点 p 的一个邻域 U，使得 σ_p 在 U 内除点 p 以外 σ_p 没有其他不动点.

如果 M 有关于点 $p\in M$ 的中心对称，则称黎曼流形 (M,g) 关于点 p 是对称的.

定义 1.2　如果黎曼流形 (M,g) 关于它的每一点都是对称的，则称 (M,g) 是 **黎曼对称空间**.

显然，欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是黎曼对称空间.

例 1.1　n 维单位球面 S^n.

设 S^n 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中以原点为中心的单位球面，即

$$S^n=\left\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1};\ \sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2=1\right\}.$$

对于任意的 $p\in S^n$，用 $\tilde\sigma_p$ 记 $\mathbb{R}^{n+1}$ 关于直线 Op 的对称，即对于任意的 $q\in\mathbb{R}^{n+1}$，$q'=\sigma_p(q)$ 满足条件

$$\overrightarrow{Oq'}=-\overrightarrow{Oq}+2\langle\overrightarrow{Oq},\overrightarrow{Op}\rangle\overrightarrow{Op},$$

则 $\tilde\sigma_p$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 到它自身的等距变换，并把 S^n 映到它自己.

令 $\sigma_p=\tilde\sigma|_{S^n}$，则 $\sigma_p: S^n\to S^n$ 仍然是等距变换，并且 $\sigma_p(p)=p$. 由于 $\sigma_p\circ\sigma_p=\tilde\sigma_p\circ\tilde\sigma_p|_{S^n}=\mathrm{id}$，所以 σ_p 是对合. 因为 $\tilde\sigma_p$ 以直线 Op 为不动点集，所以 σ_p 的不动点是直线 Op 与 S^n 的交点，也就是点 p 自身及其对径点 $-p$，因而 p 是 σ_p 的孤立不动点. 根据定义，σ_p 是 S^n 关于点 p 的中心对称. 由于点 p 在 S^n 上的任意性，故 S^n 是黎曼对称空间.

例 1.2　双曲空间 $H^n(1)$.

在 §2.2 中已经给出过双曲空间 $H^n(1)$ 的模型. 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中定义 Lorentz 内积为

$$\langle x,y\rangle_1=\sum_{i=1}^n x^iy^i-x^{n+1}y^{n+1},$$

记 $\mathbb{R}_1^{n+1}=(\mathbb{R}^{n+1},\langle\cdot,\cdot\rangle)$，并设

$$H^n(1)=\{x=(x^1,\cdots,x^{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}:\langle x,x\rangle_1=-1,\ \text{并且}\ x^{n+1}>0\}.$$

将 Lorentz 内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ 通过包含映射 $\mathrm{i}: H^n(1)\to\mathbb{R}^{n+1}$ 在 $H^n(1)$ 上的诱导度量记为 g，它具有常截面曲率 -1. 设 $p_0=(0,\cdots,0,1)$，则在 $\mathbb{R}_1^{n+1}$ 上关于直线 Op_0 的对称 $\tilde\sigma_0$ 是它到自身的等距对应，且保持 $H^n(1)$ 不变. 令 $\sigma_0=\tilde\sigma_0|_{H^n(1)}$，则 σ_0 是 $(H^n(1),g)$ 到它自身的等距变换，以 p_0 为仅有的不动点，并且 $\sigma_0\circ\sigma_0=\mathrm{id}$，所以 σ_0 是关于点 p_0 的中心对称. 利用 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的坐标系，映射 $\sigma_0: H^n(1)\to H^n(1)$ 的表达式是

$$\sigma_0(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1})=(-x^1,\cdots,-x^n,x^{n+1}),$$
$$\forall(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1})\in H^n(1).$$

$H^n(1)$ 的坐标映射 $\varphi: H^n(1)\to\mathbb{R}^n$ 是

$$\varphi(x^1,\cdots,x^{n+1})=\left(\frac{x^1}{1+x^{n+1}},\cdots,\frac{x^n}{1+x^{n+1}}\right),$$

其逆映射为

$$\varphi^{-1}(\xi^1,\cdots,\xi^n)=\left(\frac{2\xi^1}{1-\sum(\xi^i)^2},\cdots,\frac{2\xi^n}{1-\sum(\xi^i)^2},\frac{1+\sum(\xi^i)^2}{1-\sum(\xi^i)^2}\right),$$

其中 $(\xi^1,\cdots,\xi^n)\in\mathbb{R}^n$ 并且 $\sum(\xi^i)^2<1$. 这样, 在 $H^n(1)$ 的坐标系 (ξ^i) 下, 映射 σ_0 的坐标表达式是

$$\varphi\circ\sigma_0\circ\varphi^{-1}(\xi^1,\cdots,\xi^n)=(-\xi^1,\cdots,-\xi^n).$$

由此可见

$$(\sigma_0)_{*p_0}=-\mathrm{id}:T_{p_0}H^n(1)\to T_{p_0}H^n(1).$$

设 p 是 $H^n(1)$ 中的任意一点, 由于常曲率空间的等距变换群的作用是可迁的 (参看第五章的定理 5.4), 故存在等距变换 $\tau:H^n(1)\to H^n(1)$, 使得 $\tau(p)=p_0$. 令

$$\sigma_p=\tau^{-1}\circ\sigma_0\circ\tau, \tag{1.1}$$

则 $\sigma_p:H^n(1)\to H^n(1)$ 是以 p 为孤立不动点的等距变换, 并且 $\sigma_p\circ\sigma_p=\mathrm{id}$, 所以 σ_p 是关于点 p 的中心对称. 由点 p 在 $H^n(1)$ 上的任意性便知, 双曲空间 $H^n(1)$ 是黎曼对称空间.

定义 1.3 如果黎曼流形 (M,g) 有一个可迁地作用在 M 上的李氏变换群, 而且每一个群元素在 M 上的作用是 M 的等距变换, 则称它为**齐性黎曼空间**.

于是, 前面的推理过程在实际上已经证明了如下的命题:

命题 1.1 关于一点对称的齐性黎曼空间是黎曼对称空间.

为了获得黎曼对称空间的更多的例子, 需要对黎曼对称空间的几何性质有更加深入的了解; 同时需要建立黎曼对称空间和李群、李代数理论之间的联系.

§9.2 黎曼对称空间的性质

对于任意一个黎曼流形 (M,g), 用 $I(M)$ 表示它的等距变换群, 即它是由 (M,g) 上的等距变换的全体关于映射的复合构成的群.

如果 (M,g) 是黎曼对称空间, 则对于每一点 $p\in M$ 都有中心对称 σ_p. 因为中心对称是非平凡的等距变换, 所以黎曼对称空间的等距变换群是非平凡的.

引理 2.1 设 (M,g) 是黎曼对称空间, $p\in M$, σ_p 是 M 关于点 p 的中心对称, 则

$$(\sigma_p)_{*p}=-\mathrm{id}:T_pM\to T_pM. \tag{2.1}$$

证明 由于 p 是 σ_p 的孤立不动点, 故有点 p 的一个开邻域 U, 使得 σ_p 在 U 中除 p 以外没有其他的不动点. 因为 $\sigma_p(p)=p$, 所以它的切映射 $(\sigma_p)_{*p}$ 是 T_pM 到它自身的等距线性同构. 由 $\sigma_p\circ\sigma_p=\mathrm{id}$ 可知, $(\sigma_p)_{*p}\circ(\sigma_p)_{*p}=\mathrm{id}$, 即 $(\sigma_p)_{*p}$ 也是对合. 令

$$\begin{aligned}V^+&=\{v\in T_pM:(\sigma_p)_{*p}(v)=v\},\\ V^-&=\{v\in T_pM:(\sigma_p)_{*p}(v)=-v\},\end{aligned} \tag{2.2}$$

则 $V^+\cap V^-=\{0\}$. 对于任意的 $v\in T_pM$, 利用 $(\sigma_p)_{*p}$ 的对合性容易看出

$$v+(\sigma_p)_{*p}v\in V^+,\quad v-(\sigma_p)_{*p}v\in V^-. \tag{2.3}$$

因为

$$v=\frac{1}{2}(v+(\sigma_p)_{*p}(v))+\frac{1}{2}(v-(\sigma_p)_{*p}(v)), \tag{2.4}$$

所以 $T_pM=V^+\oplus V^-$. 下面要证明 $V^+=\{0\}$.

如若不然, 则有 $v\in V^+, v\neq 0$. 考虑测地线 $\gamma(t)=\exp_p(tv)$. 由于 σ_p 是等距变换, $\sigma_p(\gamma(t))$ 仍然是 (M,g) 上的一条测地线. 它的起始点和初始切向量分别是

$$\sigma_p(\gamma(0))=\sigma_p(p)=p=\gamma(0),$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\sigma_p(\gamma(t)))=(\sigma_p)_{*p}(\gamma'(0))=(\sigma_p)_{*p}(v)=v=\gamma'(0).$$

因为测地线是由其起始点和初始切向量唯一确定的，所以

$$\sigma_p(\gamma(t)) = \gamma(t).$$

这说明 $\gamma(t)$ 上的点都是 σ_p 的不动点，与 p 是 σ_p 的孤立不动点相矛盾.

由此可见，$T_pM = V^-$, 即 $(\sigma_p)_{*p} = -\mathrm{id} : T_pM \to T_pM$. 证毕.

注记 2.1 从上面的证明过程不难看出，σ_p 把每一条经过点 p 的测地线反向，即

$$\sigma_p(\exp_p(tv)) = \exp_p(t(\sigma_p)_{*p}v) = \exp_p(-tv). \tag{2.5}$$

如果令 $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, 则上式成为

$$\sigma_p(\gamma(t)) = \gamma(-t). \tag{2.6}$$

设 $(U; x^i)$ 是在点 p 处的法坐标系，则测地线 $\gamma(t)$ 的参数方程为

$$x^i(t) = x^i(\gamma(t)) = x^i(\exp_p(tv)) = tv^i, \tag{2.7}$$

因而 $\gamma(-t)$ 的参数方程是

$$x^i(-t) = x^i(\gamma(-t)) = -tv^i = -x^i(t), \tag{2.8}$$

于是 (2.6) 式成为

$$\sigma_p(x^1(t), \cdots, x^m(t)) = (x^1(-t), \cdots, x^m(-t)) = (-x^1(t), \cdots, -x^m(t)).$$

因此，中心对称 σ_p 在法坐标系 $(U; x^i)$ 下的表达式是

$$\sigma_p(x^1, \cdots, x^m) = (-x^1, \cdots, -x^m). \tag{2.9}$$

定理 2.2 设 (M, g) 是黎曼对称空间，$\mathcal{R}$ 是它的曲率张量，则对于任意的 $Z \in \mathfrak{X}(M)$ 都有 $\mathrm{D}_Z\mathcal{R} = 0$, 即 $\mathrm{D}\mathcal{R} = 0$.

证明 根据张量的协变导数的定义，$\mathcal{R}$ 和 $\mathrm{D}_Z\mathcal{R}$ 都是 (1,3) 型张量场. 对于任意的 $X, Y, W \in \mathfrak{X}(M)$ 有

$$\begin{aligned}&((\mathrm{D}_Z\mathcal{R})(X,Y))W \\ &\quad= \mathrm{D}_Z(\mathcal{R}(X,Y)W) - \mathcal{R}(\mathrm{D}_ZX,Y)W \\ &\qquad - \mathcal{R}(X,\mathrm{D}_ZY)W - \mathcal{R}(X,Y)(\mathrm{D}_ZW).\end{aligned} \tag{2.10}$$

设 $\sigma \in I(M)$, 则 σ 保持 (M, g) 上的黎曼联络 D 不变，即对于任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ 有

$$\mathrm{D}_{\sigma_*X}(\sigma_*Y) = \sigma_*(\mathrm{D}_XY). \tag{2.11}$$

因此对于任意的 $X, Y, W \in \mathfrak{X}(M)$ 有

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}(\sigma_*X, \sigma_*Y)(\sigma_*W) \\ &\quad= (\mathrm{D}_{\sigma_*X} \circ \mathrm{D}_{\sigma_*Y} - \mathrm{D}_{\sigma_*Y} \circ \mathrm{D}_{\sigma_*X} - \mathrm{D}_{[\sigma_*X,\sigma_*Y]})(\sigma_*W) \\ &\quad= \sigma_*(\mathcal{R}(X,Y)W),\end{aligned} \tag{2.12}$$

结合 (2.10) 和 (2.12) 两式得到

$$\begin{aligned}&((\mathrm{D}_{\sigma_*Z}\mathcal{R})(\sigma_*X,\sigma_*Y))(\sigma_*W) \\ &\quad= \mathrm{D}_{\sigma_*Z}(\mathcal{R}(\sigma_*X,\sigma_*Y)(\sigma_*W)) - \mathcal{R}(\mathrm{D}_{\sigma_*Z}(\sigma_*X),\sigma_*Y)(\sigma_*W) \\ &\qquad - \mathcal{R}(\sigma_*X,\mathrm{D}_{\sigma_*Z}(\sigma_*Y))(\sigma_*W) - \mathcal{R}(\sigma_*X,\sigma_*Y)(\mathrm{D}_{\sigma_*Z}(\sigma_*W)) \\ &\quad= \mathrm{D}_{\sigma_*Z}(\sigma_*(\mathcal{R}(X,Y)W) - \sigma_*\mathcal{R}(\mathrm{D}_ZX,Y)W) \\ &\qquad - \sigma_*(\mathcal{R}(X,\mathrm{D}_ZY)W) - \sigma_*(\mathcal{R}(X,Y)(\mathrm{D}_ZW)) \\ &\quad= \sigma_*(((\mathrm{D}_Z\mathcal{R})(X,Y))W),\end{aligned}$$

即对于任意的 $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, 有

$$\sigma_*^{-1} \circ ((\mathrm{D}_{\sigma_*Z}\mathcal{R})(\sigma_*X,\sigma_*Y))(\sigma_*W) = ((\mathrm{D}_Z\mathcal{R})(X,Y))W. \tag{2.13}$$

注意到 $((\mathrm{D}_Z\mathcal{R})(X,Y))W$ 关于四个自变量 $X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M)$ 都是 $C^\infty(M)$-线性的，所以它是 M 上的 $(1,4)$ 型光滑张量场. 特别地，对于任意一点 $p\in M$，以及任意的 $X,Y,Z,W\in T_pM$，$((\mathrm{D}_Z\mathcal{R})(X,Y))W$ 是有定义的，并且是 T_pM 中的一个成员. 取 $\sigma=\sigma_p$，则 $\sigma_{*p}=-\mathrm{id}:T_pM\to T_pM$. 于是 (2.13) 式成为

$$((\mathrm{D}_Z\mathcal{R})(X,Y))W=-((\mathrm{D}_Z\mathcal{R})(X,Y))W,\quad \forall X,Y,Z,W\in T_pM, \tag{2.14}$$

故

$$((\mathrm{D}_Z\mathcal{R})(X,Y))W=0,\quad \forall X,Y,Z,W\in T_pM,$$

即

$$\mathrm{D}_Z\mathcal{R}=0,\quad \forall Z\in T_pM.$$

证毕.

推论 2.3 设 (M,g) 是黎曼对称空间，则它的黎曼曲率张量在 M 上关于黎曼联络是平行的.

证明 根据定义，黎曼曲率张量是

$$R(X,Y,Z,W)=\langle\mathcal{R}(Z,W)X,Y\rangle,$$

因此它的协变导数 D_VR 是

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{D}_VR)(X,Y,Z,W)\\
&=V(R(X,Y,Z,W))-R(\mathrm{D}_VX,Y,Z,W)-R(X,\mathrm{D}_VY,Z,W)\\
&\quad-R(X,Y,\mathrm{D}_VZ,W)-R(X,Y,Z,\mathrm{D}_VW)\\
&=V\langle\mathcal{R}(Z,W)X,Y\rangle-\langle\mathcal{R}(Z,W)(\mathrm{D}_VX),Y\rangle-\langle\mathcal{R}(Z,W)X,\mathrm{D}_VY\rangle\\
&\quad-\langle\mathcal{R}(\mathrm{D}_VZ,W)X,Y\rangle-\langle\mathcal{R}(Z,\mathrm{D}_VW)X,Y\rangle\\
&=\langle((\mathrm{D}_V\mathcal{R})(Z,W))X,Y\rangle.
\end{aligned}$$

由定理 2.2 得知，曲率张量 $\mathcal{R}$ 作为 $(1,3)$ 型张量场在 M 上是平行的，即上式右端为零；因此，黎曼曲率张量 R 作为 $(0,4)$ 型张量场在 M 上也是平行的. 证毕.

注记 2.2 设 $\{e_i\}$ 是黎曼对称空间 (M,g) 上的任意一个局部标架场，令

$$R_{ijkl}=\langle\mathcal{R}(e_k,e_l)e_i,e_j\rangle,$$

则由定义，其协变导数的分量为

$$\begin{aligned}
R_{ijkl,h}&=e_h(R_{ijkl})-\Gamma^p_{ih}R_{pjkl}-\Gamma^p_{jh}R_{ipkl}-\Gamma^p_{kh}R_{ijpl}-\Gamma^p_{lh}R_{ijkp}\\
&=(\mathrm{D}_{e_h}R)(e_i,e_j,e_k,e_l).
\end{aligned}$$

因此，黎曼曲率张量平行的条件是

$$R_{ijkl,h}\equiv 0,\quad \forall i,j,k,l,h. \tag{2.15}$$

定义 2.1 设 (M,g) 是黎曼流形，若它的黎曼曲率张量在 M 上关于黎曼联络是平行的，则称 (M,g) 是**局部对称黎曼空间**.

根据注记 2.2, (M,g) 是局部对称黎曼空间当且仅当在任意一个局部标架场 $\{e_i\}$ 下，黎曼曲率张量的分量 R_{ijkl} 满足条件 (2.15).

下面的定理说明了条件 (2.15) 的几何意义.

定理 2.4 设 (M,g) 是局部对称黎曼空间，则对于任意一点 $p\in M$，都有点 p 的一个开邻域 U 以及局部光滑等距 $\sigma_p:U\to U$，使得 $\sigma_p\circ\sigma_p=\mathrm{id}$ 是对合，并且以 p 为其唯一的不动点 (这样的映射 σ_p 称为 M 关于点 p 的**局部中心对称**).

证明 设 $p\in M$，取充分小的的正数 ε，使得指数映射 $\exp_p$ 在 $B_p(\varepsilon)\subset T_pM$ 上有定义，并且 $\exp_p:B_p(\varepsilon)\to\mathcal{B}_p(\varepsilon)=\exp_p(B_p(\varepsilon))$ 是光滑同胚. 令

$$\sigma_0=-\mathrm{id}:T_pM\to T_pM,\quad \sigma_p=\exp_p\circ\sigma_0\circ\exp_p^{-1}:\mathcal{B}_p(\varepsilon)\to\mathcal{B}_p(\varepsilon).$$

则 σ_p 是从 $B_p(\varepsilon)$ 到它自身的光滑同胚，以 p 为仅有的不动点，并且 $\sigma_p\circ\sigma_p=\mathrm{id}:B_p(\varepsilon)\to B_p(\varepsilon)$. 取 $U=B(\varepsilon)$, 只要证明 σ_p 是等距映射就行了．为此，需要用 Cartan 等距定理 (第五章的定理 4.1).

任取 $v\in B_p(\varepsilon)$, 设 $\gamma(t)=\exp_p(tv)$ 是经过点 p 、以 v 为初始切向量的测地线．很明显，

$$\tilde{\gamma}(t)=\sigma_p(\gamma(t))=\exp_p(-tv)=\gamma(-t), \tag{2.16}$$

所以 σ_p 把经过点 p 的测地线反向 (只考虑落在测地球 $B_p(\varepsilon)$ 内的部分). 设 $X(t),Y(t),Z(t)$ 和 $W(t)$ 是沿 $\gamma(t)$ 平行的切向量场．我们断言： $R(X(t),Y(t),Z(t),W(t))$ 与变量 t 无关.

事实上，根据 (2.10) 式有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(X(t),Y(t),Z(t),W(t))\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\mathcal{R}(Z(t),W(t))X(t),Y(t)\rangle\\&=\langle\mathrm{D}_{\gamma'(t)}(\mathcal{R}(Z(t),W(t))X(t)),Y(t)\rangle\\&=\langle(\mathrm{D}_{\gamma'}\mathcal{R})(Z(t),W(t))X(t),Y(t)\rangle=0,\end{aligned}$$

因此

$$R(X(t),Y(t),Z(t),W(t))=\mathrm{const}. \tag{2.17}$$

参照第五章定理 4.1, 令

$$\varphi_t=\tilde{P}_0^t\circ\sigma_0\circ(P_0^t)^{-1}:T_{\gamma(t)}M\to T_{\tilde{\gamma}(t)}M,$$

其中 P_0^t, $\tilde{P}_0^t$ 分别是沿测地线 γ 和 $\tilde{\gamma}$ 从 $t=0$ 到 t 的平行移动．由于 $\tilde{\gamma}(t)=\gamma(-t)$, 可知 $\tilde{P}_0^t=P_0^{-t}$, 即 $\tilde{P}_0^t$ 是沿测地线 γ 从 $t=0$ 到 $-t$ 的平行移动．于是

$$\varphi_t=P_0^{-t}\circ\sigma_0\circ(P_0^t)^{-1}=-P_0^{-t}\circ P_t^0=-P_t^{-t}, \tag{2.18}$$

其中 P_t^{-t} 是沿测地线 γ 从 t 到 $-t$ 的平行移动．由 (2.17) 式可知，对于任意的 $X,Y,Z,W\in T_{\gamma(t)}M$ 有

$$\begin{aligned}&R(\varphi_t(X),\varphi_t(Y),\varphi_t(Z),\varphi_t(W))\\&=R(P_t^{-t}(Z),P_t^{-t}(Y),P_t^{-t}(Z),P_t^{-t}(W))\\&=R(X,Y,Z,W).\end{aligned}$$

因此第五章定理 4.1 中的条件 (4.3) 成立，故 σ_p 是等距．证毕.

定理 2.5 设 (M,g) 是黎曼对称空间，则 (M,g) 是完备的.

证明 根据 Hopf-Rinow 定理，只要证明从一点 p 出发的任意一条正规测地线都能够无限地延伸即可.

设 $\gamma(t),0\le t\le l$, 是从 $p=\gamma(0)$ 出发的任意一条正规测地线，长度为 l. 令 $q=\gamma\left(\frac{2}{3}l\right)$, $v=\gamma'\left(\frac{2}{3}l\right)\in T_qM$. 用 σ_q 表示 (M,g) 关于点 q 的中心对称，则 $\sigma_q(\gamma(t))$ 仍然是 (M,g) 上的一条正规测地线，并且

$$\sigma_q\left(\gamma\left(\frac{2}{3}l\right)\right)=\sigma_q(q)=q.$$

对测地线 $\sigma_q(\gamma(t))$ 作参数变换

$$t=\frac{4}{3}l-s,\quad \frac{1}{3}l\le s\le\frac{4}{3}l,$$

并设

$$\tilde{\gamma}(s)=\sigma_q\left(\gamma\left(\frac{4}{3}l-s\right)\right),\quad \frac{1}{3}l\le s\le\frac{4}{3}l, \tag{2.19}$$

则 $\tilde{\gamma}(s)$ 是 (M,g) 上的正规测地线，且有

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}\left(\frac{2}{3}l\right)&=\sigma_q\left(\gamma\left(\frac{2}{3}l\right)\right)=\gamma\left(\frac{2}{3}l\right),\\ \tilde{\gamma}'\left(\frac{2}{3}l\right)&=(\sigma_q)_{*q}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\gamma\left(\frac{4}{3}l-s\right)\bigg|_{s=\frac{2}{3}l}\right)\\&=(\sigma_q)_{*q}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)\bigg|_{t=\frac{2}{3}l}\right)\end{aligned}$$

$$=(\sigma_q)_{*q}\left(-\gamma'\left(\frac{2}{3}l\right)\right)=\gamma'\left(\frac{2}{3}l\right).$$

这意味着测地线 $\gamma,\tilde{\gamma}$ 都经过点 $q=\gamma\left(\frac{2}{3}l\right)$，并且在该点有相同的切向量 $\gamma'\left(\frac{2}{3}l\right)$. 因此，由测地线的唯一性得知，$\gamma$ 和 $\tilde{\gamma}$ 在公共的定义域内是重合的. 特别地有

$$\gamma(t)=\tilde{\gamma}(t),\quad \frac{1}{3}l\le t\le l. \tag{2.20}$$

于是可以定义映射 $\gamma_1:\left[0,\frac{4}{3}l\right]\to M$，使得

$$\gamma_1(t)=\begin{cases}\gamma(t), & 0\le t\le l;\\ \tilde{\gamma}(t), & \frac{1}{3}l\le t\le\frac{4}{3}l,\end{cases} \tag{2.21}$$

则 $\gamma_1(t)$ 是在 (M,g) 上从点 p 出发、长度为 $\frac{4}{3}l$ 的测地线. 显然，$\gamma_1(t)$ 是测地线 γ 的延伸. 继续此过程便得知测地线 γ 能够无限延伸. 因此，(M,g) 是完备的黎曼流形. 证毕.

注记 2.3 定理 2.5 的证明告诉我们：若 $\gamma(t)(-\infty<t<\infty)$ 是 (M,g) 上的一条测地线，任取 $t_0\in(-\infty,\infty)$，并设 $q=\gamma(t_0)$，则中心对称 σ_q 把测地线 γ 映射到它自身，同时 σ_q 在 γ 上的限制是 γ 关于点 q 的对称，即对于任意的 $t\in(-\infty,\infty)$，$\sigma_q(\gamma(2t_0-t))=\gamma(t)$(参看 (2.19) 和 (2.20) 式).

定理 2.6 黎曼对称空间 (M,g) 的等距变换群 $I(M)$ 在 M 上的作用是可迁的，即 (M,g) 是齐性黎曼空间. 任意固定一点 $p\in M$，令 $K=\{\tau\in I(M):\tau(p)=p\}$，则 K 是 $I(M)$ 的一个子群，并且 M 和 $I(M)/K$ 作为点集是一一对应的. 子群 K 称为 $I(M)$ 在点 p 的**迷向子群**.

证明 容易验证，K 的确是 $I(M)$ 的一个子群. 设 p,q 是 M 中的任意两点. 由于 (M,g) 是完备的，故存在连接 p,q 的最短正规测地线 $\gamma(t),0\le t\le l,l=d(p,q)$，使得 $\gamma(0)=p,\gamma(l)=q$. 记 $p_0=\gamma\left(\frac{l}{2}\right)$，$\sigma_{p_0}$ 是 (M,g) 关于 p_0 的中心对称. 由注记 2.3 得知

$$\sigma_{p_0}(\gamma(l-t))=\gamma(t),\quad 0\le t\le l;$$

特别地有

$$\sigma_{p_0}(\gamma(l))=\gamma(0),\quad \sigma_{p_0}(\gamma(0))=\gamma(l).$$

这意味着 $\sigma_{p_0}\in I(M)$，并且它把点 $p=\gamma(0)$ 映射到点 $q=\gamma(l)$，即 $I(M)$ 在 M 上的作用是可迁的.

任意固定一点 $p\in M$，定义映射 $\pi:I(M)\to M$ 使得 $\pi(\tau)=\tau(p)$. 由于 $I(M)$ 在 M 上的作用是可迁的，故 π 必是满射. 对于 $\tau,\tilde{\tau}\in I(M)$，如果 $\pi(\tau)=\pi(\tilde{\tau})$，即 $\tau(p)=\tilde{\tau}(p)$，则 $\tau^{-1}\circ\tilde{\tau}(p)=p$，这就是说 $\tau^{-1}\circ\tilde{\tau}\in K$. 因此 $\tau K=\tilde{\tau}K$. 由此可见，在 M 和左陪集 $I(M)/K$ 之间存在一一对应. 证毕.

定理 2.7 设 (M,g) 是黎曼对称空间，$\gamma(t)\ (-\infty<t<\infty)$ 是 (M,g) 上的一条正规测地线. 定义映射 $\varphi:\mathbb{R}\to I(M)$，使得对于任意的 t，$\varphi(t)=\sigma_{\gamma(\frac{t}{2})}\circ\sigma_{\gamma(0)}$，其中 $\sigma_{\gamma(0)},\sigma_{\gamma(\frac{t}{2})}$ 分别是 (M,g) 关于 $\gamma(0)$ 和 $\gamma\left(\frac{t}{2}\right)$ 的中心对称. 如果记 $\varphi_t=\varphi(t)(\forall t)$，则

(1) $\varphi_t(\gamma(s))=\gamma(s+t)$；

(2) $(\varphi_t)_{*\gamma(s)}:T_{\gamma(s)}M\to T_{\gamma(s+t)}M$ 是沿测地线 γ 的平行移动；

(3) $\{\varphi_t;-\infty<t<\infty\}$ 是 $I(M)$ 单参数子群.

证明 (1) 根据注记 2.3，$\sigma_{\gamma(0)}$ 在 γ 上的作用是 γ 关于点 $\gamma(0)$ 的对称，$\sigma_{\gamma(\frac{t}{2})}$ 在 γ 上的作用是 γ 关于点 $\gamma\left(\frac{t}{2}\right)$ 的对称，即有

$$\sigma_{\gamma(0)}(\gamma(s))=\gamma(-s);\quad \sigma_{\gamma(\frac{t}{2})}(\gamma(s))=\gamma(t-s).$$

所以

$$\varphi_t(\gamma(s))=\sigma_{\gamma(\frac{t}{2})}\circ\sigma_{\gamma(0)}(\gamma(s))=\sigma_{\gamma(\frac{t}{2})}(\gamma(-s))=\gamma(t+s).$$

由此可见，φ_t 在测地线 γ 上的作用是沿测地线 γ 的位移.

(2) 设 X 是任意一个沿测地线 γ 平行的切向量场. 任意固定 $t_1\in(-\infty,\infty)$, 则 $\sigma_{\gamma(t_1)}:M\to M$ 是等距变换，并且

$$\sigma_{\gamma(t_1)}(\gamma(s))=\gamma(2t_1-s),\quad \forall s\in(-\infty,\infty) \tag{2.22}$$

(参看注记 2.3). 因此，存在等距线性同构 $(\sigma_{\gamma(t_1)})_{*\gamma(s)}:T_{\gamma(s)}M\to T_{\gamma(2t_1-s)}M$ 使得

$$(\sigma_{\gamma(t_1)})_{*\gamma(s)}(\gamma'(s))=-\gamma'(2t_1-s),\quad \forall s\in(-\infty,\infty). \tag{2.23}$$

令

$$\tilde{X}(2t_1-s)=(\sigma_{\gamma(t_1)})_{*\gamma(s)}(X(s)),\quad \forall s, \tag{2.24}$$

则 $\tilde{X}$ 是沿测地线 γ 定义的切向量场. 由于等距变换 $\sigma_{\gamma(t_1)}$ 保持黎曼联络不变，故由 (2.23) 和 (2.24) 两式得到

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_{\gamma'(2t_1-s)}\tilde{X}&=-\mathrm{D}_{(\sigma_{\gamma(t_1)})_{*\gamma(s)}(\gamma'(s))}((\sigma_{\gamma(t_1)})_{*\gamma(s)}X)\\&=-(\sigma_{\gamma(t_1)})_{*\gamma(s)}(\mathrm{D}_{\gamma'(s)}X)=0,\end{aligned}$$

所以 $\tilde{X}$ 仍然是沿 γ 平行的切向量场.

因为在 t_1 处有

$$\tilde{X}(t_1)=(\sigma_{\gamma(t_1)})_{*\gamma(t_1)}(X(t_1))=-X(t_1),$$

所以，由 $\tilde{X},X$ 沿 γ 的平行性得到 $\tilde{X}(t)=-X(t)$, $\forall t\in(\infty,\infty)$; 再利用 (2.24) 式得知

$$(\sigma_{\gamma(t_1)})_{*\gamma(s)}(X(s))=\tilde{X}(2t_1-s)=-X(2t_1-s),\quad \forall t_1,\ s. \tag{2.25}$$

由此得到

$$\begin{aligned}(\varphi_t)_{*\gamma(s)}(X(s))=&(\sigma_{\gamma(\frac{t}{2})})_{*\gamma(-s)}\circ(\sigma_{\gamma(0)})_{*\gamma(s)}(X(s))\\=&(\sigma_{\gamma(\frac{t}{2})})_{*\gamma(-s)}(-X(-s))=X(t+s),\end{aligned} \tag{2.26}$$

这意味着 $(\varphi_t)_{*\gamma(s)}:T_{\gamma(s)}M\to T_{\gamma(s+t)}M$ 是沿测地线 γ 的平行移动.

(3) 黎曼流形 (M,g) 到它自身的等距变换是由它在任意一点的像以及在该点的切映射唯一确定的 (参看第五章的引理 5.1). 现在 $\varphi_t\circ\varphi_s$ 和 φ_{t+s} 都是 M 到它自身的等距变换，所以要断言它们是同一个等距变换，只要验证它们在点 $\gamma(0)$ 的像及其在点 $\gamma(0)$ 的切映射分别相同就可以了.

事实上，由 (1) 得到

$$\varphi_t\circ\varphi_s(\gamma(0))=\varphi_t(\gamma(s))=\gamma(t+s)=\varphi_{t+s}(\gamma(0)). \tag{2.27}$$

再由 (2) 得到切映射 $(\varphi_{t+s})_{*\gamma(0)}:T_{\gamma(0)}M\to T_{\gamma(t+s)}M$ 是沿测地线 γ 的平行移动. 此外

$$(\varphi_t\circ\varphi_s)_{*\gamma(0)}=(\varphi_t)_{*\gamma(s)}\circ(\varphi_s)_{*\gamma(0)},$$

而 $(\varphi_s)_{*\gamma(0)}$ 和 $(\varphi_t)_{*\gamma(s)}$ 依次是沿测地线 γ 从 $T_{\gamma(0)}M$ 到 $T_{\gamma(s)}M$ 以及从 $T_{\gamma(s)}M$ 到 $T_{\gamma(t+s)}M$ 的平行移动. 所以由平行移动的传递性得知

$$(\varphi_t\circ\varphi_s)_{*\gamma(0)}=(\varphi_{t+s})_{*\gamma(0)}. \tag{2.28}$$

因此

$$\varphi_t\circ\varphi_s=\varphi_{t+s}. \tag{2.29}$$

很明显，

$$\varphi_0=\sigma_{\gamma(0)}\circ\sigma_{\gamma(0)}=\mathrm{id}, \tag{2.30}$$

因此

$$\varphi_t\circ\varphi_{-t}=\varphi_0=\mathrm{id},$$

故有

$$\varphi_{-t}=(\varphi_t)^{-1}. \tag{2.31}$$

所以，$\{\varphi_t;-\infty<t<\infty\}$ 是 $I(M)$ 的一个单参数子群. 证毕.

至此，我们对于等距变换群 $I(M)$ 在黎曼对称空间 (M,g) 上的作用已经有相当多的了解．现在需要对等距变换群 $I(M)$ 本身的结构有更清晰的认识．首先要在 $I(M)$ 上引进拓扑结构，然后再引进微分结构使它成为一个李群．这样，$I(M)$ 便成为可迁地作用在黎曼对称空间 (M,g) 上的李氏变换群．这意味着黎曼对称空间是一种特殊的**齐性空间**．因此，对于黎曼对称空间的研究可以归结为对于相关的李群和李代数的研究．

通常，在由映射构成的空间中引进所谓的紧开拓扑是比较方便的．

定义 2.2　设 (M,g) 是黎曼流形，$I(M)$ 是它的等距变换群．设 C 是 M 的一个紧致子集，U 是 M 的一个开子集．令

$$W(C,U)=\{\tau\in I(M);\ \tau(C)\subset U\}.$$

在 $I(M)$ 中使所有这样的子集 $W(C,U)$ 成为开集的最小拓扑称为在 $I(M)$ 上的**紧开拓扑**．

具有紧开拓扑的 $I(M)$ 有许多好的性质，在这里只提一下，不作详细的证明了．

命题 2.8　设 (M,g) 是黎曼流形，则等距变换群 $I(M)$ 关于它的紧开拓扑是一个局部紧致的 Hausdorff 空间，具有可数的拓扑基，并且是作用在 M 上的拓扑变换群．对于任意固定的一点 $p\in M$，设 K 是 $I(M)$ 在点 p 的迷向子群，则 K 是 $I(M)$ 的紧子群，因而 M 与商空间 $I(M)/K$ 是同胚的．

Myers 和 Steenrod 在 1939 年证明了下面的命题：

命题 2.9　黎曼流形 (M,g) 的等距变换群 $I(M)$ 关于紧开拓扑是作用在 M 上的李氏变换群．如果 M 是紧致的，则 $I(M)$ 也是紧致的．

当 (M,g) 是黎曼对称空间时，命题 2.9 有一个比较简单的证明，其主要步骤如下：

(1) 根据命题 2.8，迷向子群 K 是 $I(M)$ 的紧子群．设 $\dim M=m$，则 K 可以看作 T_pM 上的正交变换群 $\mathrm{O}(m)$ 的一个闭子群．事实上，对于任意的 $k\in K$，切映射 $k_{*p}:T_pM\to T_pM$ 是一个正交变换；同时根据第五章的引理 5.1，由 $k\mapsto k_{*p}$ 确定的映射 $\theta:K\to\mathrm{O}(m)$ 是一个单同态．由于 K 是紧致的，$\theta(K)$ 是 $\mathrm{O}(m)$ 的紧致子群，并且 K 与 $\theta(K)$ 同胚．因此，由 $\mathrm{O}(m)$ 在 $\theta(K)$ 上诱导的微分结构可以移植到 K 上，使得 K 成为一个李群．

(2) 取 M 在点 p 的一个法坐标邻域 $\mathcal{B}_p(r)$．任取 $q\in\mathcal{B}_p(r)$，则在 $\mathcal{B}_p(r)$ 内有唯一的一条连接 p,q 两点的最短测地线 γ，$0\le t\le l=d(p,q)<r$，使得 $\gamma(0)=p$，$\gamma(l)=q$．令 $\psi_q=\sigma_{\gamma(\frac{l}{2})}\circ\sigma_{\gamma(0)}$，则 ψ_q 是 M 到它自身的等距变换，并且限制到测地线 γ 上是一个位移；特别地，当 $q\neq p$ 时，p 不是 ψ_q 的不动点，并且有 $\psi_q(p)=q$(参看定理 2.7)．假定 $\psi:\mathcal{B}_p(r)\to I(M)$ 是由 $q\mapsto\psi_q$ 确定的映射，并记 $\Psi_p=\{\psi_q;\ q\in\mathcal{B}_p(r)\}$，则 Ψ_p 是 $\mathcal{B}_p(r)$ 在映射 ψ 下的像集．定义映射 $\pi:I(M)\to M$ 为 $\pi(\tau)=\tau(p),\forall\tau\in I(M)$，则有

$$\pi(\psi_q)=\psi_q(p)=q,$$

因而 $\pi\circ\psi=\mathrm{id}:\mathcal{B}_p(r)\to\mathcal{B}_p(r)$．这说明映射 $\psi:\mathcal{B}_p(r)\to I(M)$ 是纤维丛 $\pi:I(M)\to M\cong I(M)/K$ 的一个局部截面，因而，$\mathcal{B}_p(r)\times K$ 和 $\pi^{-1}(\mathcal{B}_p(r))=\Psi_p\cdot K$ 是同胚的，其中

$$\Psi_p\cdot K=\{\tau\cdot k;\ \tau\in\Psi_p,k\in K\}.$$

因此，在每一个 $\Psi_p\cdot K$ 中都可以引进光滑结构，从而使得 $I(M)$ 成为光滑流形．

(3) 进一步可以证明，相对于上述光滑结构，$I(M)$ 中的乘法 (即变换的复合) 和求逆运算是光滑的，因而 $I(M)$ 是李群．这就证明了 $I(M)$ 是作用在 M 上的李氏变换群．

在本章，我们只需要上述各命题的结论，证明的细节可以查看参考文献 [24, 第 4 章，§2 和 §3]．

将命题 2.8 和命题 2.9 用于黎曼对称空间得到下面的命题:

命题 2.10 设 (M,g) 是黎曼对称空间, 则它的等距变换群 $I(M)$ 在紧开拓扑下具有光滑结构, 使之成为可迁地作用在 M 上的李氏变换群. 此外, 对于任意固定的一点 $p\in M$, $I(M)$ 在点 p 的迷向子群 K 是 $I(M)$ 的紧致子群, 并且 M 和齐性空间 $I(M)/K$ 是光滑同胚的.

§9.3 黎曼对称对

在上一节讨论了黎曼对称空间的性质, 并且得知黎曼对称空间 (M,g) 与齐性空间 $I(M)/K$ 光滑同胚, 其中 $I(M)$ 是 (M,g) 等距变换群, K 是 $I(M)$ 在一点 $p\in M$ 的迷向子群. 本节的目的是考察什么样的李群及其子群所构筑的齐性空间能够成为黎曼对称空间. 为此, 先讨论黎曼对称空间 (M,g) 作为齐性空间的性质.

定理 3.1 设 (M,g) 是黎曼对称空间, $I(M)$ 是 (M,g) 的等距变换群, $G=I_0(M)$ 是 $I(M)$ 的包含单位元 $e=\mathrm{id}_M$ 的连通分支. 设 $p\in M$, K 是 G 在点 p 的迷向子群, 则

(1) G 是连通李群, K 是 G 的紧致子群, 并且 M 和 G/K 是光滑同胚的.

(2) 设 (M,g) 在点 p 的中心对称是 σ_p, 定义映射 $\sigma: G\to G$, 使得 $\sigma(\tau)=\sigma_p\circ\tau\circ\sigma_p, \forall\tau\in G$, 同时设

$$K_\sigma=\{\tau\in G;\ \sigma(\tau)=\tau\}, \tag{3.1}$$

则 σ 是 G 上的一个对合自同构, 并且 K_σ 是 G 的闭子群.

(3) 如果 K_0 是 K_σ 的单位元连通分支, 则有

$$K_0\subset K\subset K_\sigma, \tag{3.2}$$

并且在 K 中不含有 G 的任何非平凡正规子群.

(4) 设 G 的李代数为 $\mathfrak{g}$, K 的李代数为 $\mathfrak{k}$, 则

$$\mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{g};\ \sigma_{*e}(X)=X\}. \tag{3.3}$$

另外, 如果定义

$$\mathfrak{m}=\{X\in\mathfrak{g};\ \sigma_{*e}(X)=-X\}, \tag{3.4}$$

则有 $\mathfrak{g}$ 作为线性空间的直和分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m}, \tag{3.5}$$

以及如下的包含关系:

$$[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]\subset\mathfrak{k},\quad [\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{k},\quad [\mathfrak{k},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}. \tag{3.6}$$

(5) 如果定义映射 $\pi: G\to M$ 为 $\pi(g)=g\cdot p, \forall g\in G$, 则有 $\pi_{*e}(\mathfrak{k})=\{0\}$; $\pi_{*e}(\mathfrak{m})=T_pM$. 设 $X\in\mathfrak{m}$, 则在 M 上从点 p 出发、并以 $\pi_{*e}(X)$ 为初始切向量的测地线是 $\gamma(t)=\exp(tX)\cdot p$, 其中 $\exp:\mathfrak{g}\to G$ 是李群 G 的指数映射. 再设 $Y\in T_pM$, 则 $(\exp(tX))_{*p}(Y)$ 是 Y 沿测地线 $\gamma(t)$ 的平行移动.

证明 (1) 命题 2.10 已经断言 $I(M)$ 是一个李群, 并且是可迁地作用在 M 上的李氏变换群. 众所周知, 李群在单位元的连通分支是一个连通李群. 另外, 命题 2.10 还告诉我们, $I(M)$ 在点 p 的迷向子群 $\tilde{K}$ 是 $I(M)$ 的紧致子群. 所以 G 在点 p 的迷向子群 $K=\tilde{K}\cap G$ 是 G 的紧致子群.

由于黎曼对称空间是完备的, 对于任意的 $q\in M$ 必有连接 p,q 两点的最短测地线 $\gamma(t)$, $0\le t\le l=d(p,q)$, 使得 $\gamma(0)=p$, $\gamma(l)=q$. 由定理 2.7 知道, $\varphi_t=\sigma_{\gamma(\frac{t}{2})}\circ\sigma_{\gamma(0)}$ 把 $p=\gamma(0)$ 映到 $q=\gamma(l)$. 而在 $I(M)$ 的紧开拓扑下, $\varphi_t(0\le t\le l)$ 是 $I(M)$ 中连接 φ_l 和 $\varphi_0=\mathrm{id}: M\to M$ 的一条路径, 所以 $\varphi_l\in I_0(M)=G$, 因而 G 在 M 上的作用是可迁的. 由此可见, M 和 G/K 是光滑同胚的. 从 G/K 到 M 的对应由

$[\tau] \in G/K \mapsto \tau(p) \in M$ 给出，其中 $[\tau] = \tau K$ 是 $\tau \in G$ 关于 K 的左陪集.

(2) 由 σ 的定义可知，σ 是 G 的一个对合自同构. 同时不难验证，σ 在 G 中的不动点集 K_σ 是 G 的闭子群，称为 G 在对合自同构 σ 下的**不动点子群**.

(3) 由 K 的定义，对于任意的 $\tau \in K$, $\tau(p) = p$. 所以

$$(\sigma(\tau))(p) = \sigma_p \circ \tau \circ \sigma_p(p) = p = \tau(p),$$

并且

$$(\sigma(\tau))_{*p} = (\sigma_p)_{*p} \circ \tau_{*p} \circ (\sigma_p)_{*p} = \tau_{*p} : T_pM \to T_pM.$$

故由第五章的引理 5.1 得知，$\sigma(\tau) = \tau$, 即 $\tau \in K_\sigma$. 由于 τ 的任意性，$K \subset K_\sigma$.

很明显，K_σ 的李代数为

$$\mathfrak{k}_\sigma = \{X \in \mathfrak{g};\ \sigma_{*e}(X) = X\}. \tag{3.7}$$

设 $X \in \mathfrak{k}_\sigma$, 则对于任意的 $t \in (-\infty, \infty)$, $\tau(t) = \exp(tX) \in K_\sigma$, 因而 $\tau(t)$ 属于 K_σ 的单位元连通分支 K_0. 特别地，对于任意的 t, $\sigma(\tau(t)) = \tau(t)$. 将上式两边作用于点 p, 得到

$$\sigma_p(\exp(tX) \cdot p) = \exp(tX) \cdot p, \quad -\infty < t < \infty,$$

即 $\exp(tX) \cdot p$ 是 σ_p 的不动点. 因为 p 是 σ_p 的孤立不动点，所以 $\exp(tX) \cdot p = p$. 这说明 $\exp(tX) \in K$, 因而 $X \in \mathfrak{k}$. 再由 $X \in \mathfrak{k}_\sigma$ 的任意性得知 $\mathfrak{k}_\sigma \subset \mathfrak{k}$. 另一方面，已经证明了 $K \subset K_\sigma$, 因而又有 $\mathfrak{k} \subset k_\sigma$, 即 (3.3) 成立. 现在李群 K_0, K 和 K_σ 有相同的李代数 $\mathfrak{k}$, 并且 K_0 是连通李群，故有 $K_0 \subset K$.

假设 K 含有 G 的一个非平凡正规子群，即存在 K 的子群 $H \neq \{e\}$, 使得对于任意的 $\tau \in G$ 都有 $\tau H = H\tau$. 取 $\mu \in H$, 使得 $\mu \neq e =$

id_M. 因为 G 在 M 上的作用是可迁的，所以对于任意的一点 $q \in M$, 必有某个 $\tau \in G$, 使得 $\tau(p) = q$. 又因为 H 是 G 的正规子群，故有 $\mu' \in H$, 使得 $\mu \circ \tau = \tau \circ \mu'$. 将此式两边同时作用在点 p 上得到

$$\mu(q) = \mu(\tau(p)) = \tau(\mu'(p)) = \tau(p) = q, \quad \forall q \in M.$$

这意味着 μ 在 M 上的作用是恒等变换，与假设矛盾. 因此，K 不含有 G 的非平凡正规子群.

(4) 因为 σ 是 G 的对合自同构，所以 σ_{*e} 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个对合自同构. 对于任意的 $X \in \mathfrak{g}$, 显然有

$$\frac{1}{2}(X + \sigma_{*e}(X)) \in \mathfrak{k}, \quad \frac{1}{2}(X - \sigma_{*e}(X)) \in \mathfrak{m}, \tag{3.8}$$

并且 $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{m} = \{0\}$. 因此有直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$. 此外，利用 σ_{*e} 是 $\mathfrak{g}$ 的对合自同构的事实，容易得知 (3.6) 式成立.

(5) 任取 $X \in \mathfrak{k}$, 则 $\exp(tX) \in K_0 \subset K$, 从而有

$$\pi(\exp(tX)) = \exp(tX) \cdot p = p.$$

所以，$\pi_{*e}(X) = 0$. 再由 X 的任意性得知 $\pi_{*e}(\mathfrak{k}) = \{0\}$. 反过来，设 $X \in \mathfrak{g}$ 满足 $\pi_{*e}(X) = 0$. 令 $\gamma(t) = \exp(tX) \cdot p = \pi(\exp(tX))$, 则

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \gamma(t+s) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \exp((t+s)X)(p) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} (\exp tX \cdot \exp sX)(p) \\ &= (\exp tX)_{*p}(\pi_{*e}(X)) = 0.\end{aligned}$$

因此，γ 是常值曲线. 因为 $\gamma(0) = p$, 所以 $\gamma(t) \equiv \exp(tX) \cdot p = p$. 这说明 $\exp(tX) \in K$, 因而 $X \in \mathfrak{k}$.

综上所述便得 $\mathfrak{k} = \ker \pi_{*e}$. 于是由 (3.5) 式知道 π_{*e} 在 $\mathfrak{m}$ 上的限制是单射. 另一方面，由于 G 在 M 上的作用是可迁的，$\pi : G \to M$ 是满射. 于是

$$T_pM = \pi_{*e}(\mathfrak{g}) = \pi_{*e}(\mathfrak{m}).$$

由此得知，映射

$$\pi_{*e}|_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \to T_pM \tag{3.9}$$

是线性同构.

为了完成定理的证明，再设 $X \in \mathfrak{m}$, 并假定 $|\pi_{*e}(X)| = 1$. 用 $\gamma(t)$ 表示在 M 上从点 p 出发、以 $\pi_{*e}(X)$ 为初始切向量的测地线，则 t 是弧长参数. 需要说明 $\gamma(t) = (\exp tX) \cdot p$. 为此，令 $\varphi_t = \sigma_{\gamma(\frac{t}{2})} \circ \sigma_p$, 则由定理 2.7, $\{\varphi_t;\ -\infty < t < \infty\}$ 是李群 $G = I_0(M)$ 的单参数子群，并且

$$\gamma(t) = \varphi_t(p) = \pi(\varphi_t); \tag{3.10}$$

同时，映射

$$(\varphi_t)_{*p} : T_pM \to T_{\gamma(t)}M \tag{3.11}$$

是沿测地线 γ 的平行移动. 作为李群 G 的单参数子群， φ_t 可以表示为

$$\varphi_t = \exp(tZ), \quad 其中\ Z \in \mathfrak{g}. \tag{3.12}$$

因为

$$\sigma(\varphi_t) = \sigma_p \circ \varphi_t \circ \sigma_p = \sigma_p \circ \sigma_{\gamma(\frac{t}{2})},$$

所以

$$(\sigma(\varphi_t))(p) = \sigma_p(\sigma_{\gamma(\frac{t}{2})}(\sigma_p(p))) = \sigma_p(\gamma(t)) = \gamma(-t) = \varphi_{-t}(p),$$
$$(\sigma(\varphi_t))_{*p} = (\sigma_p)_{*\gamma(t)} \circ (\sigma_{\gamma(\frac{t}{2})})_{*p}.$$

假定 $\tilde{X}$ 是沿 γ 平行的切向量场，则由 (2.25) 式得到

$$\begin{aligned}(\sigma(\varphi_t))_{*p}(\tilde{X}(0)) &= (\sigma_p)_{*\gamma(t)}((\sigma_{\gamma(\frac{t}{2})})_{*p}(\tilde{X}(0))) \\ &= (\sigma_{\gamma(0)})_{*\gamma(t)}((\sigma_{\gamma(\frac{t}{2})})_{*\gamma(0)}(\tilde{X}(0))) \\ &= (\sigma_{\gamma(0)})_{*\gamma(t)}(-\tilde{X}(t)) = \tilde{X}(-t) \\ &= (\varphi_{-t})_{*\gamma(0)}(\tilde{X}(0)) = (\varphi_{-t})_{*p}(\tilde{X}(0)).\end{aligned}$$

由 $\tilde{X}$ 的任意性得知 $(\sigma(\varphi_t))_{*p} = (\varphi_{-t})_{*p}$. 根据第五章的引理 5.1,

$$\sigma(\varphi_t) = \varphi_{-t},$$

即

$$\sigma(\exp(tZ)) = \exp(-tZ). \tag{3.13}$$

因此， $\sigma_{*e}(Z) = -Z$, 即 $Z \in \mathfrak{m}$.

另一方面，因为

$$\gamma(t) = \varphi_t(p) = \exp(tZ) \cdot p = \pi(\exp(tZ)),$$

所以

$$\pi_{*e}(X) = \gamma'(0) = \pi_{*e}(Z).$$

注意到 $\pi_{*e} : \mathfrak{m} \to T_pM$ 是单射，故有 $X = Z$, 因而 $\varphi_t = \exp(tX)$. 因此，从点 p 出发、以 $\pi_{*e}(X) \in T_pM (X \in \mathfrak{m})$ 为初始切向量的测地线是

$$\gamma(t) = \exp(tX) \cdot p. \tag{3.14}$$

同时，沿 γ 的平行移动是 $(\exp(tX))_{*p} : T_pM \to T_{\gamma(t)}M$. 定理得证.

上述定理是一个十分重要的结果. 它告诉我们，从每一个黎曼对称空间 (M, g) 出发，都可以得到一对李群 (G, K) 和 G 的一个对合自同构 $\sigma : G \to G$, 使得 $K_0 \subset K \subset K_\sigma$. 在下面要进一步证明，在一定条件下从 (G, K, σ) 出发可以构造出一个黎曼对称空间. 这为构造黎曼对称空间的例子，以及把李群、李代数理论用于黎曼对称空间的研究开辟了广阔的途径.

先给出下面的定义：

定义 3.1 设 G 是连通李群， K 是 G 的一个闭子群. 如果存在李群 G 的一个对合自同构 $\sigma : G \to G$, 使得

$$K_0 \subset K \subset K_\sigma,$$

其中 $K_\sigma=\{g\in G:\sigma(g)=g\}$ 是 G 在对合自同构 σ 下的不动点子群，K_0 是 K_σ 的单位元连通分支，则称 (G,K,σ) 是一个**对称对**(symmetric pair).

用 $\mathrm{Ad}:G\to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 记李群 G 的伴随表示，这里 $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数．如果 (G,K,σ) 是一个对称对，并且 $\mathrm{Ad}(K)$ 是 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 的紧子群，则称 (G,K,σ) 是一个**黎曼对称对**.

需要说明的是，对于任意的 $g\in G$，$\mathrm{Ad}g=(L_g)_{*g^{-1}}\circ(R_{g^{-1}})_{*e}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$，其中 $\mathfrak{g}=T_eG$，并且 $\mathrm{Ad}G$ 是 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 的子群．现在 K 是 G 的子群，故对于 $k\in K$，$\mathrm{Ad}k$ 仍旧被看作 $\mathfrak{g}$ 到其自身的线性同构，即 $\mathrm{Ad}K$ 是 $\mathrm{Ad}G$ 的子群，因而是 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 的子群.

定理 3.1 说明，黎曼对称空间 (M,g) 的等距变换群 $I(M)$ 的单位元连通分支 $G=I_0(M)$ 和它在点 $p\in M$ 的迷向子群 K 构成一个黎曼对称对．下面定理的证明过程将告诉我们：$\mathrm{Ad}(K)\subset\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 的紧致性假定保证了在齐性空间 G/K 上 G-不变黎曼度量的存在性.

定理 3.2　设 (G,K,σ) 是黎曼对称对，$\pi:G\to G/K$ 是自然投影．记 $p=\pi(e)$，其中 e 是 G 的单位元素．则在齐性空间 G/K 上存在 G-不变的黎曼度量，并且对于每一个这样的黎曼度量 Q，$(G/K,Q)$ 是一个黎曼对称空间．此时，关于点 p 的中心对称 σ_0 满足

$$\sigma_0\circ\pi=\pi\circ\sigma,\tag{3.15}$$

并且对于任意的 $g\in G$ 有

$$\tau(\sigma(g))=\sigma_0\circ\tau(g)\circ\sigma_0,\tag{3.16}$$

其中映射 $\tau(g):G/K\to G/K$ 由 $[h]=hK\mapsto\tau(g)([h])=[gh]=(gh)K$ $(\forall h\in G)$ 确定.

证明　记 $M=G/K$，设 G 和 K 的李代数分别是 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{k}$．由于 $\sigma:G\to G$ 是对合自同构，并且 $K_0\subset K\subset K_\sigma$，所以 $\mathfrak{k}$ 同时是 K_0 和 K_σ 的李代数，并且 $\sigma_{*e}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 也是对合自同构．由 K_σ 的定义易知

$$\mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{g}:\sigma_{*e}(X)=X\}.$$

如果令 $\mathfrak{m}=\{X\in\mathfrak{g};\ \sigma_{*e}(X)=-X\}$，则有线性空间的直和分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m}$，并且 $\mathfrak{k}=\ker\pi_{*e}$，$T_pM=\pi_{*e}(\mathfrak{m})\cong\mathfrak{m}$.

首先断言：$\mathrm{Ad}(K)$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的作用保持 $\mathfrak{m}$ 不变．事实上，根据伴随表示 Ad 的定义，对于任意的 $k\in K$ 以及 $X\in\mathfrak{m}$ 有

$$\exp((\mathrm{Ad}\,k)(tX))=k\cdot\exp(tX)\cdot k^{-1}.$$

所以

$$\begin{aligned}&\sigma(\exp((\mathrm{Ad}\,k)(tX)))\\&=\sigma(k)\cdot\sigma(\exp tX)\cdot(\sigma(k))^{-1}\\&=k\cdot\exp(t\sigma_{*e}(X))\cdot k^{-1}=k\cdot\exp(-tX)\cdot k^{-1}\\&=\exp(-t(\mathrm{Ad}\,k)(X)).\end{aligned}$$

对上式两边分别求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}$ 得到

$$\sigma_{*e}((\mathrm{Ad}\,k)X)=-(\mathrm{Ad}\,k)X,$$

即 $(\mathrm{Ad}\,k)X\in\mathfrak{m}$.

由于 $\mathrm{Ad}(K)$ 是 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 的紧致子群，故在 $\mathfrak{m}$ 上存在 $\mathrm{Ad}(K)$-不变的正定内积 $B:\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}\to\mathbb{R}$．实际上，因为 $\mathrm{Ad}(K)$ 是紧致的，故在 $\mathrm{Ad}(K)$ 上存在双不变体积元素 Ω，使得 $\int_{\mathrm{Ad}(K)}\Omega=1$．在 $\mathfrak{m}$ 上任意取定一个正定内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}\to\mathbb{R}$，令

$$B(X,Y)=\int_{\tilde{k}\in\mathrm{Ad}(K)}\langle\tilde{k}(X),\tilde{k}(Y)\rangle\Omega,\tag{3.17}$$

则 B 是在 $\mathfrak{m}$ 上的 $\mathrm{Ad}\,K$-不变的正定内积 (参看参考文献 [12, §2.2]).

对于任意的 $g\in G$，由 g 在 G/K 上的作用 $\tau(g):G/K\to G/K$ 的定义可知

$$\tau(g)(\pi(h))=\pi(g\cdot h),\quad\forall h\in G.\tag{3.18}$$

于是当 $g \in K$ 时，

$$\tau(g) \circ \pi = \pi \circ \mathrm{ad}(g),$$

其中 $(\mathrm{ad}\, g)h = ghg^{-1}$. 因此

$$(\tau(g))_{*p} \circ \pi_{*e} = \pi_{*e} \circ \mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{g} \to T_pM. \tag{3.19}$$

此外，当 $g \in K$ 时，$\mathrm{Ad}(g)$ 保持 $\mathfrak{m}$ 不变. 把上式限制在 $\mathfrak{m}$ 上时得到

$$(\tau(g))_{*p} \circ \pi_{*e} = \pi_{*e} \circ \mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{m} \to T_pM. \tag{3.20}$$

因为 $\pi_{*e} : \mathfrak{m} \to T_pM$ 是线性同构，我们能够在 T_pM 上引入内积 $Q_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, 使得

$$Q_p(\pi_{*e}(X), \pi_{*e}(Y)) = B(X, Y). \tag{3.21}$$

由于 B 是 $\mathrm{Ad}(K)$-不变的，(3.20) 式说明内积 Q_p 是 $\tau(K)$-不变的.

对于任意的 $q \in M$, 必有 $g \in G$ 使得 $q = \pi(g) = [g] = \tau(g)([e])$. 由此可见，微分同胚 $\tau(g)$ 把点 p 映射到 $q = [g]$. 特别地有线性同构 $(\tau(g))_{*p} : T_pM \to T_qM$. 这样，在 T_qM 上可以定义内积 $Q_q : T_qM \times T_qM \to \mathbb{R}$, 使得

$$Q_q(\tau(g)_{*p}(X), \tau(g)_{*p}(Y)) = Q_p(X, Y), \quad \forall X, Y \in T_pM,$$

即

$$G_{[g]} = (\tau(g^{-1}))^* Q_p. \tag{3.22}$$

Q_p 的 $\tau(K)$-不变性保证了 Q_q 的定义与 $q = [g]$ 的代表元 g 的选取无关，即 Q 是在 M 上定义好的黎曼度量. 从定义可知，黎曼度量 Q 是 $\tau(G)$-不变的 (或称为 G-不变的). 实际上，对于任意的 $q = [g] \in G/K$ 及 $h \in G$, 有 $\tau(h)(q) = [h \cdot g]$, 于是

$$\begin{aligned}(\tau(h))^* Q_{[h \cdot g]} &= (\tau(h))^*((\tau(g^{-1}h^{-1}))^* Q_p) \\ &= (\tau(h))^*((\tau(h^{-1}))^* \circ \tau(g^{-1})^*(Q_p)) \\ &= (\tau(g^{-1}))^* Q_p = Q_{[g]}.\end{aligned}$$

现在假定 Q 是 M 上的任意一个 G-不变黎曼度量. 定义映射 $\sigma_0 : G/K \to G/K$ 为

$$\sigma_0([g]) = [\sigma(g)], \quad \forall [g] \in G/K, \tag{3.23}$$

则有 $\sigma_0([e]) = [e]$, 并且

$$\sigma_0 \circ \sigma_0([g]) = [\sigma \circ \sigma(g)] = [g], \quad \forall [g] \in G/K,$$

所以 σ_0 是以 $[e]$ 为不动点的对合光滑同胚. (3.23) 式表明

$$\sigma_0 \circ \pi = \pi \circ \sigma : G \to G/K. \tag{3.24}$$

由于 $\pi_{*e} : \mathfrak{m} \to T_pM$ 是线性同构，对于任意的 $X \in T_pM$, 存在 $\tilde{X} \in \mathfrak{m}$ 使得 $\pi_{*e}(\tilde{X}) = X$. 因此

$$\begin{aligned}(\sigma_0)_{*p}(X) &= (\sigma_0)_{*p} \circ \pi_{*e}(\tilde{X}) = \pi_{*e} \circ \sigma_{*e}(\tilde{X}) \\ &= -\pi_{*e}(\tilde{X}) = -X,\end{aligned}$$

即有

$$(\sigma_0)_{*p} = -\mathrm{id} : T_pM \to T_pM, \tag{3.25}$$

所以 $p = [e]$ 是 σ_0 的孤立不动点.

现在需要证明 σ_0 是 (M, Q) 的等距变换. 设 $[g] \in M$, $X, Y \in T_{[g]}M$. 由 (3.24) 式可知

$$\begin{aligned}\sigma_0(\tau(g)[h]) &= \sigma_0([gh]) = [\sigma(gh)] = [\sigma(g) \cdot \sigma(h)] \\ &= \tau(\sigma(g))([\sigma(h)]) = \tau(\sigma(g))(\sigma_0([h])), \quad \forall [h] \in G/K.\end{aligned}$$

因此

$$\sigma_0 \circ \tau(g) = \tau(\sigma(g)) \circ \sigma_0, \quad \forall g \in G. \tag{3.26}$$

令

$$X_p=(\tau(g^{-1}))_{*[g]}(X),\quad Y_p=(\tau(g^{-1}))_{*[g]}(Y)\in T_pM,$$

则由 (3.26) 和 (3.25) 式，以及 Q 的 G-不变性得到

$$\begin{aligned}&(\sigma_0^*Q)_{[g]}(X,Y)\\&=Q_{[\sigma(g)]}((\sigma_0)_{*[g]}(X),(\sigma_0)_{*[g]}(Y))\\&=Q_{[\sigma(g)]}((\sigma_0)_{*[g]}\circ(\tau(g))_{*p}(X_p),(\sigma_0)_{*[g]}\circ(\tau(g))_{*p}(Y_p))\\&=Q_{[\sigma(g)]}((\tau(\sigma(g))\circ\sigma_0)_{*p}(X_p),(\tau(\sigma(g))\circ\sigma_0)_{*p}(Y_p))\\&=Q_{[\sigma(g)]}((\tau(\sigma(g)))_{*p}(X_p),(\tau(\sigma(g)))_{*p}(Y_p))\\&=Q_p(X_p,Y_p)=Q_{[g]}(X,Y).\end{aligned}$$

由于 $X,Y\in T_{[g]}M$ 的任意性，故

$$(\sigma_0)^*Q_{\sigma_0([g])}=Q_{[g]},\quad\forall[g]\in M,\tag{3.27}$$

即 σ_0 是等距变换．根据定义，σ_0 是 M 关于点 p 的中心对称．

对于任意的 $q=[g]=\tau(g)(p)$，定义

$$\sigma_q=\tau(g)\circ\sigma_0\circ\tau(g^{-1}).\tag{3.28}$$

由于 $\tau(g),\tau(g^{-1})$ 都是 (M,Q) 上的等距变换，所以 σ_q 也是 (M,Q) 上的等距变换．容易验证，σ_q 是以点 q 为孤立不动点的中心对称．因此，$(G/K,Q)$ 是黎曼对称空间．定理得证．

注记 3.1 $\mathrm{Ad}(K)\subset\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 的紧性保证了在 G/K 上 G-不变黎曼度量 Q 的存在性．但是 G/K 关于点 p 的中心对称 σ_0 与 G-不变黎曼度量 Q 的选取无关．

由于 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathrm{Ad}(K)$ 的不变子空间，映射 $k\in K\mapsto(\mathrm{Ad}k)|_{\mathfrak{m}}$ 是 K 在 $\mathfrak{m}$ 上的一个表示，称为 K 的迷向表示．如果这是一个不可约表示，即 $\mathfrak{m}$ 没有非平凡的 $\mathrm{Ad}(K)$-不变子空间，则在 $\mathfrak{m}$ 上的 $\mathrm{Ad}K$-不变内积在最多可以相差一个常数因子的意义下被唯一确定．但是，如果 K 的迷向表示 $\mathrm{Ad}:K\to\mathrm{GL}(\mathfrak{m})$ 是可约的，则在 $\mathfrak{m}$ 上有比较多的 $\mathrm{Ad}(K)$-不变内积．

注记 3.2 从定理 3.2 的证明过程可以看出，群 G 通过 $g\in G\mapsto\tau(g)$ 在 G/K 上的作用是等距的，即保持黎曼度量 Q 不变．但是 G 在 G/K 上的这种作用未必是有效的．因此，还不能认为 G 本身是 $(G/K,Q)$ 的等距变换群的子群．为了克服这个困难，需要对 G 作一些修改．令

$$N=\{g\in G:\tau(g)=\mathrm{id}_{G/K}\},$$

则 N 是 K 在 G 中的正规化子．可以证明：商群 G/N 可迁地作用在 G/K 上，而且这种作用是有效的．事实上，对于任意的 $g\in G$，令

$$\beta(gN)=\tau(g):G/K\to G/K,$$

则得到映射 $\beta:G/N\to I(G/K)$，其中 $I(G/K)$ 是黎曼对称空间 $(G/K,Q)$ 的等距变换群．进而可以证明：β 是从 G/N 到 $I(G/K)$ 的一个闭子群的 (李群) 同构，从而 G/N 是 $I(G/N)$ 的等距变换群的子群．证明的细节可参阅参考文献 [24, 第 211 页]．

§9.4 黎曼对称空间的例子

在 §9.1 中已经知道，常曲率空间在每一点都有中心对称，因而是黎曼对称空间．本节的目的是给出黎曼对称空间的更多例子．另一方面，§9.3 揭示了构造黎曼对称空间的途径，本节则通过例子来说明 §9.3 的理论，进而使我们对于黎曼对称空间有更深入和广泛的了解．

例 4.1 每一个连通的紧致李群都是黎曼对称空间．

设 G 是连通的紧致李群．在群的直积 $G\times G$ 中定义对合自同构 σ 为

$$\sigma(g_1,g_2)=(g_2,g_1),\quad\forall(g_1,g_2)\in G\times G,\tag{4.1}$$

则 $G\times G$ 在 σ 下的不动点子群是

$$K=\{(g,g);\ g\in G\}. \tag{4.2}$$

显然 K 与 G 同构，因而 K 也是连通的紧致李群. 所以 $(G\times G,K,\sigma)$ 是黎曼对称对. 根据定理 3.2, 在 $(G\times G)/K$ 上存在 $(G\times G)$-不变黎曼度量 Q, 使得 $((G\times G)/K,Q)$ 成为黎曼对称空间. $(g_1,g_2)\in G\times G$ 的 K 左陪集 $(g_1,g_2)\cdot K$, 记为 $[g_1,g_2]$.

考虑映射 $\varphi:(G\times G)/K\to G$, 使得

$$\varphi((g_1,g_2)K)=g_1g_2^{-1},\quad \forall(g_1,g_2)\in G\times G. \tag{4.3}$$

该定义是完全确定的. 事实上，如果 (h_1,h_2) 是左陪集 $(g_1,g_2)K$ 的另一个代表元，则有

$$(g_1,g_2)^{-1}\cdot(h_1,h_2)=(g_1^{-1}h_1,g_2^{-1}h_2)\in K,$$

即 $g_1^{-1}h_1=g_2^{-1}h_2$. 于是 $g_1g_2^{-1}=h_1h_2^{-1}$.

接着还要说明 $\varphi:(G\times G)/K\to G$ 是一一对应. 首先，对于任意的 $g\in G$, 显然有 $\varphi((g,e)K)=g$, 所以 φ 是满射；其次，设 $(g_1,g_2),(h_1,h_2)\in G\times G$, 如果 $\varphi((g_1,g_2)K)=\varphi((h_1,h_2)K)$, 即 $g_1g_2^{-1}=h_1h_2^{-1}$, 则 $g_1^{-1}h_1=g_2^{-1}h_2$. 于是

$$(g_1^{-1},g_2^{-1})\cdot(h_1,h_2)=(g_1^{-1}h_1,g_2^{-1}h_2)\in K.$$

所以 $(g_1,g_2)K=(h_1,h_2)K$. 因此，φ 是单射.

此外，φ 及其逆映射 φ^{-1} 显然是光滑的. 所以，φ 是从 $(G\times G)/K$ 到 G 上的光滑同胚，因而映射 φ^{-1} 在 G 上诱导出黎曼度量 $Q_1=(\varphi^{-1})^*Q$, 使得 (G,Q_1) 成为黎曼对称空间.

下面进一步讨论 G 上的黎曼度量 Q_1 和中心对称.

李群 $G\times G$ 的元素 (g_1,g_2) 在黎曼对称空间 $(G\times G)/K$ 上的作用是 $\tau(g_1,g_2)$, 其定义为

$$\tau(g_1,g_2)((h_1,h_2)K)=(g_1,g_2)\cdot(h_1,h_2)K=(g_1h_1,g_2h_2)K.$$

于是 $(g_1,g_2)\in G\times G$ 在 G 上的作用为

$$\begin{aligned}\varphi\circ\tau(g_1,g_2)\circ\varphi^{-1}(h)&=\varphi\circ\tau(g_1,g_2)((h,e)K)\\&=\varphi((g_1h,g_2)K)=g_1hg_2^{-1}=L_{g_1}\circ R_{g_2^{-1}}(h),\quad \forall h\in G,\end{aligned}$$

其中 L_{g_1} 和 $R_{g_2^{-1}}$ 分别是 G 上的左移动和右移动. 所以

$$\varphi\circ\tau(g_1,g_2)\circ\varphi^{-1}=L_{g_1}\circ R_{g_2^{-1}}. \tag{4.4}$$

由此可见，在 $(G\times G)/K$ 上的 $G\times G$-不变黎曼度量 Q 通过映射 φ^{-1} 诱导到 G 上的黎曼度量 Q_1 是双不变黎曼度量，即在 G 的左移动和右移动下都保持不变的黎曼度量.

设 $(G\times G)/K$ 关于 $O=[e,e]=(e,e)K$ 的中心对称为 $\sigma_0:(G\times G)/K\to(G\times G)/K$, 根据 (3.15) 式其定义是

$$\sigma_0([g_1,g_2])=[g_2,g_1]. \tag{4.5}$$

因而 G 关于 e 的中心对称是

$$\tilde{\sigma}_0=\varphi\circ\sigma_0\circ\varphi^{-1}.$$

所以

$$\tilde{\sigma}_0(g)=\varphi\circ\sigma_0([g,e])=\varphi([e,g])=g^{-1}. \tag{4.6}$$

设 h 是 G 中任意一点，则 $(G\times G)/K$ 关于 $[h,e]$ 的中心对称是

$$\sigma_{[h,e]}=\tau(h,e)\circ\sigma_0\circ\tau(h^{-1},e). \tag{4.7}$$

于是 G 关于 h 的中心对称是

$$\tilde{\sigma}_h=\varphi\circ\sigma_{[h,e]}\circ\varphi^{-1}.$$

将它作用在 $g\in G$ 上得到

$$\tilde{\sigma}_h(g)=\varphi\circ\sigma_{[h,e]}([g,e])$$

$$=\varphi\circ\tau(h,e)\circ\sigma_0\circ\tau(h^{-1},e)([g,e])$$
$$=\varphi\circ\tau(h,e)([e,h^{-1}g])$$
$$=\varphi([h,h^{-1}g])=hg^{-1}h. \tag{4.8}$$

下面考虑对应的李代数的分解. 设 $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数, 则 $G\times G$ 的李代数是 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}$ 的直积 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$, 其中的李代数乘法为

$$[(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)]=([X_1,X_2],[Y_1,Y_2]),$$
$$\forall(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}.$$

令

$$\mathfrak{g}_1=\{(X,0);\ X\in\mathfrak{g}\},\quad \mathfrak{g}_2=\{(0,Y);\ Y\in\mathfrak{g}\},$$

则 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$. $G\times G$ 的对合自同构 σ 诱导出李代数 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ 上的对合自同构 $\sigma_*:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$, 使得

$$\sigma_*(X,Y)=(Y,X),\quad \forall X,Y\in\mathfrak{g}.$$

于是 $G\times G$ 在 σ 下的不动点子群 K 的李代数是

$$\mathfrak{k}=\{(X,X);\ X\in\mathfrak{g}\}. \tag{4.9}$$

令

$$\mathfrak{m}=\{(X,Y)\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{g};\ \sigma_*(X,Y)=-(Y,X)\}$$
$$=\{(X,-X);\ X\in\mathfrak{g}\}, \tag{4.10}$$

则有线性空间的直和分解:

$$\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m}.$$

最后, 我们来比较 G 作为李群的指数映射与 G 作为黎曼对称空间的指数映射. 设 $\exp:\mathfrak{g}\to G$ 是李群 G 的指数映射, $\widetilde{\exp}:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to G\times G$ 是李群 $G\times G$ 的指数映射, 则有

$$\widetilde{\exp}\,(X,Y)=(\exp X,\exp Y),\quad \forall(X,Y)\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}. \tag{4.11}$$

用 $\mathrm{Exp}_e:T_eG\to G$ 表示 G 作为黎曼对称空间在 e 点处的指数映射.

根据定理 3.1, 自然投影 $\pi:G\times G\to M=(G\times G)/K$ 的切映射给出了线性同构

$$\pi_{*(e,e)}|_{\mathfrak{m}}:\mathfrak{m}\to T_{[e,e]}M.$$

另外, 前面引入的映射 $\varphi:M=(G\times G)/K\to G$ 给出了线性同构

$$\varphi_{*[e,e]}:T_{[e,e]}M\to T_eG.$$

于是得到新的线性同构

$$\varphi_{*[e,e]}\circ\pi_{*(e,e)}|_{\mathfrak{m}}:\mathfrak{m}\to T_eG.$$

任取 $X\in T_eG$, 则有

$$\begin{aligned}
&(\varphi\circ\pi)_{*(e,e)}|_{\mathfrak{m}}(X,-X)\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi\circ\pi(\exp(tX),\exp(-tX))\Big|_{t=0}\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi((\exp(tX),\exp(-tX))\cdot K)\Big|_{t=0}\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\exp(tX)\cdot(\exp(-tX))^{-1}\right)\Big|_{t=0}\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(tX))^2\Big|_{t=0}=2X.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

因此, $\mathfrak{m}$ 和 T_eG 之间的对应关系是 $(X,-X)\mapsto 2X$.

任取 $X\in\mathfrak{g}=T_eG$, 在 G 中从单位元 e 出发、以 X 为初始切向量的测地线是 $\gamma(t)=\mathrm{Exp}_e(tX)$. 另一方面, 在 $\mathfrak{m}$ 中与 X 对应的元素是 $\left(\frac{1}{2}X,-\frac{1}{2}X\right)$. 根据定理 3.1 的 (5) 知, 在 M 上从点 $[e,e]$ 出发、以 $\pi_{*(e,e)}\left(\frac{1}{2}X,-\frac{1}{2}X\right)$ 为初始切向量的测地线是

$$\tilde{\gamma}(t)=\widetilde{\exp}\left(\frac{t}{2}X,-\frac{t}{2}X\right)\cdot[e,e]=\left[\exp\left(\frac{t}{2}X\right),\exp\left(-\frac{t}{2}X\right)\right].$$

齐性空间 $(G\times G)/K$ 和 G 通过映射 φ 是等同的；同时，G 上的黎曼度量也是通过 φ 从黎曼对称空间 $(G\times G)/K$ 诱导的，因此 $\varphi\circ\tilde{\gamma}(t)$ 是 G 上的测地线．注意到

$$\varphi\circ\tilde{\gamma}(0)=e=\gamma(0),\quad \varphi_{*[e,e]}(\tilde{\gamma}'(0))=X=\gamma'(0),$$

故由测地线的唯一性得到 $\varphi\circ\tilde{\gamma}(t)=\gamma(t)$，即

$$\exp(tX)=\operatorname{Exp}_e(tX). \tag{4.13}$$

因此，$\operatorname{Exp}_e=\exp:\mathfrak{g}\to G$．这就是说，在具有双不变黎曼度量的连通紧致李群 G 上，单参数子群是测地线，而且 G 上的测地线是单参数子群的左移动或右移动．如果 X,Y 是 G 上的左不变切向量场，则 $X+Y$ 也是 G 上的左不变切向量场，它的积分曲线必定是 G 的一个单参数子群的左移动，即它的积分曲线是测地线．因此 $\mathrm{D}_{X+Y}(X+Y)=0$．利用 $\mathrm{D}_XX=\mathrm{D}_YY=0$，以及黎曼联络的无挠性条件不难得到

$$\mathrm{D}_XY=\frac{1}{2}[X,Y]. \tag{4.14}$$

以上这些结果在第二章习题的第 18 题中就已经知道了，现在从另一个角度重新得到证明．

例 4.2 n 维单位球面 S^n．

根据定义，$n+1$ 阶特殊正交群 $\mathrm{SO}(n+1)$ 是由行列式为 1 的 $n+1$ 阶正交矩阵构成的群，它是连通的紧致李群．令

$$s=\begin{pmatrix} I_n & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

其中 I_n 是 n 阶单位矩阵．则 $s^2=I_{n+1}$，即 $s^{-1}=s$．定义 $\sigma:\mathrm{SO}(n+1)\to\mathrm{SO}(n+1)$，使得

$$\sigma(A)=sAs,\quad \forall A\in\mathrm{SO}(n+1), \tag{4.16}$$

则 σ 是 $\mathrm{SO}(n+1)$ 的对合自同构．设 $A\in\mathrm{SO}(n+1)$ 满足 $\sigma(A)=A$，即 $sA=As$，则 A 必定可以写成

$$A=\begin{pmatrix} B & 0\\ 0 & \det B\end{pmatrix},\quad B\in\mathrm{O}(n),$$

其中 $\mathrm{O}(n)$ 是 n 阶正交群．由此可见，$\mathrm{SO}(n+1)$ 在对合自同构 σ 下的不动点子群是

$$K_\sigma=\left\{\begin{pmatrix} B & 0\\ 0 & \det B\end{pmatrix};\ B\in\mathrm{O}(n)\right\}\cong\mathrm{O}(n), \tag{4.17}$$

它是 $\mathrm{SO}(n+1)$ 的闭子群，因而也是 $\mathrm{SO}(n+1)$ 的紧致子群．K_σ 的单位元连通分支是

$$K_0=\left\{\begin{pmatrix} B & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ B\in\mathrm{SO}(n)\right\}\cong\mathrm{SO}(n). \tag{4.18}$$

于是根据定理 3.2, $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{O}(n)$ 和 $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ 都是黎曼对称空间．

众所周知，$\mathrm{SO}(n+1)$ 的李代数是

$$\mathfrak{so}(n+1)=\left\{\begin{pmatrix} X & \xi\\ -\xi^{t} & 0\end{pmatrix};\ \xi\in\mathbb{R}^n, X^{t}=-X\right\},$$

K_0 的李代数是

$$\mathfrak{k}=\left\{\begin{pmatrix} X & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};\ X^{t}=-X\right\}\cong\mathfrak{so}(n). \tag{4.19}$$

σ_{*e} 在 $\mathfrak{so}(n+1)$ 上的作用是

$$\sigma_{*e}(\tilde{X})=s\tilde{X}s,\quad \forall\tilde{X}\in\mathfrak{so}(n+1).$$

因此

$$\mathfrak{m}=\{\tilde{X}\in\mathfrak{so}(n+1);\ \sigma_{*e}(\tilde{X})=-\tilde{X}\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ -\xi^t & 0 \end{pmatrix};\ \xi \in \mathbb{R}^n \right\} \cong \mathbb{R}^n. \tag{4.20}$$

所以

$$\dim(\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{O}(n)) = \dim(\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)) = n.$$

下面考察 $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ 的几何意义. 设 $A \in \mathrm{SO}(n+1)$, 把 A 的每一列看作 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个向量, 则 A 等同于在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个单位正交基底: $A = (a_1, \cdots, a_{n+1})$. 此时, 左陪集 $[A] = A \cdot K_0$ 就是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中一族单位正交基底的集合:

$$\begin{aligned}[A] &= \{(\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_{n+1}) \in \mathrm{SO}(n+1);\ \tilde{a}_{n+1} = a_{n+1}\} \\ &= \left\{ A \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ B \in \mathrm{SO}(n) \right\}.\end{aligned}$$

因此, $[A]$ 是在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中第 $n+1$ 个向量 $\tilde{a}_{n+1} = a_{n+1}$ 是固定的、并且其定向与 $\{a_1, \cdots, a_{n+1}\}$ 一致的单位正交基底 $(\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_{n+1})$ 的全体构成的集合. 于是可定义映射 $\varphi : \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n) \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, 使得

$$\varphi([A]) = a_{n+1}. \tag{4.21}$$

显然, 这样定义的 φ 是一个光滑同胚.

设 $B \in \mathrm{SO}(n+1)$, 则 B 在 $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ 上的作用 $\tau(B)$ 定义为

$$\tau(B)([A]) = [BA] = (BA)K_0. \tag{4.22}$$

用 $\tilde{\tau}(B)$ 表示 B 通过映射 φ 在 S^n 上的诱导作用, 即有

$$\tilde{\tau}(B) = \varphi \circ \tau(B) \circ \varphi^{-1}, \tag{4.23}$$

则对于任意的 $a_{n+1} \in S^n$,

$$\tilde{\tau}(B)(a_{n+1}) = B \cdot a_{n+1}, \tag{4.24}$$

其中右端是矩阵 B 与列向量 a_{n+1} 的矩阵乘积. 特别地, 映射 φ 还可以表示为

$$\varphi([A]) = A \cdot \delta_{n+1} = (\tilde{\tau}(A))(\delta_{n+1}), \tag{4.25}$$

这里的 δ_{n+1} 表示列向量 $(0, \cdots, 0, 1)^t$.

设 σ_0 是 $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ 关于 $[e] = K_0$ 的中心对称, 则 S^n 关于点 δ_{n+1} 的中心对称是 $\tilde{\sigma}_0 = \varphi \circ \sigma_0 \circ \varphi^{-1}$. 易知, σ_0 的具体表达式为

$$\sigma_0(AK_0) = \sigma(A)K_0 = (sAs)K_0,$$

其中

$$\begin{aligned} sAs &= s \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{1\,n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n\,n+1} \\ a_{n+1\,1} & \cdots & a_{n+1\,n} & a_{n+1\,n+1} \end{pmatrix} s \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & -a_{1\,n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & -a_{n\,n+1} \\ -a_{n+1\,1} & \cdots & -a_{n+1\,n} & a_{n+1\,n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由此可以得到 $\tilde{\sigma}_0$ 的表达式为

$$\tilde{\sigma}_0 \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \\ x^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^1 \\ \vdots \\ -x^n \\ x^{n+1} \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \\ x^{n+1} \end{pmatrix} \in S^n. \tag{4.26}$$

现在来求 S^n 关于任意一点 $X = (x^1, \cdots, x^n, x^{n+1})^t \in S^n$ 的中心对称 $\tilde{\sigma}_X$. 根据 (4.25) 式, 设有 $A \in \mathrm{SO}(n+1)$ 使得 $X = (\tilde{\tau}(A))(\delta_{n+1})$, 即 A 的最后一列元素所成的向量 $a_{n+1} = X$. 那么 S^n 关于点 X 的中心对称为

$$\tilde{\sigma}_X = \tilde{\tau}(A) \circ \tilde{\sigma}_0 \circ \tilde{\tau}(A^{-1}).$$

设 $Y \in S^n$, 则由 (4.24) 式可知

$$\tilde{\sigma}_X(Y) = -(AsA^{-1})Y = -AsA^{\mathrm{t}}Y. \tag{4.27}$$

设 A 的第 i 行、第 j 列元素为 a_{ij}, 则 AsA^{t} 的第 i 行、第 j 列元素为

$$\begin{aligned}(AsA^{\mathrm{t}})_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} - a_{i\,n+1}a_{j\,n+1} \\ &= \delta_{ij} - 2a_{i\,n+1}a_{j\,n+1} = \delta_{ij} - 2x^i x^j.\end{aligned} \tag{4.28}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_X(Y) &= \begin{pmatrix} 2x^1x^1 - 1 & 2x^1x^2 & \cdots & 2x^1x^{n+1} \\ 2x^2x^1 & 2x^2x^2 - 1 & \cdots & 2x^2x^{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2x^{n+1}x^1 & 2x^{n+1}x^2 & \cdots & 2x^{n+1}x^{n+1} - 1 \end{pmatrix} Y \\ &= (2XX^{\mathrm{t}} - I_{n+1})Y.\end{aligned} \tag{4.29}$$

现在考察 $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ 和 S^n 上的黎曼度量. 已知 $\mathfrak{m}$ 和 $\mathbb{R}^n$ 是线性同构的. 对于任意的 $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, 令

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ -\xi^{\mathrm{t}} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ -\eta^{\mathrm{t}} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{m}, \tag{4.30}$$

则有

$$AB = \begin{pmatrix} -\xi\eta^{\mathrm{t}} & 0 \\ 0 & -\xi^{\mathrm{t}}\eta \end{pmatrix}.$$

因此

$$-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(AB) = \xi^{\mathrm{t}}\eta = \langle \xi, \eta \rangle, \tag{4.31}$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的标准内积. 显然, $-\dfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,(AB)$ 是在 $\mathfrak{m}$ 上的 $\mathrm{Ad}(K_0)$-不变内积, 因而它在 $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ 上诱导出一个 $\mathrm{SO}(n+1)$-不变黎曼度量. 此外, 利用

$$\varphi(\exp(tA) \cdot K_0) = \exp(tA)\delta_{n+1}, \quad \forall A \in \mathfrak{m},$$

并把 $T_{\delta_{n+1}}S^n$ 等同于 $\mathbb{R}^n$, 可以得到

$$\varphi_{*[e]} \circ \pi_{*e}(A) = A\delta_{n+1} = \xi. \tag{4.32}$$

由 (4.31) 式, $\varphi_{*[e]} \circ \pi_{*e} : \mathfrak{m} \to T_{\delta_{n+1}}S^n = \mathbb{R}^n$ 是等距线性同构. 因此 $\varphi : \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n) \to S^n$ 是等距, 其中 S^n 具有从 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的诱导度量.

除了黎曼对称空间 $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ 外, 还可以考虑黎曼对称空间 $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{O}(n)$. 这个空间恰好是 n 维实射影空间 $\mathbb{R}P^n$, 它可以看作是把 S^n 上的对径点粘合起来所得到的空间. 细节不在此讨论了, 请读者仿照 $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ 的情形自己完成.

例 4.3 n 维双曲空间 $H^n(1)$.

同例 4.2, 先设

$$s = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.33}$$

再令

$$\mathrm{O}(n+1,1) = \{A \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R});\ A^{\mathrm{t}}sA = s\}. \tag{4.34}$$

$\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 Lorentz 内积由下式定义: $\forall X = (x^1, \cdots, x^{n+1})^{\mathrm{t}}$, $Y = (y^1, \cdots, y^{n+1})^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^{n+1}$, 有

$$\langle X, Y \rangle_1 = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i - x^{n+1}y^{n+1} = X^{\mathrm{t}}sY.$$

不难知道, $\mathrm{O}(n+1,1)$ 恰好是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上保持 Lorentz 内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ 不变的线性变换构成的群, 通常称为 **Lorentz 群**.

设 $A = (a_{ij}) \in \mathrm{O}(n+1,1)$, 则从 A 所满足的条件 $A^{\mathrm{t}}sA = s$ 得到 $(\det A)^2 = 1$, 因而 $\det A = \pm 1$. 另外, 比较等式 $A^{\mathrm{t}}sA = s$ 两端在右下角的元素可得

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i\,n+1})^2 - (a_{n+1\,n+1})^2 = -1.$$

所以

$$(a_{n+1\,n+1})^2 = 1 + \sum_{i=1}^{n}(a_{i\,n+1})^2 \geq 1. \tag{4.35}$$

于是，或者 $a_{n+1\,n+1} \geq 1$，或者 $a_{n+1\,n+1} \leq -1$. 这样，Lorentz 群 $O(n+1,1)$ 有 4 个连通分支，其中包含单位元的连通分支是

$$G = \{A \in O(n+1,1);\ \det A = 1, a_{n+1\,n+1} \geq 1\}. \tag{4.36}$$

G 自然是一个连通李群，它在 Lorentz 空间 $\mathbb{R}^{n+1}_1 = (\mathbb{R}^{n+1}, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ 上的作用保持超曲面

$$H^n(1) = \{X = (x^1, \cdots, x^{n+1})^t \in \mathbb{R}^{n+1};\ \langle X, X\rangle_1 = -1, x^{n+1} > 0\} \tag{4.37}$$

不变．Lorentz 内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ 在 $H^n(1)$ 上诱导了一个正定的黎曼度量 g，相应的黎曼流形 $H^n(1) = (H^n(1), g)$ 就是所谓的 n 维双曲空间 (参看第二章的例 2.3). 定义映射 $\sigma: G \to G$，使得

$$\sigma(A) = sAs, \quad \forall A \in G,$$

则 σ 是 G 上的对合自同构．利用 Lorentz 群的定义得知

$$\sigma(A) = sAs = (A^t)^{-1} \cdot (A^t sA) \cdot s = (A^t)^{-1},$$

即 σ 在 G 上的作用是把 A 映射为它的转置逆矩阵．因此，G 在 σ 下的不动点子群是

$$K_\sigma = \{A \in G;\ \sigma(A) = A\} = G \cap O(n+1). \tag{4.38}$$

于是，$A \in K_\sigma$ 当且仅当 A 满足下列条件

$$sA = As, \quad A^{-1} = A^t, \quad \det A = 1, \quad a_{n+1\,n+1} \geq 1.$$

由此得到

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $B \in SO(n)$. 因此 K_σ 与 $SO(n)$ 同构，从而 K_σ 也是紧致的连通李群．可见 (G, K_σ, σ) 是一个黎曼对称对，G/K_σ 是一个黎曼对称空间．

设

$$\delta_i = (0, \cdots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \cdots, 0)^t, \quad 1 \leq i \leq n+1,$$

则 $\{\delta_i\}$ 是在 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ 中的一个单位正交基底．李群 G 中的元素 A 被看作 $n+1$ 个列向量 $(a_1, \cdots, a_{n+1})$，它们构成 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ 的一个单位正交基底 $\{a_i\}$，并且 $\{a_i\}$ 与 $\{\delta_i\}$ 有相同的定向；同时，a_{n+1} 和 δ_{n+1} 一样，都是“指向未来”的类时向量 (如果向量 $v \in \mathbb{R}^{n+1}_1$ 满足 $\langle v, v\rangle_1 < 0$，则称它为**类时向量**；如果类时向量 $v \in \mathbb{R}^{n+1}_1$ 的最后一个分量大于 0，则称它是**指向未来的**). 因此，G 可以等同于 Lorentz 向量空间 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ 中全体定向与 $\{\delta_i\}$ 一致、其最后一个向量是指向未来的类时向量的单位正交基底 $\{a_i\}$ 的集合．在这个意义下，左陪集 $[A] = AK_\sigma$ 是该集合中最后一个向量相同且等于 a_{n+1} 的单位正交基底构成的子集合；在该子集中，任意两个单位正交基底的前 n 个向量之间只差一个保持定向的正交变换．于是我们可以定义映射

$$\varphi: G/K_\sigma \to H^n(1),$$

使得

$$\varphi(AK_\sigma) = a_{n+1} = A\delta_{n+1} \in H^n(1), \tag{4.39}$$

很明显，φ 是从 G/K_σ 到 $H^n(1)$ 的光滑同胚．

与例 4.2 类似，可以具体地构造出 G/K_σ 上的 G-不变黎曼度量，使得 φ 是从黎曼对称空间 G/K_σ 到双曲空间 $H^n(1)$ 的光滑等距．同时，也可以把 $H^n(1)$ 关于任意一点 $X \in H^n(1)$ 的中心对称用矩阵表示出来．细节留给读者作为练习．

例 4.4　Grassmann 流形 $Gr(p+q, p)$.

在这里，Grassmann 流形 $Gr(p+q, p)$ 是指 $\mathbb{R}^{p+q}$ 中全体有向的 p 维子空间所构成的光滑流形．

设 $G=\mathrm{SO}(p+q)$, 令

$$\varepsilon_{p,q}=\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}, \tag{4.40}$$

则显然有 $\varepsilon_{p,q}\cdot\varepsilon_{p,q}=I_{p+q}$. 定义映射 $\sigma: G\to G$ 如下:

$$\sigma(A)=\varepsilon_{p,q}A\varepsilon_{p,q}, \quad \forall A\in G, \tag{4.41}$$

则 σ 是 G 的一个对合自同构.

为了求得 G 在 σ 下的不动点子群, 将 $A\in G$ 写成分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

其中 A_{11} 和 A_{22} 分别是 p 阶和 q 阶方阵. 于是有

$$\sigma(A)=\varepsilon_{p,q}A\varepsilon_{p,q}=\begin{pmatrix} A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

因此, $\sigma(A)=A$ 当且仅当 A_{12} 和 A_{21} 都是零矩阵. 所以

$$K_\sigma=\left\{\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix};\ A_1\in\mathrm{O}(p), A_2\in\mathrm{O}(q), \det A_1\cdot\det A_2=1\right\}. \tag{4.42}$$

显然 K_σ 是 $\mathrm{SO}(p+q)$ 的紧致子群, 它有两个连通分支, 其中包含单位元的连通分支是

$$K_0=\left\{\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix};\ A_1\in\mathrm{SO}(p), A_2\in\mathrm{SO}(q)\right\}\cong\mathrm{SO}(p)\times\mathrm{SO}(q). \tag{4.43}$$

由此可见 K_0 是 $\mathrm{SO}(p+q)$ 的紧致子群. 因此, $(\mathrm{SO}(p+q),K_0,\sigma)$ 和 $(\mathrm{SO}(p+q),K_\sigma,\sigma)$ 都是黎曼对称对, 相应的黎曼对称空间是 $\mathrm{SO}(p+q)/K_0$ 和 $\mathrm{SO}(p+q)/K_\sigma$.

下面建立黎曼对称空间 $\mathrm{SO}(p+q)/K_0$ 的几何模型. 任意的 $A\in\mathrm{SO}(p+q)$ 都可以看作在 $\mathbb{R}^{p+q}$ 中与标准基底 $\{\delta_i\}$ 具有相同定向的

单位正交基底 $\{a_1,\cdots,a_{p+q}\}$, 所以左陪集 $[A]=AK_0$ 中的元素是在 $\mathbb{R}^{p+q}$ 中与 $\{\delta_i\}$ 定向相符的单位正交基底 $\{b_i\}$, 其中 $\{b_1,\cdots,b_p\}$ 与 $\{a_1,\cdots,a_p\}$ 只差一个保定向的正交变换; $\{b_{p+1},\cdots,b_{p+q}\}$ 与 $\{a_{p+1},\cdots,a_{p+q}\}$ 只差一个保定向的正交变换. 因此, 可以定义两个映射:

$$\varphi_1:\mathrm{SO}(p+q)/K_0\to\mathrm{Gr}(p+q,p),$$
$$\varphi_2:\mathrm{SO}(p+q)/K_0\to\mathrm{Gr}(p+q,q),$$

使得

$$\begin{aligned}\varphi_1([A])&=\mathrm{Span}^+\{a_1,\cdots,a_p\},\\ \varphi_2([A])&=\mathrm{Span}^+\{a_{p+1},\cdots,a_{p+q}\},\end{aligned} \tag{4.44}$$

其中 Span^+ 表示所张成的子空间是有向子空间.

注意到 $\mathrm{SO}(p+q)$ 在 $\mathrm{Gr}(p+q,p)$ 和 $\mathrm{Gr}(p+q,q)$ 上分别有可迁的作用, 它在固定点 $\varphi_1([I_{p+q}])$ 和 $\varphi_2([I_{p+q}])$ 的迷向子群是 K_0, 因此 φ_1,φ_2 都是光滑同胚. 特别地, $\mathrm{Gr}(p+q,p)$ 和 $\mathrm{Gr}(p+q,q)$ 是光滑同胚的.

现在考察 $\mathrm{Gr}(p+q,p)$ 上的中心对称. 设

$$\pi:\mathrm{SO}(p+q)\to\mathrm{SO}(p+q)/K_0$$

是自然投影, $O=\pi(e)=K_0$, $\tilde{O}=\varphi_1(O)=\mathrm{Span}^+\{\delta_1,\cdots,\delta_p\}$. 对称空间 $\mathrm{SO}(p+q)/K_0$ 关于点 O 的中心对称是

$$\sigma_0(\pi(A))=\pi(\sigma(A))=[\varepsilon_{p,q}A\varepsilon_{p,q}]=(\varepsilon_{p,q}A\varepsilon_{p,q})K_0;$$

$\mathrm{Gr}(p+q,p)$ 关于 $\tilde{O}$ 的中心对称是

$$\tilde{\sigma}_0=\varphi_1\circ\sigma_0\circ\varphi_1^{-1}.$$

若设 $X=\mathrm{Span}^+\{a_1,\cdots,a_p\}=\varphi_1([A])$, $A\in\mathrm{SO}(p+q)$, 则

$$\tilde{\sigma}_0(X)=\varphi_1([\varepsilon_{p,q}A\varepsilon_{p,q}])=\mathrm{Span}^+\{\tilde{a}_1,\cdots,\tilde{a}_p\}, \tag{4.45}$$

其中

$$(\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_p) = \varepsilon_{p,q}(a_1, \cdots, a_p), \tag{4.46}$$

即

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{p1} & \cdots & \tilde{a}_{pp} \\ \tilde{a}_{p+1\,1} & \cdots & \tilde{a}_{p+1\,p} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{p+q\,1} & \cdots & \tilde{a}_{p+q\,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} \\ -a_{p+1\,1} & \cdots & -a_{p+1\,p} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{p+q\,1} & \cdots & -a_{p+q\,p} \end{pmatrix}.$$

在几何上，$\tilde{\sigma}_0(X)$ 恰好是子空间 X 关于子空间 $\tilde{O} = \mathrm{Span}^+\{\delta_1, \cdots, \delta_p\}$ 作镜像对称所得到的子空间.

现在 $X = \varphi_1([A]) = (\tilde{\tau}(A))(\tilde{O})$, 其中 $A \in \mathrm{SO}(p+q)$, $\tilde{\tau}(A)$ 是 A 在 $\mathrm{Gr}(p+q,p)$ 上的诱导作用. 则 $\mathrm{Gr}(p+q,p)$ 关于 X 的中心对称为

$$\tilde{\sigma}_X = \tilde{\tau}(A) \circ \tilde{\sigma}_0 \circ \tilde{\tau}(A^{-1}).$$

对于 $Y = \mathrm{Span}^+\{b_1, \cdots, b_p\} = \varphi_1([B])$, $B \in \mathrm{SO}(p+q)$, 则有

$$\tilde{\sigma}_X(Y) = \varphi_1([A\varepsilon_{p,q}A^{\mathrm{t}}B]).$$

记

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} A\varepsilon_{p,q}A^{\mathrm{t}} &= A\left(\begin{pmatrix} 2I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - I_{p+q}\right)A^{\mathrm{t}} \\ &= 2\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{t}} & A_{21}^{\mathrm{t}} \\ A_{12}^{\mathrm{t}} & A_{22}^{\mathrm{t}} \end{pmatrix} - I_{p+q} \\ &= 2\begin{pmatrix} A_{11}A_{11}^{\mathrm{t}} & A_{11}A_{21}^{\mathrm{t}} \\ A_{21}A_{11}^{\mathrm{t}} & A_{21}A_{21}^{\mathrm{t}} \end{pmatrix} - I_{p+q}, \end{aligned}$$

也就是

$$(A\varepsilon_{p,q}A^{\mathrm{t}})_{ij} = 2\sum_{k=1}^{p} a_{ik}a_{jk} - \delta_{ij}. \tag{4.47}$$

因此，如果令

$$b_k = (b_{1k}, \cdots, b_{p+q\,k})^{\mathrm{t}}, \quad \tilde{b}_k = (\tilde{b}_{1k}, \cdots, \tilde{b}_{p+q\,k})^{\mathrm{t}}, \quad 1 \le k \le p,$$

则

$$\tilde{\sigma}_X(Y) = \mathrm{Span}^+\{\tilde{b}_1, \cdots, \tilde{b}_p\}, \tag{4.48}$$

其中

$$\tilde{b}_{ik} = \sum_{j=1}^{p+q}\left(2\sum_{l=1}^{p} a_{il}a_{jl} - \delta_{ij}\right)b_{jk}, \quad 1 \le i \le p+q, \quad 1 \le k \le p.$$

例 4.5 n 维复射影空间 $\mathbb{C}P^n$.

设 $G = \mathrm{SU}(n+1)$ 是由行列式为 1 的 $n+1$ 阶酉矩阵构成的乘法群，则 G 是一个连通李群. 设

$$s = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.49}$$

并定义映射 $\sigma: G \to G$, 使得

$$\sigma(A) = sAs, \quad \forall A \in \mathrm{SU}(n+1). \tag{4.50}$$

经过直接计算可以得到 G 关于 σ 的不动点子群为

$$K_\sigma = \left\{\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix};\ B \in \mathrm{U}(n),\ b \in \mathbb{C},\ b \cdot \det B = 1\right\} \cong \mathrm{U}(n). \tag{4.51}$$

由于 K_σ 是紧致连通李群，$(\mathrm{SU}(n+1), K_\sigma, \sigma)$ 是黎曼对称对，因而 $\mathrm{SU}(n+1)/K_\sigma$ 是黎曼对称空间.

为了看清楚 $\mathrm{SU}(n+1)/K_\sigma$ 和 n 维复射影空间 $\mathbb{C}P^n$ 之间的关系，在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中取标准的 Hermite 内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, 即有

$$\langle X, Y\rangle = X^{\mathrm{t}}\overline{Y}, \quad \forall X, Y \in \mathbb{C}^{n+1}, \tag{4.52}$$

其中 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的元素表示为列向量. 这样, 在把矩阵 $A \in \mathrm{SU}(n+1)$ 的每一列看作 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的一个向量时, A 对应于 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中行列式为 1 的 Hermite 单位正交基底 $\{a_1, \cdots, a_{n+1}\}$. 在这个意义下, 左陪集 $[A] = A \cdot K_\sigma$ 是 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中满足以下条件的 Hermite 单位正交基底 $\{\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_{n+1}\}$ 的集合: 存在 $B \in \mathrm{U}(n)$, 使得

$$(\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_n) = (a_1, \cdots, a_n)B, \quad \tilde{a}_{n+1} = (\det B)^{-1} \cdot a_{n+1}. \tag{4.53}$$

因此, 能够定义映射 $\varphi : \mathrm{SU}(n+1)/K_\sigma \to \mathbb{C}P^n$, 使得

$$\varphi([A]) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{a_{n+1}\}, \tag{4.54}$$

上式右端表示在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中由非零向量 a_{n+1} 张成的一维复子空间 (即在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中通过原点、并且由 a_{n+1} 确定的复直线). 显而易见, φ 是 $\mathrm{SU}(n+1)/K_\sigma$ 和 $\mathbb{C}P^n$ 之间的一个一一对应. 事实上, φ 显然是满射. 为了说明 φ 是单射, 假设 $A, \tilde{A} \in \mathrm{SU}(n+1)$, 并且 $\varphi([A]) = \varphi([\tilde{A}])$, 即

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{a_{n+1}\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\tilde{a}_{n+1}\}.$$

于是, 存在复数 b, 满足 $\tilde{a}_{n+1} = b \cdot a_{n+1}$. 由于 $|\tilde{a}_{n+1}| = |a_{n+1}| = 1$, 必有 $|b| = 1$. 然而, $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{a_1, \cdots, a_n\}$ 和 $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_n\}$ 均与 $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{a_{n+1}\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\tilde{a}_{n+1}\}$ 是 Hermite 正交的, 故

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{a_1, \cdots, a_n\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_n\}.$$

这样, $\{a_1, \cdots, a_n\}$ 和 $\{\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_n\}$ 作为同一个 n 维复向量空间的 Hermite 单位正交基底至多相差一个酉变换, 即存在 $B \in \mathrm{U}(n)$, 使得

$$(\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_n) = (a_1, \cdots, a_n)B.$$

因为 $\det A = \det \tilde{A} = 1$, 故有 $b \cdot \det B = 1$. 这意味着 $\tilde{A} \in A \cdot K_\sigma = [A]$, 即 $[\tilde{A}] = [A]$.

从上面的讨论可以看出, 复射影空间 $\mathbb{C}P^n$ 也可以等同于 $\mathrm{U}(n+1)/\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(1)$. 但是, 此时 $\mathrm{U}(n+1)$ 在 $\mathbb{C}P^n$ 上的作用不是有效的, 而 $\mathrm{SU}(n+1)$ 在 $\mathbb{C}P^n$ 上的作用 "几乎" 是有效的 (几乎有效作用的意义是, 在 $\mathrm{SU}(n+1)$ 中由在 $\mathbb{C}P^n$ 上的作用为恒同映射的元素所构成的子群是离散的, 可参阅参考文献 [29, Vol.II, 第 187 页]).

§9.5 正交对称李代数

在前面 4 节中对于黎曼对称空间的概念、性质及其结构已经作了详细的介绍. 由于黎曼对称空间已经归结为黎曼对称对——一对李群和李群的一个对合自同构, 所以黎曼对称空间可以进一步归结为李代数问题进行研究. 从黎曼对称空间理论的现状来看, 凡是对于黎曼对称空间的深入研究, 比如黎曼对称空间的分解、分类、对偶性等等, 都无一例外地涉及李代数的理论, 特别是实半单李代数的理论; 凡是比较深刻地运用黎曼对称空间理论进行几何、分析的研究, 同样无一例外地要用到李代数理论. 但是, 要在这里详细地介绍李代数, 特别是实半单李代数理论是不可能的. 本节的目标是建立黎曼对称空间和李代数理论之间的联系; 同时, 在叙述了李代数的有关概念之后, 简要地介绍黎曼对称空间的分解和对偶性等概念. 因此本节的内容远不是完备的, 但是为读者了解黎曼对称空间与实半单李代数理论的联系勾勒出一条清晰的轮廓. 关于李代数的深入探讨可以参阅参考文献 [11]、[10] 和 [24].

9.5.1 正交对称李代数的定义

设 (G, K, σ) 是黎曼对称对, 其中 $\sigma : G \to G$ 是 G 上的对合自同构, 使得 $K_0 \subset K \subset K_\sigma$; 并且 $\mathrm{Ad}(K)$ 是一般线性群 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 的紧致子群, 其中 $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数. 同时, 映射 σ 在单位元 e 处的切映射 σ_{*e} 又是李代数 $\mathfrak{g}$ 的对合自同构 $\sigma_{*e} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. 为方便起见, 在下面仍然把 σ_{*e} 记为 σ, 并沿用 §9.3 的记法, 定义

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g};\ \sigma(X) = X\}, \tag{5.1}$$

$$\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g};\ \sigma(X) = -X\}. \tag{5.2}$$

则由定理 3.1 的结论 (4), $\mathfrak{k}$ 是 K 的李代数, 并且线性空间 $\mathfrak{g}$ 有直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}; \tag{5.3}$$

同时, $\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{m}$ 还满足关系式

$$[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{m},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}. \tag{5.4}$$

我们知道, 一般线性群 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 的李代数是 $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}) = \mathscr{L}(\mathfrak{g};\mathfrak{g})$, 并且李代数的乘法是

$$[A,B] = A \circ B - B \circ A, \qquad \forall A, B \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}).$$

现在, 李群 $\mathrm{Ad}(K)$ 是 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 的李子群, 故 $\mathrm{Ad}(K)$ 的李代数是 $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g})$ 的李子代数, 记成 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k}$. 实际上, 若设 $X \in \mathfrak{k}$, 则 $a(t) = \exp(tX) \in K$. 于是 $\mathrm{Ad}(a(t)) \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, 并且对于任意的 $Y \in \mathfrak{g}$ 有

$$\mathrm{Ad}(a(t))(Y) = (L_{a(t)})_* \circ (R_{(a(t))^{-1}})_*(Y).$$

这样, 由于 $\mathfrak{g}$ 是由 G 的左不变向量场构成的李代数, 故

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(a(t))(Y) = [X,Y]$$

(参看参考文献 [3, 第六章, 定理 4.2]). 把上式右端记为 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X(Y)$, 即 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X$ 是线性变换

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(a(t)) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \tag{5.5}$$

因此 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k} = \{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X, X \in \mathfrak{k}\} \subset \mathrm{Hom}(\mathfrak{g})$. 由于对于任意的 $X, Y \in \mathfrak{k}$, $Z \in \mathfrak{g}$ 有

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}Y(Z) - \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}Y \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X(Z) = [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]]$$

$$= [[X,Y],Z] = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}([X,Y])(Z),$$

即

$$[\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}Y] = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}([X,Y]).$$

由此可见, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k}$ 是 $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g})$ 的子代数, 它是 $\mathrm{Ad}K$ 的李代数. 反过来, $\mathrm{Ad}K$ 的单位元连通分支是 $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g})$ 的子代数 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k}$ 在 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 中所对应的连通李子群. 所以, 在黎曼对称对的定义中关于李群 $\mathrm{Ad}(K) \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 的紧致性要求可以替换成李代数 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}) \subset \mathrm{Hom}(\mathfrak{g})$ 在 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 中所对应的连通李子群的紧致性. 因此, 可以引入下面的定义:

定义 5.1 设 $\mathfrak{g}$ 是一个实李代数, σ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个对合自同构, $\mathfrak{k}$ 是 $\mathfrak{g}$ 在 σ 的作用下的不动点构成的李子代数, 即 $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g};\ \sigma(X) = X\}$. 如果 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}) \subset \mathrm{Hom}(\mathfrak{g})$ 在 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 中所对应的连通李子群是紧致的, 则称 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是一个 **正交对称李代数**.

设 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是一个正交对称李代数, $C(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的中心, 即

$$C(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g};\ [X,Y] = 0,\ \forall Y \in \mathfrak{g}\}.$$

如果 $\mathfrak{k} \cap C(\mathfrak{g}) = \{0\}$, 则称 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是 **有效的正交对称李代数**.

定义 5.2 设 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是正交对称李代数. 如果存在连通李群 G 和它的李子群 K 使得对应的李代数分别是 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{k}$, 其中 $\mathfrak{k}$ 是 $\mathfrak{g}$ 在 σ 下的不动点构成的李子代数, 则称 (G,K) 是与正交对称李代数 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 伴随的李群对.

定理 5.1 设 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是正交对称李代数, $\tilde{G}$ 是以 $\mathfrak{g}$ 为李代数的单连通李群, $\tilde{K}$ 是子代数 $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ 在 $\tilde{G}$ 中所对应的连通李子群, 则 $\tilde{K}$ 是 $\tilde{G}$ 闭子群, 并且 σ 可以提升为 $\tilde{G}$ 上的对合自同构 (仍记为 σ), 使得 $(\tilde{G},\tilde{K},\sigma)$ 成为黎曼对称对, 因而 $\tilde{G}/\tilde{K}$ 是单连通的黎曼对称空间.

证明 根据李群和李代数的一般理论 (参看参考文献 [12]), 存在李群 $\tilde{G}$ 的解析同态 $\tilde{\sigma} : \tilde{G} \to \tilde{G}$, 使得 $\tilde{\sigma}_{*e} = \sigma$. 由 $\sigma^2 = \mathrm{id}$ 易知 $\tilde{\sigma}^2 = \mathrm{id}$, 所以 $\tilde{\sigma}$ 是 $\tilde{G}$ 的对合自同构. 为了方便起见, 仍然把 $\tilde{\sigma}$ 记为 σ. 不难

看出， $\tilde{K}$ 是 σ 的不动点子群 K_σ 的单位元连通分支，因而是 $\tilde{G}$ 的闭子群. 因此， $\mathrm{Ad}(\tilde{K})$ 是 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 的连通李子群，而且以 $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{k})$ 为其李代数. 根据正交对称李代数所满足的条件， $\mathrm{Ad}(\tilde{K})$ 是紧致的，故 $(\tilde{G},\tilde{K},\sigma)$ 是黎曼对称对.

下面证明黎曼对称空间 $\tilde{G}/\tilde{K}$ 的单连通性. 用 $\tilde{\pi}:\tilde{G}\to\tilde{G}/\tilde{K}$ 记自然投影. 设 $\gamma(t)(0\le t\le 1)$ 是 $\tilde{G}/\tilde{K}$ 中以 $\tilde{\pi}(e)=\tilde{K}$ 为基点的任意一条闭路径，则在 $\tilde{G}$ 中存在一条路径 $\tilde{\gamma}(t)(0\le t\le 1)$，使得 $\tilde{\pi}(\tilde{\gamma}(t))=\gamma(t)$. 特别地， $\tilde{\pi}(\tilde{\gamma}(0))=\tilde{\pi}(\tilde{\gamma}(1))=\tilde{K}$，即 $\tilde{\gamma}(0),\tilde{\gamma}(1)\in\tilde{K}$. 由 $\tilde{K}$ 的连通性可知，在 $\tilde{K}$ 中存在路径 $\tilde{\beta}(t)(0\le t\le 1)$ 连接 $\tilde{\gamma}(1)$ 和 $\tilde{\gamma}(0)$. 令

$$\tilde{\gamma}_1(t)=\begin{cases}\tilde{\gamma}(2t), & 0\le t\le \dfrac{1}{2},\\ \tilde{\beta}(2t-1), & \dfrac{1}{2}\le t\le 1,\end{cases}$$

则 $\tilde{\gamma}_1(t)(0\le t\le 1)$ 是 $\tilde{G}$ 中的闭路径，并且 $\tilde{\pi}(\tilde{\gamma}_1)=\gamma$. 因为 $\tilde{G}$ 是单连通的，所以 $\tilde{\gamma}_1$ 同伦于一点 $\tilde{\gamma}(0)$，因而 γ 也同伦于一点 $\tilde{\pi}(\tilde{\gamma}(0))=\tilde{\pi}(e)$. 这就证明了 $\tilde{G}/\tilde{K}$ 是单连通的. 证毕.

注记 5.1 如果 (G,K) 是与正交对称李代数 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 伴随的李群对，并且 K 是 G 的连通闭子群，则 $\tilde{G}/\tilde{K}$ 是 G/K 的通用覆叠空间，因而 G/K 是局部对称黎曼空间.

事实上，因为 $\tilde{G}$ 和 G 有相同的李代数 $\mathfrak{g}$，所以有覆叠映射 $\varphi:\tilde{G}\to G$，使得 $\varphi_{*e}=\mathrm{id}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$. 令 $K_1=\varphi^{-1}(K)$，则 K_1 是 $\tilde{G}$ 的李子群，对应的李代数是 $\mathfrak{k}$. 但是 $\tilde{K}$ 是 $\tilde{G}$ 内以 $\mathfrak{k}$ 为李代数的连通李子群，所以 $\tilde{K}$ 是 K_1 的单位元连通分支，因而 $\tilde{G}/\tilde{K}$ 是 $\tilde{G}/K_1$ 的覆叠空间. 定义映射 $\tilde{\varphi}:\tilde{G}/K_1\to G/K$，使得 $\tilde{\varphi}(gK_1)=\varphi(g)K$. 则容易证明： $\tilde{\varphi}$ 是一个光滑同胚 (参看本章习题第 17 题)，从而 $\tilde{G}/\tilde{K}$ 是 G/K 的覆叠空间. 由于 $\tilde{G}$ 在 $\tilde{G}/\tilde{K}$ 上的作用是可迁的等距变换，在 G/K 上能够引进黎曼度量，使得 $\tilde{G}/\tilde{K}$ 是 G/K 的黎曼覆叠空间. 最后，由于覆叠映射都是局部等距，故 G/K 是局部对称黎曼空间.

定理 5.1 意味着，对黎曼对称空间的研究可以归结为对实李代数及其对合自同构的研究.

9.5.2 李代数的一些基本概念

为了叙述黎曼对称空间的分解定理，先简要地介绍关于李代数的几个基本概念.

设 $\mathfrak{g}$ 是一个有限维李代数， $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathrm{Hom}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示. 对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{g}$，定义

$$B(X,Y)=\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}X\circ\mathrm{ad}Y),\tag{5.6}$$

则 B 是 $\mathfrak{g}$ 上的对称双线性函数，称为 $\mathfrak{g}$ 的 **Killing 形式**. 它在 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 的作用下是不变的，即有下列恒等式：

$$B(\mathrm{ad}(X)Y,Z)+B(Y,\mathrm{ad}(X)Z)=0,\quad \forall X,Y,Z\in\mathfrak{g}.\tag{5.7}$$

设 $\mathfrak{g}$ 是非交换李代数. 如果 $\mathfrak{g}$ 不含有任何非平凡理想，则称 $\mathfrak{g}$ 是**单李代数**. 如果 $\mathfrak{g}$ 能够分解为一些单理想的直和，则称 $\mathfrak{g}$ 是 **半单李代数**. 一个李群称为 **单李群**(或 **半单李群**)，如果它的李代数是单李代数(或半单李代数). 另外，李代数的半单性可以用它的 Killing 形式来刻画. 事实上，有下面的准则 (参看参考文献 [24])：

Cartan 准则 李代数 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数当且仅当 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 形式 B 是非退化的.

此外，如果 $\mathfrak{g}$ 可以分解为单理想直和

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_r,\tag{5.8}$$

那么

$$B(\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j)=0,\quad \forall i\ne j,\tag{5.9}$$

并且 B 在 $\mathfrak{g}_i$ 上的限制恰好是 $\mathfrak{g}_i$ 的 Killing 形式.

以上这些结论对于复李代数和实李代数都是成立的.

设 $\mathfrak{g}$ 是实李代数， $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的李子代数. 如果 $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\mathfrak{h}\subset\mathrm{Hom}(\mathfrak{g})$ 在 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 中所对应的连通李子群是紧致的，则称 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 **紧致嵌入子代**

数. 若 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是一个正交对称李代数, 则 $\mathfrak{g}$ 在 σ 作用下的不动点构成的子代数 $\mathfrak{k}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个紧致嵌入子代数. 特别地, 当李代数 $\mathfrak{g}$ 是它自己的紧致嵌入子代数时, 则称 $\mathfrak{g}$ 是 **紧致李代数**. 由此可见, 李代数 $\mathfrak{g}$ 是紧致的当且仅当 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 在 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 中所对应的连通李子群是紧致的. 可以证明: 李代数 $\mathfrak{g}$ 是紧致的当且仅当存在一个紧致的李群 G, 使得 G 的李代数与 $\mathfrak{g}$ 同构. 因此, 紧致李群的李代数是紧致的, 而紧致李代数必是紧致李群的李代数.

同样, 可以用 Killing 形式的特性来判断李代数的紧致性, 即: 李代数 $\mathfrak{g}$ 是紧致的当且仅当它的 Killing 形式是半负定的. 因此, 如果 $\mathfrak{g}$ 是紧致的半单李代数, 则它的 Killing 形式 B 是负定的, 从而 $-B$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$-不变的欧氏内积.

假定 $\mathfrak{g}$ 是实李代数. 将 $\mathfrak{g}$ 作为实向量空间进行复化, 得到复向量空间 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, 其中的元素可以表示为 $X+\sqrt{-1}Y$, $X,Y\in\mathfrak{g}$. 把 $\mathfrak{g}$ 中的李代数乘法 (括号积) 作复线性扩充使之成为复向量空间 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 中的括号积, 即令

$$\begin{aligned}&[X_1+\sqrt{-1}Y_1, X_2+\sqrt{-1}Y_2]\\&=([X_1,X_2]-[Y_1,Y_2])+\sqrt{-1}([X_1,Y_2]+[Y_1,X_2]).\end{aligned}\tag{5.10}$$

则容易验证 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 关于括号积 (5.10) 成为复李代数, 称为实李代数 $\mathfrak{g}$ 的 **复化李代数**.

反过来, 设 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 是复李代数. 如果存在实李代数 $\mathfrak{g}$, 使得 $\tilde{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, 则称 $\mathfrak{g}$ 是 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的一个 **实形式**. 当然, 一般说来, 复李代数未必有实形式 (注意, 这一点与复向量空间必有实形式不同. 很明显, 复李代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 有实形式的充分必要条件是它有一个基底, 使得在该基底下对应的结构常数是实数); 而且在有实形式的情况下, 它的实形式在同构意义下也未必是唯一的. 一个重要的结论是: 复半单李代数必有紧致实形式, 并且它的紧致实形式在同构意义下是唯一的 (参看参考文献 [9, 第 175 页]).

设 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 是实李代数 $\mathfrak{g}$ 的复化李代数. 定义映射 $\tau:\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\to\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, 使得

$$\tau(X+\sqrt{-1}Y)=X-\sqrt{-1}Y,\quad \forall X,Y\in\mathfrak{g},\tag{5.11}$$

称为在 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 上关于它的实形式 $\mathfrak{g}$ 的 **共轭映射**.

共轭映射 τ 具有下列性质:

$$\begin{aligned}&\tau(X+Y)=\tau(X)+\tau(Y),\quad \tau([X,Y])=[\tau(X),\tau(Y)],\\&\tau\circ\tau=\mathrm{id},\quad \tau(\alpha X)=\overline{\alpha}\tau(X),\end{aligned}\tag{5.12}$$

其中 $X,Y\in\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, $\alpha\in\mathbb{C}$. 因此, τ 是 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 作为实李代数的对合自同构, 但不是 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 作为复李代数的自同构. 满足条件 (5.12) 的映射 τ 称为复李代数 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的 **半对合**. 易知, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的实形式 $\mathfrak{g}$ 是半对合 τ 的不动点集.

反过来, 如果 τ_1 是复李代数 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的一个半对合, 用 $\mathfrak{g}_1$ 表示 τ_1 的不动点集, 则 $\mathfrak{g}_1$ 必定是 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的一个实形式, 并且 τ_1 是在 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 上关于 $\mathfrak{g}_1$ 的共轭映射.

由于 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的 Killing 形式 B 在它的实形式 $\mathfrak{g}$ 上的限制恰好是实李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 形式 (参阅参考文献 [11]), 所以 $\mathfrak{g}$ 是半单的当且仅当其复化李代数 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 是半单的. 由此可见, 复半单李代数的紧致实形式是一个紧致的半单李代数, 因而复半单李代数的 Killing 形式在其紧致实形式上的限制是负定的.

9.5.3 Cartan 分解

定义 5.3 设 $\mathfrak{g}$ 是实半单李代数. 如果 $\mathfrak{g}$ 有作为向量空间的直和分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m},\tag{5.13}$$

使得 $\mathfrak{k}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数, 并且 $\mathfrak{k}\oplus\sqrt{-1}\,\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的紧致实形式, 则称分解式 (5.13) 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个 **Cartan 分解**.

命题 5.2 (Cartan 引理) 设 $\mathfrak{g}$ 是实半单李代数, σ 是在复化李代数 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 上关于 $\mathfrak{g}$ 的共轭映射, 则在 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 中存在一个紧致半单的实形式 $\mathfrak{g}_0$, 使得 $\mathfrak{g}_0$ 在 σ 的作用下是不变的.

命题的证明可以在参考文献 [9] 中找到. 而实半单李代数的 Cartan 分解的存在性是此命题 (Cartan 引理) 的推论, 理由如下:

设在 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 上关于 $\mathfrak{g}_0$ 的共轭算子是 τ, 那么 $\mathfrak{g}_0$ 在 σ 的作用下的不变性意味着 $\mathfrak{g}$ 在 τ 的作用下的不变性, 并且 $\tau\circ\sigma=\sigma\circ\tau$. 实际上, 设 $X\in\mathfrak{g}$, 则 $\sigma(X)=X$. 由于 $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的实形式, 故 X 可以表示为

$$X=X_1+\sqrt{-1}\,X_2,$$

其中 $X_1,X_2\in\mathfrak{g}_0$. 因此, 由 (5.12) 式得到

$$\sigma(X_1+\sqrt{-1}\,X_2)=X_1+\sqrt{-1}\,X_2=\sigma(X_1)-\sqrt{-1}\,\sigma(X_2). \tag{5.14}$$

由于 $\mathfrak{g}_0$ 在 σ 的作用下不变, $\sigma(X_1),\sigma(X_2)\in\mathfrak{g}_0$, 因而由 (5.14) 式得到

$$\sigma(X_1)=X_1;\quad \sigma(X_2)=-X_2.$$

另外, 将 τ 作用在 X 上又得到

$$\tau(X)=\tau(X_1)-\sqrt{-1}\,\tau(X_2)=X_1-\sqrt{-1}\,X_2.$$

因此

$$\begin{aligned}\sigma\circ\tau(X)=&\sigma(X_1-\sqrt{-1}\,X_2)=\sigma(X_1)+\sqrt{-1}\,\sigma(X_2)\\=&X_1-\sqrt{-1}\,X_2=\tau(X).\end{aligned}$$

这意味着 $\tau(X)\in\mathfrak{g}$. 类似的论证还说明 $\sigma\circ\tau=\tau\circ\sigma$.

记 $\theta=\sigma\circ\tau=\tau\circ\sigma:\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\to\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, 则 θ 是 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的对合自同构, 并且保持实形式 $\mathfrak{g}$ 不变, 因而也是实李代数 $\mathfrak{g}$ 的对合自同构. 用 $\mathfrak{k},\mathfrak{m}$ 分别表示 $\mathfrak{g}$ 在对合自同构 θ 的作用下对应于特征值 1 和 -1 的特征子空间, 于是有向量空间的直和分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m}. \tag{5.15}$$

不难得知,

$$\mathfrak{k}=\mathfrak{g}\cap\mathfrak{g}_0,\quad \mathfrak{m}=\mathfrak{g}\cap(\sqrt{-1}\,\mathfrak{g}_0),\quad \sqrt{-1}\,\mathfrak{m}=(\sqrt{-1}\,\mathfrak{g})\cap\mathfrak{g}_0,$$

故有

$$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}\oplus\sqrt{-1}\,\mathfrak{m}. \tag{5.16}$$

由定义 5.3 可知, (5.15) 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 分解. 映射 $\theta:\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\to\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的 **Cartan 对合**.

正交对称李代数和实半单李代数的 Cartan 分解有密切的联系, 下面将用例子来说明. 先叙述正交对称李代数的性质.

定理 5.3 设 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是正交对称李代数, 令

$$\mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{g};\ \sigma(X)=X\},\quad \mathfrak{m}=\{X\in\mathfrak{g};\ \sigma(X)=-X\}.$$

则下述结论成立:

(1) $\mathfrak{g}$ 有向量空间的直和分解: $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m}$;

(2) $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]\subset\mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{k}$;

(3) $\mathfrak{g}$ 的 Killing 形式 B 在 $\mathfrak{k}$ 上的限制是半负定的, 即有

$$B(X,X)\leq 0,\quad \forall X\in\mathfrak{k}, \tag{5.17}$$

并且 $\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{m}$ 关于 B 是彼此正交的, 即

$$B(\mathfrak{k},\mathfrak{m})=0; \tag{5.18}$$

(4) 如果 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是有效的, 则 B 在 $\mathfrak{k}$ 上的限制是负定的.

证明 上面的 (1) 和 (2) 在本节的开头部分已经验证过了, 在此不再重复.

(3) 因为 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})\subset\mathrm{Hom}(\mathfrak{g})$ 在变换群 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 中所对应的连通李子群 $\exp\,(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k})$ 是紧致李群, 所以在 $\mathfrak{g}$ 上存在 $\exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k})$-不变的欧氏内积, 记为 Q. 因此, 对于任意的 $X\in\mathfrak{k}$ 和 $Y,Z\in\mathfrak{g}$ 有

$$Q(\exp t(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X)\cdot Y,\exp t(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X)\cdot Z)=Q(Y,Z),\quad \forall t.$$

其中 $\exp t(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X)\cdot Y$ 是指 $\exp t(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X)\in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 作为 $\mathfrak{g}$ 到自身的线性变换在 $Y\in\mathfrak{g}$ 上的作用. 对 t 求导并设 $t=0$, 则得

$$Q([X,Y],Z)+Q(Y,[X,Z])=0,$$

即 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的反对称线性变换. 因此, 在 $\mathfrak{g}$ 中关于 Q 的单位正交基底下, 线性变换 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X (X\in\mathfrak{k})$ 的矩阵 $((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X)_i^j)$ 是反对称的. 所以

$$\begin{aligned} B(X,X) &= \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X\circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X)=\sum_{i,j}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X)_i^j(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X)_j^i \\ &= -\sum_{i,j}((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X)_i^j)^2\le 0. \end{aligned} \tag{5.19}$$

$\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{m}$ 关于 B 的正交性是 (2) 的直接推论.

(4) 由 (5.19) 式得知, 对于 $X\in\mathfrak{k}$, $B(X,X)=0$ 成立的充分必要条件是 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X=0$, 即对于任意的 $Y\in\mathfrak{g}$ 有 $[X,Y]=0$. 于是, $X\in C(\mathfrak{g})$. 当 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是有效的正交对称李代数时, $\mathfrak{k}\cap C(\mathfrak{g})=\{0\}$, 故 $X=0$. 因此 B 在 $\mathfrak{k}$ 上的限制是负定的.

定理证毕.

推论 5.4 设 (G,K,σ) 是黎曼对称对, $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{k}$ 分别是 G 和 K 的李代数. 如果 $\mathfrak{k}\cap C(\mathfrak{g})=\{0\}$, 则 σ 是在 G 上满足关系式

$$K_0\subset K\subset K_\sigma$$

的唯一的对合自同构.

证明 设 $\tilde\sigma$ 是 G 的另一个对合自同构, 并且满足 $\tilde K_0\subset K\subset \tilde K_{\tilde\sigma}$, 其中 $\tilde K_{\tilde\sigma}$ 是 G 在 $\tilde\sigma$ 下的不动点子群, $\tilde K_0$ 是 $\tilde K_{\tilde\sigma}$ 的单位元连通分支. 那么 $\tilde K_0$ 和 $\tilde K_{\tilde\sigma}$ 的李代数仍然是 $\mathfrak{k}$, 并且 $\mathfrak{g}$ 具有向量空间的直和分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\tilde{\mathfrak{m}},$$

其中

$$\tilde{\mathfrak{m}}=\{X\in\mathfrak{g};\ \tilde\sigma_{*e}(X)=-X\}.$$

由定理 5.3 的结论 (3) 可知, $B(\mathfrak{k},\tilde{\mathfrak{m}})=0$. 设 $X\in\mathfrak{m}$, 则 X 能够分解为 $X=Y+\tilde X$, 其中 $Y\in\mathfrak{k}$, $\tilde X\in\tilde{\mathfrak{m}}$. 于是对于任意的 $Z\in\mathfrak{k}$ 有

$$B(Y,Z)=B(X-\tilde X,Z)=B(X,Z)-B(\tilde X,Z)=0.$$

特别地有 $B(Y,Y)=0$. 根据定理 5.3 的结论 (4), B 在 $\mathfrak{k}$ 上的限制是负定的, 所以 $Y=0$, 即 $X=\tilde X$. 这说明 $\tilde{\mathfrak{m}}=\mathfrak{m}$, 因而有 $\tilde\sigma_{*e}=\sigma_{*e}$. 由此得知 $\tilde\sigma=\sigma$(参看参考文献 [12, 第 57 页]). 证毕.

依据实半单李代数的 Cartan 分解可以得到下面三种最基本的正交对称李代数, 然后通过定理 5.1 得到三种最基本的黎曼对称空间.

例 5.1 设 $\mathfrak{g}$ 是紧致的实半单李代数, σ 是 $\mathfrak{g}$ 的任意一个对合自同构, 则 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是一个有效的正交对称李代数. 事实上, 由于 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 形式 B 是负定的, 必有 $C(\mathfrak{g})=\{0\}$, 因而 $\mathfrak{k}\cap C(\mathfrak{g})=\{0\}$.

例 5.2 设 $\mathfrak{g}$ 是非紧致的实半单李代数, $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 分解. 则由 Cartan 分解的定义, $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}\oplus\sqrt{-1}\,\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的紧致实形式. 如果 θ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 对合, 那么 $\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{m}$ 分别是 θ 在 $\mathfrak{g}$ 中对应于特征值 1 和 -1 的特征子空间.

设 B 是 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的 Killing 形式. 因为 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}_0$ 都是 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的实形式, 所以 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}_0$ 的 Killing 形式分别是 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的 Killing 形式 B 在 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_0$ 上的限制, 从而有 $B(\mathfrak{k},\mathfrak{m})=B(\mathfrak{k},\sqrt{-1}\,\mathfrak{m})=0$.

因为 $\mathfrak{g}_0$ 是紧致半单李代数, 所以 $\mathfrak{g}_0$ 的 Killing 形式 B 是负定的, 它在子代数 $\mathfrak{k}$ 上的限制也是负定的. 设 $X\in\mathfrak{k}\cap C(\mathfrak{g})$, 则对于任意的 $Y\in\mathfrak{g}$ 有 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)Y=[X,Y]=0$. 因此 $B(X,X)=0$. 由于 B 在 $\mathfrak{k}$ 上的限制是负定的, 故 $X=0$. 由 X 的任意性, $\mathfrak{k}\cap C(\mathfrak{g})=\{0\}$.

现在把 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 看作实李代数, 并记为 $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$, 则 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}_0$ 都是 $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$ 的李子代数; 它们在 $\mathrm{GL}((\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}})$ 中所对应的连通李子群暂时记为 $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$, $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}_0)$ 和 $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$. 容易知道, $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$, $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}_0)$ 都是 $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$ 的闭子群. 因为 $\mathfrak{g}_0$ 是紧致半单李代数, 所以 $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}_0)$ 是紧致李群. 因此 $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})\cap\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}_0)$ 也是紧致李群. 由于 $\mathfrak{k}=\mathfrak{g}\cap\mathfrak{g}_0$, 不难看出 $\mathrm{Ad}(\mathfrak{k})=$

$\text{Ad}(\mathfrak{g}) \cap \text{Ad}(\mathfrak{g}_0)$，它是 $GL(\mathfrak{g})$ 的紧致李子群. 由此可见，$(\mathfrak{g}, \theta)$ 是有效的正交对称李代数.

例 5.3 设 $\mathfrak{m}$ 是 n 维实向量空间，$\mathfrak{k}$ 是一般线性群 $GL(\mathfrak{m})$ 的一个紧致子群的李代数，则 $\mathfrak{k}$ 是李代数 $\mathfrak{gl}(m)$ 的李子代数. 令

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}, \tag{5.20}$$

并在 $\mathfrak{g}$ 中定义括号积如下：对于任意的 $\alpha, \beta \in \mathfrak{k}$ 和任意的 $X, Y \in \mathfrak{m}$，令

$$[\alpha + X, \beta + Y] = (\alpha \circ \beta - \beta \circ \alpha) + \alpha(Y) - \beta(X). \tag{5.21}$$

容易验证，$\mathfrak{g}$ 关于上面定义的括号积是一个李代数，以 $\mathfrak{k}$ 为它的李子代数；同时，$\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的交换理想.

定义映射 $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$，使得

$$\sigma(\alpha + X) = \alpha - X, \quad \forall \alpha \in \mathfrak{k}, \quad X \in \mathfrak{m}, \tag{5.22}$$

则 σ 是 $\mathfrak{g}$ 上的对合自同构. 可以直接验证，$\mathfrak{k} \cap C(\mathfrak{g}) = \{0\}$. 所以，$(\mathfrak{g}, \sigma)$ 是有效的正交对称李代数.

9.5.4 有效正交对称李代数的分解和对偶性

定义 5.4 设 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ 是有效的正交对称李代数，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{g}$ 关于 σ 的对应于特征值 1 和 -1 的特征子空间分解.

(1) 如果 $\mathfrak{g}$ 是紧致实半单李代数，则称 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ 是**紧型正交对称李代数**;

(2) 如果 $\mathfrak{g}$ 是非紧致实半单李代数，并且 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ 恰好是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 分解，因而 σ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 对合，则称 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ 是**非紧型正交对称李代数**;

(3) 如果 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的交换理想，则称 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ 是 **Euclid 型正交对称李代数**.

定义 5.5 设 (G, K, σ) 是黎曼对称对. 如果 (G, K, σ) 所对应的有效正交对称李代数 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ 是紧型、非紧型或 Euclid 型的，则分别称 (G, K, σ) 是**紧型**、**非紧型**或 **Euclid 型黎曼对称对**; 同时称相应的 G/K 为**紧型**、**非紧型**或 **Euclid 型黎曼对称空间**.

注记 5.2 在 §9.6 中将证明紧型黎曼对称空间的截面曲率处处非负；非紧型黎曼对称空间的截面曲率处处非正；而 Euclid 型黎曼对称空间的截面曲率恒为零.

有了上面的准备，现在可以叙述如下的分解定理.

定理 5.5 设 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ 是有效的正交对称李代数，则存在 $\mathfrak{g}$ 的理想 $\mathfrak{g}_0$，$\mathfrak{g}_+$，$\mathfrak{g}_-$，使得

(1) $\mathfrak{g}$ 有直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-;$$

(2) $\mathfrak{g}_0$，$\mathfrak{g}_+$，$\mathfrak{g}_-$ 在对合自同构 σ 的作用下是不变的，同时它们关于 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 形式 B 是彼此正交的;

(3) 如果用 $\sigma_0, \sigma_+, \sigma_-$ 分别记 σ 在 $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-$ 上的限制，则 $(\mathfrak{g}_0, \sigma_0)$，$(\mathfrak{g}_+, \sigma_+)$，$(\mathfrak{g}_-, \sigma_-)$ 分别是 Euclid 型、紧型、非紧型有效正交对称李代数.

定理的证明可以参阅参考文献 [9, 第 208~210 页]. 在此只简要地介绍一下证明的主要步骤和一些事实.

设 $\mathfrak{g}$ 关于对合自同构 σ 的特征子空间分解为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}.$$

在 $\mathfrak{m}$ 上取 $\text{ad}(\mathfrak{k})$-不变的欧氏内积 Q. 这里，$\text{ad}(\mathfrak{k})$ 是 $\mathfrak{k}$ 在 $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ 上的伴随表示. 把 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 形式 B 限制在 $\mathfrak{m}$ 上得到一个对称的双线性形式. 根据线性代数的理论，$-B$ 可以看作 $(\mathfrak{m}, Q)$ 上的一个自共轭线性变换. 用 $\mathfrak{m}_0$，$\mathfrak{m}_+$ 和 $\mathfrak{m}_-$ 分别记 $-B$ 的零特征值的特征子空间、正

特征值的特征子空间和负特征值的特征子空间，则有

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{m}_+ \oplus \mathfrak{m}_-, \tag{5.23}$$

并且

$$Q(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_+) = Q(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_-) = Q(\mathfrak{m}_+, \mathfrak{m}_-) = 0,$$
$$B(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_+) = B(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_-) = B(\mathfrak{m}_+, \mathfrak{m}_-) = 0.$$

同时，$\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_+, \mathfrak{m}_-$ 在 σ 的作用下是不变的，在 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ 的作用下也是不变的．另外还有

$$[\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}] = \{0\}, \quad [\mathfrak{m}_+, \mathfrak{m}_-] = \{0\};$$

并且 $\mathfrak{m}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的交换理想．

令

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}_+ &= [\mathfrak{m}_+, \mathfrak{m}_+], \quad \mathfrak{k}_- = [\mathfrak{m}_-, \mathfrak{m}_-], \\ \mathfrak{k}_0 &= \{X \in \mathfrak{k};\ B(X, \mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{k}_-) = 0\}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

则 $\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k}_+, \mathfrak{k}_-$ 都是 $\mathfrak{k}$ 的理想，它们关于 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 形式是彼此正交的，有直和分解

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{k}_-, \tag{5.25}$$

并且满足关系式

$$[\mathfrak{k}_0, \mathfrak{m}_+] = [\mathfrak{k}_0, \mathfrak{m}_-] = \{0\}, \quad [\mathfrak{k}_+, \mathfrak{m}_0] = [\mathfrak{k}_+, \mathfrak{m}_-] = \{0\},$$
$$[\mathfrak{k}_-, \mathfrak{m}_0] = [\mathfrak{k}_-, \mathfrak{m}_+] = \{0\}.$$

再令

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{m}_0, \quad \mathfrak{g}_+ = \mathfrak{k}_+ + \mathfrak{m}_+, \quad \mathfrak{g}_- = \mathfrak{k}_- + \mathfrak{m}_-, \tag{5.26}$$

则 $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-$ 就是定理所断言的 $\mathfrak{g}$ 的理想．定理得证．

在紧型和非紧型有效正交对称李代数之间有着密切的联系，而这种联系是通过对偶关系来实现的．

设 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ 是一个正交对称李代数，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{g}$ 关于 σ 的特征子空间分解．假定 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的复化李代数，将 σ 作复线性扩张成为 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 上的对合自同构 (仍记为 σ)，则 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 关于 σ 的特征子空间分解为

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}. \tag{5.27}$$

如果以 τ 表示在 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 上关于 $\mathfrak{g}$ 的共轭映射，则容易验证 $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$．

令 $\tilde{\tau} = \sigma \circ \tau$，则 $\tilde{\tau}$ 是 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的一个半对合，其不动点集为

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{k} \oplus \sqrt{-1}\,\mathfrak{m}. \tag{5.28}$$

因此 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 也是 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的一个实形式，同时 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 在 σ 的作用下是不变的．把 σ 在 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 上的限制记为 $\tilde{\sigma}$，则 $\tilde{\sigma}$ 是 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的对合自同构，并且 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 关于 $\tilde{\sigma}$ 的特征子空间分解恰好是 (5.28) 式．如此得到的 $(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\sigma})$ 称为 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ 的 **对偶**．

定理 5.6 设 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ 是正交对称李代数，$(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\sigma})$ 是它的对偶，则

(1) $(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\sigma})$ 也是正交对称李代数，并且它的对偶是 $(\mathfrak{g}, \sigma)$；

(2) $(\mathfrak{g}, \sigma)$ 是有效的当且仅当 $(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\sigma})$ 是有效的；

(3) 如果 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ 是紧型的，则 $(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\sigma})$ 是非紧型的；如果 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ 是非紧型的，则 $(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\sigma})$ 是紧型的；如果 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ 是 Euclid 型的，则 $(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\sigma})$ 也是 Euclid 型的．

定理 5.6 的证明只是常规的逐条验证，请读者自己来完成．

定理 5.7 设 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ 是有效的正交对称李代数，且 $\mathfrak{g}$ 是半单的，则 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型 B 在 $\mathfrak{k}$ 上的限制是负定的．如果 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ 是紧型的，则 B 在 $\mathfrak{m}$ 上的限制也是负定的；如果 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ 是非紧型的，则 B 在 $\mathfrak{m}$ 上的限制是正定的．

证明 上述定理的第一个结论恰好是定理 5.3 的 (4)，但是在这里作统一的处理．

设 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是紧型正交对称李代数，则 $\mathfrak{g}$ 是紧致半单李代数，于是 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型 B 是负定的，故它在 $\mathfrak{k},\mathfrak{m}$ 上的限制都是负定的.

若 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是非紧型正交对称李代数，则它的对偶 $(\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\sigma})$ 是紧型正交对称李代数，且

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m},\qquad \tilde{\mathfrak{g}}=\mathfrak{k}\oplus\sqrt{-1}\,\mathfrak{m}.$$

如例 5.2 中所述， $\mathfrak{g}$ 和 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 都是 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的实形式，故 $\mathfrak{g}$ 和 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的 Killing 型都是 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的 Killing 型 B 在 $\mathfrak{g}$ 和 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 上的限制. 然而 $(\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\sigma})$ 是紧型的，故 B 在 $\sqrt{-1}\,\mathfrak{m}$ 上的限制是负定的，因此 B 在 $\mathfrak{m}$ 上的限制是正定的. 证毕.

定理 5.8 设 M 是单连通的的黎曼对称空间，则 M 等距于黎曼乘积空间 $M_0\times M_+\times M_-$，其中 M_0 是欧氏空间， M_+ 是单连通的紧型黎曼对称空间， M_- 是单连通的非紧型黎曼对称空间.

证明 用 G 表示 M 的等距变换群 $I(M)$ 的单位元连通分支， K 表示 G 在任意一个固定点 $O\in M$ 的迷向子群，则有 $M=G/K$.

设 $(\tilde{G},\varphi)$ 是 G 的通用覆叠群， φ 是相应的覆叠映射. 用 $\tilde{K}$ 表示 $\varphi^{-1}(K)$ 的单位元连通分支. 定义映射 $\psi:\tilde{G}/\tilde{K}\to G/K$，使得

$$\psi(g\tilde{K})=\varphi(g)\cdot K,\quad \forall g\in\tilde{G},\tag{5.29}$$

则 $\psi:\tilde{G}/\tilde{K}\to G/K$ 是 $M=G/K$ 的通用覆叠映射 (参看注记 5.1). 因为 M 是单连通的，所以 ψ 是光滑同胚，即 $M=G/K$ 等同于 $\tilde{G}/\tilde{K}$. 设 $\tilde{G}$(和 G) 的李代数是 $\mathfrak{g}$，则根据定理 5.5，$\mathfrak{g}$ 有直和分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_+\oplus\mathfrak{g}_-;$$

对应地， $\tilde{G}$ 有直积分解 (参阅参考文献 [12])

$$\tilde{G}=G_0\times G_+\times G_-,$$

其中 G_0,G_+ 和 G_- 都是单连通李群. 另外，对于分解式 (5.25)，$\tilde{K}$ 又有直积分解

$$\tilde{K}=K_0\times K_+\times K_-.$$

因此

$$M=\tilde{G}/\tilde{K}=(G_0/K_0)\times(G_+/K_+)\times(G_-/K_-).$$

令

$$M_0=G_0/K_0,\quad M_+=G_+/K_+,\quad M_-=G_-/K_-,$$

则 M_0,M_+ 和 M_- 都是单连通的，并且分别是 Euclid 型、紧型和非紧型黎曼对称空间. 此外，由于 Euclid 型黎曼对称空间是平坦的，因而是局部欧氏空间. 再由单连通性， M_0 光滑等距于一个欧氏空间 (参看第五章的推论 5.3). 定理得证.

9.5.5 半单型黎曼对称空间

紧型和非紧型黎曼对称空间统称为**半单型黎曼对称空间**. 下面的定理说明，对于半单型黎曼对称空间而言，其等距变换群的单位元连通分支是一个半单李群.

定理 5.9 设 (G,K,σ) 是黎曼对称对，其中 G 是半单李群，它有效地作用在黎曼对称空间 $M=G/K$ 上. 则 G 恰好是 M 的等距变换群 $I(M)$ 的单位元连通分支 $I_0(M)$.

证明 令 $p=[e]=K$. 设 G 和 K 的李代数分别是 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{k}$，则有分解式

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m},$$

其中 $\mathfrak{m}=\{X\in\mathfrak{g};\ \sigma_{*e}(X)=-X\}$ 与切空间 T_pM 同构.

再令 $G'=I_0(M)$. 设 K' 是 G' 在点 p 的迷向子群. 另一方面，M 在点 p 的中心对称 σ_p 给出了 G' 的对合自同构 $\sigma':G'\to G'$(参看定理 3.1). 因为 G 在 M 上的作用是有效的，所以 G 同构于 M 的等距变换群的一个子群，因而是 G' 的连通子群，并且 $K\subset K'$. 如果用 $\mathfrak{g}',\mathfrak{k}'$ 分别表示 G',K' 的李代数，则 $\mathfrak{g}'$ 也有向量空间的直和分解

$$\mathfrak{g}'=\mathfrak{k}'\oplus\mathfrak{m}',$$

其中 $\mathfrak{m}' = \{X \in G';\ \sigma'_{*e}(X) = -X\}$ 与 T_pM 也是同构的.

由于 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}'$, $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}'$, 不难知道 $\sigma_{*e} = \sigma'_{*e}|_{\mathfrak{g}}$, 从而有 $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}'$. 但是 $\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{m}'$ 同构, 所以 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$. 再根据定理 5.5, $\mathfrak{g}'$ 有直和分解

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-,$$

相应地有

$$\mathfrak{k}' = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{k}_-, \quad \mathfrak{m}' = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{m}_+ \oplus \mathfrak{m}_-,$$

其中最后一式是向量空间的直和分解. 同时还有

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{m}_0, \quad \mathfrak{g}_\pm = \mathfrak{k}_\pm \oplus \mathfrak{m}_\pm, \quad [\mathfrak{m}_\pm, \mathfrak{m}_\pm] = \mathfrak{k}_\pm.$$

在定理 5.5 的证明过程中知道, $\mathfrak{m}_0$ 不仅是 $\mathfrak{g}_0$ 的交换理想, 而且是 $\mathfrak{g}'$ 的交换理想, 因而它也是 $\mathfrak{g}$ 的交换理想. 由于 $\mathfrak{g}$ 的半单性, $\mathfrak{g}$ 上的 Killing 形式 B 是非退化的, 故 $\mathfrak{m}_0 = \{0\}$. 因为 $\mathfrak{k}_0$ 是 $\mathfrak{g}'$ 的理想, 所以 $K_0 = \exp \mathfrak{k}_0$ 是 G' 的正规子群, 且有 $K_0 \subset K'$. 但是 G' 在 M 上的作用是有效的, 所以 K' 不含有 G' 的任何非平凡正规子群, 从而有 $\mathfrak{k}_0 = \{0\}$. 这样,

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}' &= \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_- = \mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{k}_- \oplus \mathfrak{m}_+ \oplus \mathfrak{m}_- \\ &= [\mathfrak{m}_+, \mathfrak{m}_+] \oplus [\mathfrak{m}_-, \mathfrak{m}_-] \oplus \mathfrak{m}_+ \oplus \mathfrak{m}_- \\ &\subset [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \oplus \mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}.\end{aligned}$$

因此 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$, 从而 $G = G' = I_0(M)$. 证毕.

半单型黎曼对称空间还能作进一步的分解. 为了说明这一点, 先引进一个概念.

定义 5.6　设 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ 是半单型有效正交对称李代数, $\mathfrak{g}$ 关于 σ 的特征子空间直和分解是 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$. 如果迷向表示 $\mathrm{ad} : \mathfrak{k} \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{m})$ 是不可约的, 即 $\mathfrak{m}$ 没有非平凡的 $\mathrm{ad}\mathfrak{k}$-不变子空间, 则称 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ 是**不可约的**.

如果半单型黎曼对称对 (G, K, σ) 所对应的正交对称李代数 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ 是不可约的, 则称 $M = G/K$ 是**不可约的黎曼对称空间**.

在这里, 由于 $[\mathfrak{m}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{m}$, 若对于任意的 $X \in \mathfrak{k}, Y \in \mathfrak{m}$, 命 $\mathrm{ad}X(Y) = [X, Y]$, 则 $\mathrm{ad}X \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{m})$. 同态 $\mathrm{ad} : \mathfrak{k} \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{m})$ 称为 $\mathfrak{k}$ 的迷向表示.

定理 5.10　设 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ 是不可约正交对称李代数, 则 $\mathfrak{g}$ 或者是单李代数, 或者是理想的直和 $\mathfrak{g}_1 \oplus \sigma(\mathfrak{g}_1)$, 其中 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的紧单理想.

证明　设 $\mathfrak{g}$ 不是单李代数. 由 $\mathfrak{g}$ 的半单性可知, $\mathfrak{g}$ 有单理想 $\mathfrak{g}_1$, 并且 $\mathfrak{g}_1^\perp = \{X \in \mathfrak{g};\ B(X, \mathfrak{g}_1) = 0\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的非零理想. 显然, $\mathfrak{g}$ 有直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1^\perp.$$

由于 $\sigma(\mathfrak{g}_1)$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的单理想,所以或者有 $\sigma(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_1$, 或者有 $\sigma(\mathfrak{g}_1) \cap \mathfrak{g}_1 = \{0\}$.

如果 $\sigma(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_1$, 由于 σ 是 $\mathfrak{g}$ 的自同构, 故

$$B(\mathfrak{g}_1, \sigma(\mathfrak{g}_1^\perp)) = B(\sigma(\mathfrak{g}_1), \mathfrak{g}_1^\perp) = B(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1^\perp) = 0,$$

可以得知 $\sigma(\mathfrak{g}_1^\perp) = \mathfrak{g}_1^\perp$. 分别设 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1^\perp$ 中对应于 σ 的特征值 -1 的特征子空间为 $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1^\perp$, 则 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_1^\perp$. 由于 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_1^\perp$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的理想, $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_1^\perp$ 都不会包含在 $\mathfrak{k}$ 之内, 于是 $\mathfrak{m}_1 \neq \{0\}$, $\mathfrak{m}_1^\perp \neq \{0\}$. 所以 $\mathfrak{m}_1$ 和 $\mathfrak{m}_1^\perp$ 都是 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ 的非零不变子空间. 这与 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ 的不可约性相矛盾.

如果 $\sigma(\mathfrak{g}_1) \cap \mathfrak{g}_1 = \{0\}$, 则有

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \sigma(\mathfrak{g}_1) \oplus \mathfrak{g}_2,$$

其中 $\mathfrak{g}_2 = (\mathfrak{g}_1 \oplus \sigma(\mathfrak{g}_1))^\perp$. 易知 $\sigma(\mathfrak{g}_2) = \mathfrak{g}_2$. 如果 $\mathfrak{g}_2 \neq \{0\}$, 那么仿照前面的推理可知 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ 是可约的, 与假设矛盾. 这说明 $\mathfrak{g}_2 = \{0\}$, 从而有 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \sigma(\mathfrak{g}_1)$.

很明显,

$$\mathfrak{k} = \{X + \sigma(X);\ X \in \mathfrak{g}_1\}, \quad \mathfrak{m} = \{X - \sigma(X);\ X \in \mathfrak{g}_1\}.$$

所以，$\mathfrak{k}$ 与 $\mathfrak{g}_1$ 同构，因而 $\mathfrak{g}_1$ 是紧致单李代数．证毕．

注记 5.3 设 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是有效的正交对称李代数．容易验证：如果 $\mathfrak{g}$ 是单李代数，或存在 $\mathfrak{g}$ 的紧单理想 $\mathfrak{g}_1$ 使得 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\sigma(\mathfrak{g}_1)$，则 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是不可约的．

现在有更进一步的分解定理：

定理 5.11 设 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是半单的有效正交对称李代数，则 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 可以分解为若干不可约的正交对称李代数的直和：

$$(\mathfrak{g},\sigma)=(\mathfrak{g}_1,\sigma_1)\oplus\cdots\oplus(\mathfrak{g}_r,\sigma_r),$$

并且除了排列次序外，上述分解是唯一的．

证明 这里只叙述证明的主要过程，细节可以参阅参考文献 [7].

设 $\mathfrak{g}$ 关于 σ 有特征子空间分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m}$，其中 $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{k}$．由于 $\mathfrak{g}$ 是半单的，其 Killing 形式 B 是非退化的．又因为 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是有效的，所以根据定理 5.3 之 (4)，B 在 $\mathfrak{k}$ 上的限制是负定的．由此不难知道，$[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]=\mathfrak{k}$(参看本章习题第 26 题)．设 $\mathfrak{m}$ 可以分解为 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$-不变的不可约子空间的直和

$$\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{m}_r,\tag{5.30}$$

那么当 $i\neq j$ 时，$B(\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j)=0$.

因为 $B(\mathfrak{k},\mathfrak{m})=0$(参看定理 5.3)，并且 $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]=\mathfrak{k}$，所以利用 (5.7) 式可知，当 $i\neq j$ 时

$$B(\mathfrak{m},[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j])=B(\mathfrak{k},[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j])=B([\mathfrak{k},\mathfrak{m}_i],\mathfrak{m}_j)=0.$$

于是

$$B(\mathfrak{g},[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j])=0.$$

由 B 的非退化性得知

$$[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j]=0,\quad \forall i\neq j.$$

对于每一个 i，令

$$\mathfrak{k}_i=[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i],\quad \mathfrak{g}_i=\mathfrak{k}_i+\mathfrak{m}_i,\tag{5.31}$$

则有

$$\mathfrak{k}=[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]=\sum_i[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i]=\sum_i\mathfrak{k}_i,\quad [\mathfrak{k}_i,\mathfrak{m}_i]\subset\mathfrak{m}_i.\tag{5.32}$$

同时，当 $i\neq j$ 时，

$$[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{m}_j]=[[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i],\mathfrak{m}_j]=[[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j],\mathfrak{m}_i]=0.\tag{5.33}$$

于是

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{m}=\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_r.$$

因为

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{m}_i]=[\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m},\mathfrak{m}_i]=[\mathfrak{k},\mathfrak{m}_i]+\sum_j[\mathfrak{m}_j,\mathfrak{m}_i]\subset\mathfrak{m}_i+\mathfrak{k}_i=\mathfrak{g}_i,$$
$$[\mathfrak{g},\mathfrak{k}_i]=[\mathfrak{g},[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i]]=[[\mathfrak{g},\mathfrak{m}_i],\mathfrak{m}_i]\subset[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{m}_i]\subset\mathfrak{g}_i,$$

所以 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}_i]\subset\mathfrak{g}_i$，因而 $\mathfrak{g}_i$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想．

另一方面，容易得到，当 $i\neq j$ 时，

$$B(\mathfrak{k}_i,\mathfrak{k}_j)=B(\mathfrak{k}_i,\mathfrak{m}_j)=B(\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j)=0.$$

于是，$B(\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j)=0(\forall i\neq j)$．从而有

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_r.$$

由 $\mathfrak{m}_i$ 的定义可知，$\sigma(\mathfrak{m}_i)=\mathfrak{m}_i$，因此 $\sigma(\mathfrak{g}_i)=\mathfrak{g}_i$．令 $\sigma_i=\sigma|_{\mathfrak{g}_i}$，则 $(\mathfrak{g}_i,\sigma_i)$ 是正交对称李代数．根据 (5.33) 式，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}_i)=\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})|_{\mathfrak{m}_i}$．注意到 $\mathfrak{m}_i$ 是 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ 的不变子空间，因而也是 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}_i)$ 的不变子空间．同时，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ 在 $\mathfrak{m}_i$ 上的不可约性意味着 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m}_i)$ 在 $\mathfrak{m}_i$ 上也是不可约的．因此，$(\mathfrak{g}_i,\sigma_i)$ 是不可约的正交对称李代数．

设 $\mathfrak{g}$ 有另一个分解

$$(\mathfrak{g},\sigma)=(\mathfrak{g}_1',\sigma_1')\oplus\cdots\oplus(\mathfrak{g}_t',\sigma_t'),$$

使得

$$\mathfrak{g}_i'=\mathfrak{k}_i'\oplus\mathfrak{m}_i',\quad \mathfrak{k}_i'=[\mathfrak{m}_i',\mathfrak{m}_i'].$$

由于 $[\mathfrak{k}_i,[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{m}_i]]\subset[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{m}_i]$，易知 $[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{m}_i]$ 是 $\mathfrak{m}_i$ 中的 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}_i)$-不变子空间．因为 $\mathfrak{m}_i$ 是不可约的，所以 $[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{m}_i]=\mathfrak{m}_i$．结合 (5.33) 式，又得 $[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{m}]=\mathfrak{m}_i$．注意到 $\mathfrak{m}_j'$ 是 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}:\mathfrak{k}\to\mathrm{Hom}(\mathfrak{m})$ 的不可约不变子空间，可知它在 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}_i)$ 的作用下是不变的，即有 $[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{m}_j']\subset\mathfrak{m}_j'$．由于 $[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{m}]=\mathfrak{m}_i\neq\{0\}$，故必有某个 j 使得 $[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{m}_j']\neq\{0\}$．所以

$$[\mathfrak{k}_j',[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{m}_j']]\subset[[\mathfrak{k}_j',\mathfrak{k}_i],\mathfrak{m}_j']+[\mathfrak{k}_i,[\mathfrak{k}_j',\mathfrak{m}_j']]\subset[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{m}_j'].$$

于是 $[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{m}_j']$ 是在 $\mathfrak{m}_j'$ 中非零的 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}_j')$-不变子空间．根据 $\mathfrak{m}_j'$ 的不可约性得

$$\mathfrak{m}_j'=[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{m}_j']\subset[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{m}]=\mathfrak{m}_i.$$

注意到 $\mathfrak{m}_j'$ 是 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}_i)$-不变子空间，并利用 $\mathfrak{m}_i$ 的不可约性便可得到 $\mathfrak{m}_j'=\mathfrak{m}_i$．

由此不难看出，$r=t$，并且 $\mathfrak{m}_1',\cdots,\mathfrak{m}_t'$ 是 $\mathfrak{m}_1,\cdots,\mathfrak{m}_r$ 的一个排列，因而 $\mathfrak{g}_1',\cdots,\mathfrak{g}_t'$ 是 $\mathfrak{g}_1,\cdots,\mathfrak{g}_r$ 的排列．

推论 5.12　设 M 是单连通的半单型黎曼对称空间，则 M 可以分解为单连通的不可约黎曼对称空间的乘积．

上述推论的证明与定理 5.8 的证明相类似，请读者自己来完成．

§9.6　黎曼对称空间的曲率张量

黎曼对称空间 M 可以表示成齐性空间 $M=G/K$．此时，M 上的黎曼度量是 G-不变的．本节的目的是，利用与 M 相对应的正交对称李代数 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 把 M 上的黎曼联络和曲率张量表示出来，然后给出 Euclid 型、紧型、非紧型黎曼对称空间的曲率特征．

我们从 M 上的 Killing 向量场出发进行讨论．在第二章习题的第 23 题中曾经给出过 Killing 向量场的定义和特征．为了便于应用，在这里重新叙述它的定义．

定义 6.1　设 (M,g) 是 m 维黎曼流形，$X\in\mathfrak{X}(M)$．对于点 $p\in M$，设 $\varphi^{(p)}:(-\epsilon_p,\epsilon_p)\times U_p\to M$ 是 X 所生成的局部单参数变换群，其中 $U_p\subset M$ 是点 p 的某个开邻域．如果对于每一点 $p\in M$ 以及任意的 $t\in(-\epsilon_p,\epsilon_p)$，映射 $\varphi_t^{(p)}=\varphi^{(p)}(t,\cdot):U_p\to M$ 是局部光滑等距，则称 X 是 M 上的 **Killing 向量场**．

简单地说，M 上的 Killing 向量场是作用在 M 上的单参数局部等距变换群所诱导的切向量场．

现设 X 是 M 上的 Killing 向量场，$\varphi(t,p)$ 是 X 所生成的局部单参数等距变换群．记

$$\langle Y,Z\rangle=g(Y,Z),\quad\forall\,Y,\ Z\in\mathfrak{X}(M).$$

则对于任意的 $p\in M$ 和充分小的 t 有

$$\langle(\varphi_{-t})_*Y,(\varphi_{-t})_*Z\rangle(p)=\langle Y,Z\rangle(\varphi_t(p)).$$

把算子 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ 作用到上式的两端并且利用等式 (参看参考文献 [3, 第三章，定理 3.5])

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\varphi_{-t})_*Y=[X,Y],$$

可得

$$X\langle Y,Z\rangle=\langle[X,Y],Z\rangle+\langle Y,[X,Z]\rangle.$$

再利用黎曼联络的性质，将上式展开便有

$$\langle\mathrm{D}_YX,Z\rangle+\langle\mathrm{D}_ZX,Y\rangle=0,\quad\forall\,Y,Z\in\mathfrak{X}(M).\tag{6.1}$$

设 G 是黎曼流形 (M,g) 的等距变换群的单位元连通分支. 如果 G 是非平凡的, 则 G 是维数 ≥ 1 的李群, 并且是 (左) 作用在 M 上的李氏变换群 (参看命题 2.9).

用 $\mathfrak{g} = T_eG$ 表示 G 的李代数, 其中的李代数乘法是由左不变向量场的 Poisson 括号积诱导的. 对于任意的 $\xi \in T_eG$, $\exp(t\xi)(t \in \mathbb{R})$ 是 G 的单参数子群, 它在 M 上确定了一个基本向量场

$$\tilde{\xi}(x) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp(t\xi) \cdot x, \quad \forall\, x \in M. \tag{6.2}$$

因为 $\exp(t\xi)$ 是 M 上的单参数等距变换群, 所以 $\tilde{\xi}$ 是 M 上的 Killing 向量场. 由于 G 在 M 上的作用是有效的, 根据李氏变换群的基本定理 (参看参考文献 [3, 第六章, 定理 5.1]), 在 M 上由 (6.2) 式给出的 Killing 向量场构成一个李代数, 它与李群 G 上的右不变向量场所构成的李代数是同构的. 若用 $[\cdot,\cdot]$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的李代数乘法, 则由 G 上的右不变向量场的 Poisson 括号积在 $T_eG = \mathfrak{g}$ 上诱导的乘法是 $-[\cdot,\cdot]$(参看参考文献 [3, 第六章, 习题 16]). 因此, 若 $\xi, \eta \in T_eG$, 则 $[\tilde{\xi}, \tilde{\eta}]$ 是由 $-[\xi,\eta]$ 确定的 Killing 向量场, 即

$$\begin{aligned} &[\tilde{\xi},\tilde{\eta}](x) = -\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp(t[\xi,\eta]) \cdot x, \quad \forall\, x \in M; \\ &[\tilde{\xi},\tilde{\eta}] = -\widetilde{[\xi,\eta]}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

定理 6.1 设 (M,g) 是黎曼流形, D 是 M 上的黎曼联络, 则对于任意三个 Killing 向量场 X,Y,Z, 有

$$\langle \mathrm{D}_XY, Z\rangle = \frac{1}{2}(\langle [X,Y],Z\rangle + \langle [Y,Z],X\rangle - \langle [Z,X],Y\rangle). \tag{6.4}$$

证明 根据 D 的无挠性, $\mathrm{D}_XY - \mathrm{D}_YX = [X,Y]$, 因而

$$\langle \mathrm{D}_XY, Z\rangle - \langle \mathrm{D}_YX, Z\rangle = \langle [X,Y], Z\rangle.$$

由于 X 是 Killing 向量场, 从 (6.1) 式得到

$$\langle \mathrm{D}_YX, Z\rangle = -\langle \mathrm{D}_ZX, Y\rangle.$$

于是

$$\langle \mathrm{D}_XY, Z\rangle + \langle \mathrm{D}_ZX, Y\rangle = \langle [X,Y], Z\rangle. \tag{6.5}$$

因为 X,Y,Z 都为 Killing 向量场, 将上式中的 X,Y,Z 作轮换又得到

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{D}_YZ, X\rangle + \langle \mathrm{D}_XY, Z\rangle &= \langle [Y,Z], X\rangle, \\ \langle \mathrm{D}_ZX, Y\rangle + \langle \mathrm{D}_YZ, X\rangle &= \langle [Z,X], Y\rangle. \end{aligned}$$

将前两式相加再减去第三式得到

$$2\langle \mathrm{D}_XY, Z\rangle = \langle [X,Y], Z\rangle + \langle [Y,Z], X\rangle - \langle [Z,X], Y\rangle,$$

此即 (6.4) 式. 证毕.

如果把定理 6.1 用于黎曼对称空间, 便可得到黎曼联络和曲率算子的表达式. 为此, 设 (G,K,σ) 是黎曼对称对, $M = G/K$ 是黎曼对称空间, 并且 G 在 M 上的左作用是有效的, 因而是左作用在 M 上的一个等距变换群. 用 $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ 分别表示 G 和 K 的李代数, 则 $\mathfrak{g}$ 有关于 σ 的特征子空间分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m},$$

其中 $\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{m}$ 满足关系式

$$[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{m},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}. \tag{6.6}$$

自然投影 $\pi: G \to M = G/K$ 的切映射 $\pi_{*e}: T_eG \to T_{[e]}M$ 给出了从 $\mathfrak{g} = T_eG$ 到 $T_{[e]}M$ 的满同态. 事实上, 对于任意的 $\xi \in \mathfrak{g}$,

$$\pi_{*e}(\xi) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp(t\xi) \cdot K. \tag{6.7}$$

若用 $\tilde{\xi}$ 表示 $\xi \in \mathfrak{g}$ 所对应的 Killing 向量场, 则由 (6.2) 式得知

$$\pi_{*e}(\xi) = \tilde{\xi}([e]). \tag{6.8}$$

很明显, 映射 π_{*e} 的核恰好是 $\mathfrak{k}$, 所以 $T_{[e]}M \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \cong \mathfrak{m}$, 并且 $\pi_{*e}|_{\mathfrak{m}}: \mathfrak{m} \to T_{[e]}M$ 是线性同构. 注意到 M 上的黎曼度量恰好是 $\mathfrak{m}$ 上的 $\mathrm{Ad}\,K$-

不变内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 通过映射 $\pi_{*e}|_{\mathfrak{m}}$ 移植到 $T_{[e]}M$ 上，然后通过 G 在 M 上的左作用生成的，所以 $\pi_{*e}|_{\mathfrak{m}}$ 是等距的线性同构.

对于每一个 $\xi\in\mathfrak{g}$, 定义映射 $\mathrm{ad}\,\tilde{\xi}:\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ 如下：

$$\mathrm{ad}\,\tilde{\xi}(X)=[\tilde{\xi},X],\quad \forall X\in\mathfrak{X}(M),$$

其中 $[\cdot,\cdot]$ 是在 M 上的光滑向量场之间的 Poisson 括号积. 用 $(\mathrm{ad}\,\tilde{\xi})^*$ 表示 $\mathrm{ad}\,\tilde{\xi}$ 的共轭映射，即对于任意的 $X\in\mathfrak{X}(M)$ 有

$$\langle(\mathrm{ad}\,\tilde{\xi})^*\tilde{\eta},X\rangle=\langle\tilde{\eta},\mathrm{ad}\,\tilde{\xi}(X)\rangle=\langle\tilde{\eta},[\tilde{\xi},X]\rangle. \tag{6.9}$$

定理 6.2 设 $M=G/K$ 是黎曼对称对 (G,K,σ) 所对应的黎曼对称空间， G 在 M 上的作用是有效的，则对于任意的 $\xi,\ \eta\in\mathfrak{g}$ 有

$$\mathrm{D}_{\tilde{\xi}}\tilde{\eta}=\frac{1}{2}\left([\tilde{\xi},\tilde{\eta}]+(\mathrm{ad}\,\tilde{\xi})^*\tilde{\eta}+(\mathrm{ad}\,\tilde{\eta})^*\tilde{\xi}\right) \tag{6.10}$$

特别地，当 $\xi\in\mathfrak{m},\ \eta\in\mathfrak{m}$ 时有

$$\mathrm{D}_{\tilde{\xi}}\tilde{\eta}([e])=0; \tag{6.11}$$

当 $\xi\in\mathfrak{m},\ \eta\in\mathfrak{k}$ 时有

$$\mathrm{D}_{\tilde{\xi}}\tilde{\eta}([e])=-\widetilde{[\xi,\eta]}([e]), \tag{6.12}$$

其中 $[\xi,\eta]$ 是指李代数 $\mathfrak{g}$ 的李括号.

证明 结论 (6.10) 是表达式 (6.4) 的直接推论. 事实上，在任意一点 $[g]\in M$, $T_{[g]}M$ 是由 $\{\tilde{\xi}([g]);\ \xi\in\mathfrak{g}\}$ 张成的，因而 (6.4) 式在 $[g]\in M$ 处对于任意的 $Z\in T_{[g]}M$ 成立，即

$$\langle\mathrm{D}_{\tilde{\xi}}\tilde{\eta}([g]),Z\rangle=\frac{1}{2}\langle([\tilde{\xi},\tilde{\eta}]+(\mathrm{ad}\,\tilde{\xi})^*\tilde{\eta}+(\mathrm{ad}\,\tilde{\eta})^*\tilde{\xi})([g]),Z\rangle,$$

由此得到 (6.10) 式.

当 $\xi,\ \eta\in\mathfrak{m}$ 时，由 (6.6) 式可知， $[\xi,\eta]\in\mathfrak{k}$, 故由 (6.8) 式得知 $\widetilde{[\xi,\eta]}([e])=0$. 再由 (6.3) 式得到 $[\tilde{\xi},\tilde{\eta}]([e])=0$. 当 $\zeta\in\mathfrak{m}$ 时，同样有 $[\tilde{\eta},\tilde{\zeta}]([e])=0$, 所以

$$\langle(\mathrm{ad}\,\tilde{\xi})^*\tilde{\eta},\tilde{\zeta}\rangle([e])=\langle\tilde{\eta},[\tilde{\xi},\tilde{\zeta}]\rangle([e])=0.$$

由于 ζ 的任意性和同构关系 $\mathfrak{m}\cong T_{[e]}M$, 有 $(\mathrm{ad}\,\tilde{\xi})^*\tilde{\eta}([e])=0$. 同理, $(\mathrm{ad}\,\tilde{\eta})^*\tilde{\xi}([e])=0$. 综合起来，便得 (6.11) 式.

现设 $\xi\in\mathfrak{m},\ \eta\in\mathfrak{k}$, 则对于任意的 $\zeta\in\mathfrak{m}$ 有

$$\langle(\mathrm{ad}\,\tilde{\eta})^*\tilde{\xi},\tilde{\zeta}\rangle([e])=\langle\tilde{\xi},[\tilde{\eta},\tilde{\zeta}]\rangle([e])=-\langle\xi,[\eta,\zeta]\rangle.$$

由于 $\mathfrak{m}$ 上的内积是 $\mathrm{Ad}\,K$-不变的， $\langle\xi,[\eta,\zeta]\rangle+\langle[\eta,\xi],\zeta\rangle=0$. 所以

$$\langle(\mathrm{ad}\,\tilde{\eta})^*\tilde{\xi},\tilde{\zeta}\rangle([e])=\langle[\eta,\xi],\zeta\rangle=\langle\widetilde{[\eta,\xi]},\tilde{\zeta}\rangle([e]),$$

因此

$$(\mathrm{ad}\,\tilde{\eta})^*\tilde{\xi}([e])=\widetilde{[\eta,\xi]}([e]).$$

又因为

$$\langle(\mathrm{ad}\,\tilde{\xi})^*\tilde{\eta},\tilde{\zeta}\rangle([e])=\langle\tilde{\eta},[\tilde{\xi},\tilde{\zeta}]\rangle([e])=0$$

故有 $(\mathrm{ad}\,\tilde{\xi})^*\tilde{\eta}([e])=0$. 将上述各式代入 (6.10) 式即可得到

$$\mathrm{D}_{\tilde{\xi}}\tilde{\eta}([e])=-\widetilde{[\xi,\eta]}([e]).$$

证毕.

由于黎曼对称空间是齐性的，它在各点的几何性质是相同的. 要了解黎曼对称空间 $M=G/K$ 在各点的曲率特性，只要在 $[e]=K$ 处考虑即可. 此外，通过等距线性同构 $\pi_{*e}|_{\mathfrak{m}}:\mathfrak{m}\to T_eM$ 可以把 $T_{[e]}M$ 上的曲率张量移植为 $\mathfrak{m}$ 上的张量. 事实上，对于任意的 $\xi,\eta,\zeta,\lambda\in\mathfrak{m}$, 可以定义

$$\langle\mathcal{R}(\xi,\eta)\zeta,\lambda\rangle=\langle\mathcal{R}(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\tilde{\zeta},\tilde{\lambda}\rangle([e]), \tag{6.13}$$

$$\mathcal{R}(\xi,\eta)\zeta=(\pi_{*e}|_{\mathfrak{m}})^{-1}\mathcal{R}(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\tilde{\zeta}. \tag{6.14}$$

定理 6.3　设 $M = G/K$ 是如定理 6.2 所述的黎曼对称空间，则对于任意的 $\xi, \eta, \zeta, \lambda \in \mathfrak{m}$ 有

$$\langle \mathcal{R}(\xi,\eta)\zeta, \lambda\rangle = \langle [\xi,[\zeta,\lambda]],\eta\rangle = \langle [\zeta,[\xi,\eta]],\lambda\rangle, \tag{6.15}$$

$$\mathcal{R}(\xi,\eta)\zeta = [\zeta,[\xi,\eta]]. \tag{6.16}$$

证明　根据曲率张量的定义，对于任意的 $\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{m}$, 有

$$\mathcal{R}(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\tilde{\zeta} = (\mathrm{D}_{\tilde{\xi}}\mathrm{D}_{\tilde{\eta}}\tilde{\zeta} - \mathrm{D}_{\tilde{\eta}}\mathrm{D}_{\tilde{\xi}}\tilde{\zeta} - \mathrm{D}_{[\tilde{\xi},\tilde{\eta}]}\tilde{\zeta})([e]). \tag{6.17}$$

下面逐项进行计算. 首先由定理 6.2 的证明可知，当 $\xi, \eta \in \mathfrak{m}$ 时，$[\tilde{\xi},\tilde{\eta}]([e]) = 0$, 故

$$\mathrm{D}_{[\tilde{\xi},\tilde{\eta}]}\tilde{\zeta}([e]) = 0.$$

利用 (6.10) 式进行直接计算可得

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_{\tilde{\xi}}\mathrm{D}_{\tilde{\eta}}\tilde{\zeta}([e]) =& \frac{1}{2}\mathrm{D}_{\tilde{\xi}}([\tilde{\eta},\tilde{\zeta}] + (\mathrm{ad}\,\tilde{\eta})^*\tilde{\zeta} + (\mathrm{ad}\,\tilde{\zeta})^*\tilde{\eta})([e])\\ =& \frac{1}{4}([\tilde{\xi},[\tilde{\eta},\tilde{\zeta}]] + (\mathrm{ad}\,\tilde{\xi})^*([\tilde{\eta},\tilde{\zeta}]) + (\mathrm{ad}\,[\tilde{\eta},\tilde{\zeta}])^*\tilde{\xi})([e])\\ &+\frac{1}{2}(\mathrm{D}_{\tilde{\xi}}((\mathrm{ad}\,\tilde{\eta})^*\tilde{\zeta}) + \mathrm{D}_{\tilde{\xi}}((\mathrm{ad}\,\tilde{\zeta})^*\tilde{\eta}))([e]).\end{aligned} \tag{6.18}$$

为了求出上式右端各项，任意取定 $\lambda \in \mathfrak{m}$, 则不难得知

$$\langle [\tilde{\xi},[\tilde{\eta},\tilde{\zeta}]],\tilde{\lambda}\rangle([e]) = \langle [\xi,[\eta,\zeta]],\lambda\rangle; \tag{6.19}$$

$$\langle (\mathrm{ad}\,\tilde{\xi})^*([\tilde{\eta},\tilde{\zeta}]),\tilde{\lambda}\rangle([e]) = \langle [\tilde{\eta},\tilde{\zeta}],[\tilde{\xi},\tilde{\lambda}]\rangle([e]) = 0; \tag{6.20}$$

$$\begin{aligned}\langle (\mathrm{ad}\,[\tilde{\eta},\tilde{\zeta}])^*\tilde{\xi},\tilde{\lambda}\rangle([e]) =& \langle \xi,[[\eta,\zeta],\lambda]\rangle = -\langle [[\eta,\zeta],\xi],\lambda\rangle\\ =& \langle [\xi,[\eta,\zeta]],\lambda\rangle;\end{aligned} \tag{6.21}$$

上面最后一式的第二个等号用到了 $\mathfrak{m}$ 上内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的 $\mathrm{Ad}\,K$-不变性，以及 $[\eta,\zeta] \in \mathfrak{k}$ 的事实.

注意到 $\xi, \zeta, \lambda \in \mathfrak{m}$ 以及 $[\eta,\lambda] \in \mathfrak{k}$, 根据定理 6.2 容易得知

$$\begin{aligned}&\langle \mathrm{D}_{\tilde{\xi}}((\mathrm{ad}\,\tilde{\eta})^*\tilde{\zeta}),\tilde{\lambda}\rangle([e])\\ =&(\tilde{\xi}\langle\tilde{\zeta},[\tilde{\eta},\tilde{\lambda}]\rangle - \langle(\mathrm{ad}\,\tilde{\eta})^*\tilde{\zeta},\mathrm{D}_{\tilde{\xi}}\tilde{\lambda}\rangle)([e])\\ =&(\langle \mathrm{D}_{\tilde{\xi}}\tilde{\zeta},[\tilde{\eta},\tilde{\lambda}]\rangle + \langle\tilde{\zeta},\mathrm{D}_{\tilde{\xi}}[\tilde{\eta},\tilde{\lambda}]\rangle)([e])\\ =&-\langle\tilde{\zeta},\mathrm{D}_{\tilde{\xi}}\widetilde{[\eta,\lambda]}\rangle([e]) = \langle\zeta,[\xi,[\eta,\lambda]]\rangle.\end{aligned} \tag{6.22}$$

同理，

$$\langle \mathrm{D}_{\tilde{\xi}}((\mathrm{ad}\,\tilde{\zeta})^*\tilde{\eta}),\tilde{\lambda}\rangle([e]) = \langle\eta,[\xi,[\zeta,\lambda]]\rangle. \tag{6.23}$$

综合 (6.18)~(6.23) 各式得到

$$\langle \mathrm{D}_{\tilde{\xi}}\mathrm{D}_{\tilde{\eta}}\tilde{\zeta},\tilde{\lambda}\rangle([e]) = \frac{1}{2}\left(\langle[\xi,[\eta,\zeta]],\lambda\rangle + \langle[\xi,[\eta,\lambda]],\zeta\rangle + \langle[\xi,[\zeta,\lambda]],\eta\rangle\right). \tag{6.24}$$

交换 ξ, η 的次序得到

$$\langle \mathrm{D}_{\tilde{\eta}}\mathrm{D}_{\tilde{\xi}}\tilde{\zeta},\tilde{\lambda}\rangle([e]) = \frac{1}{2}\left(\langle[\eta,[\xi,\zeta]],\lambda\rangle + \langle[\eta,[\xi,\lambda]],\zeta\rangle + \langle[\eta,[\zeta,\lambda]],\xi\rangle\right). \tag{6.25}$$

再根据 Jacobi 恒等式以及由内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的 $\mathrm{Ad}\,K$-不变性给出的恒等式

$$\langle[\xi,[\eta,\zeta]],\lambda\rangle = -\langle\xi,[\lambda,[\eta,\zeta]]\rangle \tag{6.26}$$

可知，

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{R}(\xi,\eta)\zeta,\lambda\rangle =& \langle\mathcal{R}(\tilde{\xi},\tilde{\eta})(\tilde{\zeta}),\tilde{\lambda}\rangle\\ =&\frac{1}{2}(\langle[\xi,[\eta,\zeta]],\lambda\rangle - \langle[\eta,[\xi,\zeta]],\lambda\rangle + \langle[\xi,[\eta,\lambda]],\zeta\rangle\\ &- \langle[\eta,[\xi,\lambda]],\zeta\rangle + \langle[\xi,[\zeta,\lambda]],\eta\rangle - \langle[\eta,[\zeta,\lambda]],\xi\rangle)\\ =&\frac{1}{2}(\langle[\zeta,[\eta,\xi]],\lambda\rangle + \langle[\lambda,[\eta,\xi]],\zeta\rangle + \langle[\xi,[\zeta,\lambda]],\eta\rangle\\ &- \langle[\eta,[\zeta,\lambda]],\xi\rangle)\\ =&\langle[\xi,[\zeta,\lambda]],\eta\rangle.\end{aligned} \tag{6.27}$$

将上式用于 $\langle\mathcal{R}(\zeta,\lambda)\xi,\eta\rangle$ 得到

$$\langle\mathcal{R}(\zeta,\lambda)\xi,\eta\rangle = \langle[\zeta,[\xi,\eta]],\lambda\rangle.$$

由于

$$\langle \mathcal{R}(\xi,\eta)\zeta,\lambda\rangle = \langle \mathcal{R}(\zeta,\lambda)\xi,\eta\rangle,$$

故有

$$\langle \mathcal{R}(\xi,\eta)\zeta,\lambda\rangle = \langle [\zeta,[\xi,\eta]],\lambda\rangle,$$

此即 (6.15) 式. 再由 $\lambda\in\mathfrak{m}$ 的任意性得知 (6.16) 式成立. 定理得证.

定理 6.4　紧型黎曼对称空间的截面曲率非负; 非紧型黎曼对称空间的截面曲率非正; Euclid 型黎曼对称空间的截面曲率恒为零.

证明　从 (6.16) 式可知, 黎曼对称空间的曲率张量与它的 G-不变黎曼度量的选取无关. 另外根据注记 3.1, 不可约黎曼对称空间上的黎曼度量可以确定到只差一个正的常数因子, 而半单型单连通黎曼对称空间能分解成不可约的单连通黎曼对称空间的乘积. 由此不难看出, 黎曼对称空间 M 的截面曲率的符号与 G-不变黎曼度量的选择无关.

设 $M=G/K$ 是半单型黎曼对称空间. 则对于任意两个彼此正交的单位向量 $X,Y\in\mathfrak{m}$, 沿二维截面 $[X\wedge Y]$ 的截面曲率为

$$\begin{aligned} K(X,Y) &= -R(X,Y,X,Y) = -\langle \mathcal{R}(X,Y)X,Y\rangle \\ &= -\langle [X,[X,Y]],Y\rangle. \end{aligned} \tag{6.28}$$

若 M 是紧型黎曼对称空间, 则 G 是紧半单李群, 因而其李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 形式 B 是负定的, 并且是 $\mathrm{Ad}\,G$-不变的. 于是, 可以把 $-B$ 在 $\mathfrak{m}$ 上的限制取作 $\mathfrak{m}$ 上的 $\mathrm{Ad}\,K$-不变内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, 并由此生成 M 上的 G-不变黎曼度量. 此时

$$K(X,Y) = B([X,[X,Y]],Y) = -B([X,Y],[X,Y]) \geq 0.$$

若 M 是非紧型的, 则由定理 5.7 可知 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 形式 B 在 $\mathfrak{k}$ 上是负定的, 在 $\mathfrak{m}$ 上是正定的. 于是我们把 B 在 $\mathfrak{m}$ 上的限制取为 $\mathfrak{m}$ 上的 $\mathrm{Ad}\,K$-不变内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, 因而

$$K(X,Y) = -B([X,[X,Y]],Y) = B([X,Y],[X,Y]) \leq 0.$$

若 M 是 Euclid 型黎曼对称空间, 则 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的交换理想, 即对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{m}$, $[X,Y]=0$. 因此, $K(X,Y)\equiv 0$. 证毕.

习　题　九

1. 设 V 是有限维向量空间, $\rho: K\to \mathrm{GL}(V)$ 是李群 K 在 V 上的不可约线性表示.

(1) 证明: V 上的 K-不变内积在最多可以相差一个常数因子的意义下被唯一确定.

(2) 试举例说明, 当 K 在 V 上的表示可约时, 结论 (1) 不成立.

2. 设 $\mathfrak{g}$ 是李群 G 的李代数, $\{X_1,\cdots,X_n\}$ 是线性空间 $\mathfrak{g}$ 的一个基底. 则存在 G 在单位元 e 处的容许局部坐标系 (U_a,φ_a), $a=1,2,3$, 使得

$$U_1=\left\{\exp\left(\sum_{i=1}^n x^iX_i\right);\ |x^1|<\varepsilon,\cdots,|x^n|<\varepsilon\right\},$$

$$\varphi_1\left(\exp\left(\sum_{i=1}^n x^iX_i\right)\right)=(x^1,\cdots,x^n);$$

$$U_2=\{\exp(x^1X_1)\cdots\exp(x^nX_n);\ |x^1|<\varepsilon,\cdots,|x^n|<\varepsilon\},$$

$$\varphi_2(\exp(x^1X_1)\cdots\exp(x^nX_n))=(x^1,\cdots,x^n);$$

$$U_3=\left\{\exp\left(\sum_{i=1}^r x^iX_i\right)\exp\left(\sum_{i=r+1}^n x^iX_i\right);\ |x^1|<\varepsilon,\cdots,|x^n|<\varepsilon\right\},$$

$$\varphi_3\left(\exp\left(\sum_{i=1}^r x^iX_i\right)\exp\left(\sum_{i=r+1}^n x^iX_i\right)\right)=(x^1,\cdots,x^n),$$

其中 $1<r<n$. 局部坐标系 (U_1,φ_1), (U_2,φ_2) 和 (U_3,φ_3) 依次称为 G 在单位元处的 **第一**、**第二** 和 **第三类标准坐标系**.

3. 设 G_0 是李群 G 的单位元连通分支, G 在连通光滑流形 M 上有一个可迁的光滑作用. 证明: G_0 在 M 上的诱导作用也是可迁的.

4. 设李群 G 在光滑流形 M 上有一个可迁的左作用，$p \in M$. G 在点 p 处的迷向子群定义为

$$H = \{g \in G;\ g \cdot p = p\}.$$

证明：H 是 G 的闭子群，并且由 $gH \mapsto f(gH) = g \cdot p$ 确定了一个光滑同胚 $f : G/H \to M$.

5. 依照例 4.2 的作法证明：n 维实射影空间 $\mathbb{R}P^n$ 是一个黎曼对称空间，并且等同于 $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{O}(n)$.

6. 设 $\mathrm{O}(n+1,1)$ 是例 4.3 中定义的 Lorentz 群. 证明：$\mathrm{O}(n+1,1)$ 是一般线性群 $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})$ 的李子群，因而也是一个李群.

7. 仿照例 4.2 的作法，在例 4.3 中求出 G/K_σ 上的黎曼度量；同时用矩阵来具体地表示黎曼对称空间 $H^n = G/K_\sigma$ 在任意一点 $X \in H^n$ 处的中心对称.

8. 设 K_σ 由 (4.42) 式定义. 试建立黎曼对称空间 $\mathrm{SO}(p+q)/K_\sigma$ 的几何模型.

9. 设映射 $\varphi : \mathrm{SU}(n+1)/K_\sigma \to \mathbb{C}P^n$ 由 (4.54) 式定义. 证明：φ 是光滑同胚.

10. (1) 依照例 4.5 的作法，建立从齐性空间 $\mathrm{U}(n+1)/(\mathrm{U}(n)\times\mathrm{U}(1))$ 到 n 维复射影空间 $\mathbb{C}P^n$ 上的光滑同胚.

(2) 求复射影空间 $\mathbb{C}P^n$ 在任意一点的中心对称.

11. 设 (M,J,h) 是近 Hermite 流形，$g = \mathrm{Re}(h)$. 如果黎曼流形 (M,g) 是局部对称黎曼空间，并且对于任意的 $p \in M$, M 在点 p 的中心对称 σ 满足 $J \circ \sigma_* = \sigma_* \circ J$, 则称 (M,J,h) 是 **Hermite 局部对称空间**; 特别地，如果 (M,g) 同时是一个黎曼对称空间，则称 (M,J,h) 是 **Hermite 对称空间**. 现假设 (M,J,h) 是 Hermite 局部对称空间. 证明：

(1) M 上的复结构 J 关于黎曼度量 g 的 Levi-Civita 联络 D 是平行的，即有 $\mathrm{D}J \equiv 0$.

(2) 复结构 J 是可积的. 于是，根据第八章的注记 2.1, J 是 M 上的一个复流形结构的典型复结构，因而 (M,h) 是一个 Hermite 流形；此时由第八章的命题 2.2 可知，M 在每一点的中心对称都是全纯映射.

(3) (M,h) 是 Kähler 流形.

(4) n 维复数空间 $\mathbb{C}^n$ 和复射影空间 $\mathbb{C}P^n$ 都是 Hermite 对称空间.

12. 证明：n 维复环面 $\mathbb{C}T^n$(参看第八章的例 6.4) 是 Hermite 对称空间.

13. 设 M 是连通的 Hermite 对称空间，$\mathrm{Hol}(M)$ 是由 M 上的全纯等距变换的全体构成的李群，G 是 $\mathrm{Hol}(M)$ 的单位元连通分支. 证明：G 在 M 上的作用是可迁的，因而 M 可以等同于商空间 G/H, 其中 H 是 G 在某一点 $p \in M$ 的迷向子群.

14. 设 (M,h) 是一个 Kähler 流形，$g = \mathrm{Im}(h)$. 证明：如果黎曼流形 (M,g) 是局部对称黎曼空间，则 (M,h) 是 Hermite 局部对称空间.

15. 设矩阵 $\varepsilon_{p,q}$ 由 (4.40) 式定义. 通过 $\varepsilon_{p,q}$ 引入如下的矩阵乘法群

$$\mathrm{O}(p+q,q) = \{A \in \mathrm{GL}(p+q,\mathbb{R});\ A^{\mathrm{t}}\varepsilon_{p,q}A = \varepsilon_{p,q}\}.$$

设 G 是群 $\mathrm{O}(p+q,q)$ 的单位元连通分支.

(1) 在 $p+q$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^{p+q}$ 中引入双线性对称函数

$$\langle x,y\rangle_q = \sum_{i=1}^{p} x^i y^i - \sum_{\alpha=p+1}^{p+q} x^\alpha y^\alpha,$$

其中 $x = (x^i, x^\alpha)^{\mathrm{t}}, y = (y^i, y^\alpha)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^{p+q}$. 证明：$\mathrm{O}(p+q,q)$ 是在 $\mathbb{R}^{p+q}$ 上保持 $\langle\cdot,\cdot\rangle_q$ 不变的线性变换所构成的群.

(2) 定义映射 $\sigma : G \to G$, 使得对于任意的 $A \in G$,

$$\sigma(A) = \varepsilon_{p,q}A\varepsilon_{p,q}.$$

证明：σ 是 G 上的一个对合自同构，并且 G 在 σ 下的不动点子群 K_σ 可以表示为

$$K_\sigma = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in G;\ A \in \mathrm{O}(p,\mathbb{R}), B \in \mathrm{O}(q,\mathbb{R}), \det(A)\det(B) = 1 \right\}.$$

(3) 证明：K_σ 的单位元连通分支 K_0 是

$$K_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix};\ A \in \mathrm{SO}(p,\mathbb{R}), B \in \mathrm{SO}(q,\mathbb{R}) \right\},$$

因而 K_0 同构于两个特殊正交群 $\mathrm{SO}(p,\mathbb{R})$ 和 $\mathrm{SO}(q,\mathbb{R})$ 的直积，即

$$K_0 = \mathrm{SO}(p,\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}(q,\mathbb{R}).$$

于是 (G, K_0, σ) 是一个黎曼对称空间.

16. (二次复超曲面 $\mathbb{C}Q^{n-1}$) 设 $\mathbb{C}P^n$ 是 n 维复射影空间，

$$\pi : \mathbb{C}_*^{n+1} = \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}P^n$$

是自然投影. 定义

$$\mathbb{C}Q^{n-1} = \{\pi(z^1, \cdots, z^{n+1});\ (z^1, \cdots, z^{n+1}) \in \mathbb{C}_*^{n+1},\ \text{并且}\ (z^1)^2 + \cdots + (z^{n+1})^2 = 0\}.$$

称 $\mathbb{C}Q^{n-1}$ 为 $\mathbb{C}P^n$ 中的**复二次超曲面**.

(1) 证明：$\mathbb{C}Q^{n-1}$ 是 $\mathbb{C}P^n$ 的 $n-1$ 维 Kähler 子流形.

(2) 设 $\mathrm{U}(n+1)$ 是 $n+1$ 阶酉群. 证明：$\mathbb{C}P^n$ 的全纯等距群等同于

$$\mathrm{U}(n+1)/\tilde{\mathrm{U}}(1) \cong \mathrm{SU}(n+1)/\tilde{\mathrm{U}}_0(1),$$

其中

$$\tilde{\mathrm{U}}(1) = \{\lambda I_{n+1};\ \lambda \in \mathbb{C},\ \text{并且}\ |\lambda| = 1\},$$
$$\tilde{\mathrm{U}}_0(1) = \{\lambda I_{n+1};\ \lambda \in \mathbb{C},\ \text{并且}\ \lambda^n = 1\}.$$

同时说明，$n+1$ 阶特殊正交群 $G = \mathrm{SO}(n+1,\mathbb{R})$ 是 $\mathrm{SU}(n+1)$ 的李子群，因而是 $\mathrm{U}(n+1)$ 的紧致李子群.

(3) 试说明，G 在 $\mathbb{C}P^n$ 上的作用保持 $\mathbb{C}Q^{n-1}$ 不变，因而是由 $\mathbb{C}Q^{n-1}$ 上的全纯等距变换构成的群；同时证明：G 在 $\mathbb{C}Q^{n-1}$ 上的作用是可迁的.

(4) 假设

$$Z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_1 + \sqrt{-1}\delta_2) \in \mathbb{C}_*^{n+1}, \quad p_0 = \pi(Z_0).$$

显然，$p_0 \in \mathbb{C}Q^{n-1}$. 证明：$G$ 在点 p 的迷向子群 K 可以表示为

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix};\ A_1 \in \mathrm{SO}(2,\mathbb{R}), A_2 \in \mathrm{SO}(n-1,\mathbb{R}) \right\}.$$

因此，$K = \mathrm{SO}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}(n-1,\mathbb{R})$, 并且有光滑同胚

$$f : G/K \to \mathbb{C}Q^{n-1}.$$

(5) 由例 4.4, G/K 是一个黎曼对称空间. 证明：$\mathbb{C}Q^{n-1}$ 与黎曼对称空间 G/K 等距，因而也是黎曼对称空间.

(6) 说明 $\mathbb{C}Q^{n-1}$ 是 Hermite 对称的.

(7) 证明：$\mathbb{C}Q^2$ 和 $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ 全纯等距.

17. 设 D^n 是第八章例 6.3 引入的复双曲空间，即

$$D^n = \{z \in \mathbb{C}^n;\ \langle z, z\rangle < 1\},$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的标准 Hermite 内积. 在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上引入如下的内积：

$$\langle Z, W\rangle_1 = \sum_{i=1}^{n} z^i\overline{w^i} - z^{n+1}\overline{w^{n+1}},$$

其中

$$Z = (z^1, \cdots, z^{n+1}), \quad W = (w^1, \cdots, w^{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}.$$

设 $\mathrm{U}(n+1,1)$ 是由 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上保持内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ 不变的复线性变换构成的李群，则由第八章的例 6.3, $\mathrm{U}(n+1,1)$ 是由 D^n 上的全纯等距构成的变换群，并且它在 D^n 上的作用是可迁的.

(1) 设 $n+1$ 阶方阵 s 由 (4.15) 式定义，证明：

$$\mathrm{U}(n+1,1)=\{T\in \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C});\ T^t s\overline{T}=s\}.$$

(2) 证明：作为 D^n 上的变换群，$\mathrm{U}(n+1,1)$ 在点

$$0=(0,\cdots,0)\in D^n$$

的迷向子群是

$$K=\left\{\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}\in \mathrm{U}(n+1,1);\ A\in \mathrm{U}(n), |d|=1\right\}\equiv \mathrm{U}(n)\times \mathrm{U}(1),$$

因而，$D^n=\mathrm{U}(n+1,1)/(\mathrm{U}(n)\times \mathrm{U}(1))$.

(3) 定义映射 $\sigma:\mathrm{U}(n+1,1)\to \mathrm{U}(n+1,1)$, 使得对于任意的 $T\in \mathrm{U}(n+1,1)$, $\sigma(T)=sTs$. 证明：σ 是 $\mathrm{U}(n+1,1)$ 上的一个对合自同构，并且其不动点子群 $K_\sigma=K$. 因此，$D^n=\mathrm{U}(n+1,1)/(\mathrm{U}(n)\times\mathrm{U}(1))$ 是黎曼对称空间.

(4) 说明 D^n 是否是 Hermite 对称空间.

18. 设 $G_{p,q}(\mathbb{C})$ 是 $p+q$ 维复向量空间 $\mathbb{C}^{p+q}$ 中的全体 p 维复子空间的集合，$\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})$ 是由秩为 p 的 $p+q$ 行 p 列复数矩阵所构成的集合. 对于任意的 $Z\in \mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})$, 用 $Z_1,\cdots,Z_p$ 表示 Z 的 p 个列向量，它们在 $\mathbb{C}^{p+q}$ 中线性无关. 记 $\mathrm{Span}\,(Z)=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{Z_1,\cdots,Z_p\}$, 则有自然投影 $\pi:\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})\to G_{p,q}(\mathbb{C})$, 使得

$$\pi(Z)=\mathrm{Span}\,(Z),\quad \forall Z\in \mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C}).$$

用 $\alpha=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_p\}$ 表示由正整数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_p$ 构成的多重指标，其中 $1\le\alpha_1<\cdots<\alpha_p\le p+q$. 所有这样的多重指标 α 构成的集合记为 Λ; α 在 $\{1,\cdots,p+q\}$ 中的余集

$$\{\alpha_{p+1},\cdots,\alpha_{p+q}\},\quad 1\le\alpha_{p+1}<\cdots<\alpha_{p+q}\le p+q$$

记为 α^c. 对于任意的 $\alpha=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_p\}\in\Lambda$, 用 Z_α 表示 Z 中由第 $\alpha_1,\cdots,\alpha_p$ 行元素组成的 p 阶方阵，Z_{α^c} 表示 Z 在去掉 Z_α 后由剩余各行元素构成的 $q\times p$ 矩阵. 令

$$\tilde{U}_\alpha=\{Z\in \mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C});\det Z_\alpha\neq 0\},\quad U_\alpha=\pi(\tilde{U}_\alpha),\quad \forall\alpha\in\Lambda.$$

(1) 设 $\alpha\in\Lambda$. 对于任意的 $Z\in\tilde{U}_\alpha$, 令 $\tilde{\varphi}(Z)=Z_{\alpha^c}Z_\alpha^{-1}$. 显然 $\tilde{\varphi}(Z)\in \mathrm{M}(q,p;\mathbb{C})$, 故有映射 $\tilde{\varphi}_\alpha:\tilde{U}_\alpha\to \mathrm{M}(q,p;\mathbb{C})\equiv\mathbb{C}^{pq}$. 证明：$\tilde{U}_\alpha$ 是 $\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})\equiv\mathbb{C}^{p(p+q)}$ 的开集，

$$\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\tilde{U}_\alpha,$$

并且 $\tilde{\varphi}_\alpha$ 是从 $\tilde{U}_\alpha$ 到 $\mathrm{M}(q,p;\mathbb{C})$ 的光滑映射.

(2) 证明：对于任意的 $Z,W\in\tilde{U}_\alpha$, 如果 $\pi(W)=\pi(Z)$, 则 $\tilde{\varphi}_\alpha(W)=\tilde{\varphi}_\alpha(Z)$, 因而 $\tilde{\varphi}_\alpha$ 诱导出映射 $\varphi_\alpha:U_\alpha\to\mathbb{C}^{pq}$.

(3) 证明：在 $G_{p,q}(\mathbb{C})$ 上存在唯一的拓扑结构 $\mathscr{T}$, 使得对于任意的 $\alpha\in\Lambda$, U_α 是 $G_{p,q}(\mathbb{C})$ 的开集，并且 $\pi:\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})\to G_{p,q}(\mathbb{C})$ 是连续的开映射. 进一步说明，$\varphi_\alpha:U_\alpha\to\mathbb{C}^{pq}$ 是同胚.

(4) 证明：对于任意的 $\alpha,\beta\in\Lambda$, 当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ 时，

$$\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}:\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$$

是全纯映射. 因此，$\mathscr{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha);\ \alpha\in\Lambda\}$ 确定了 $G_{p,q}(\mathbb{C})$ 上的一个复流形结构. 这样得到的复流形 $G_{p,q}(\mathbb{C})$ 称为复 Grassmann 流形.

(5) 设 $\mathrm{U}(p+q)$ 是由 $p+q$ 阶酉矩阵所构成的李群，它在 $\mathbb{C}^{p+q}$ 上有自然作用. 对于 $T\in\mathrm{U}(p+q)$ 和任意的 $x\in G_{p,q}(\mathbb{C})$, 令

$$\Psi_T(x)=\{T(v);\ v\in x\},$$

其中右端的 x 视为 $\mathbb{C}^{p+q}$ 中的 p 维子空间. 证明：

$$\Psi_T(x)=\pi(TZ),\quad \forall Z\in\pi^{-1}(x),$$

其中右端的乘法是矩阵间的普通乘法；进一步说明，由 $x \mapsto \Psi_T(x)$ 所给出的映射 $\Psi_T : G_{p,q}(\mathbb{C}) \to G_{p,q}(\mathbb{C})$ 是可逆的和双全纯的.

(6) 证明：由 $(T, x) \mapsto \Psi_T(x) \in G_{p,q}(\mathbb{C})$ 所定义的映射

$$\Psi : \mathrm{U}(p+q) \times G_{p,q}(\mathbb{C}) \to G_{p,q}(\mathbb{C})$$

是群 $\mathrm{U}(p+q)$ 在 $G_{p,q}(\mathbb{C})$ 上的一个可迁光滑作用.

(7) 设列向量 $\delta_i = (0, \cdots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \cdots, 0)^t \in \mathbb{C}^{p+q}$, $1 \le i \le p+q$, 并记 $x_0 = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\delta_1, \cdots, \delta_p\}$. 证明： $\mathrm{U}(p+q)$ 在点 x_0 的迷向子群是

$$K = \{T \in \mathrm{U}(p+q);\ T(x_0) = x_0\} = \mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q).$$

因此， $G_{p,q}(\mathbb{C})$ 作为光滑流形等同于齐性空间 $\mathrm{U}(p+q)/(\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q))$.

(8) 通过矩阵的乘法， p 阶复一般线性群 $\mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$ 可以右作用于 $\mathrm{M}^*(p+q, p; \mathbb{C})$. 证明：该右作用是自由的，即对于任意的 $A \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$, 如果存在点 $Z \in \mathrm{M}^*(p+q, p; \mathbb{C})$, 使得 $ZA = Z$, 则必有 $A = I_p$.

(9) 对于任意的 $x \in G_{p,q}(\mathbb{C})$, 证明：纤维 $\pi^{-1}(x)$ 在 $\mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$ 的右作用下保持不变，并且 $\mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$ 在 $\pi^{-1}(x)$ 上的限制作用是可迁的.

(10) 通过矩阵的乘法， $\mathrm{U}(p+q)$ 自然地左作用于 $\mathrm{M}^*(p+q, p; \mathbb{C})$. 证明： $\mathrm{U}(p+q)$ 在 $\mathrm{M}^*(p+q, p; \mathbb{C})$ 上的这种作用是有效的.

(11) 在 $\mathrm{M}^*(p+q, p; \mathbb{C})$ 上定义 $(1,1)$ 型实值闭微分式

$$\tilde{\Phi} = -4\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial} \ln \det(Z^t \overline{Z}), \quad Z \in \mathrm{M}^*(p+q, p; \mathbb{C}).$$

证明： $\tilde{\Phi}$ 关于 $\mathrm{U}(p+q)$ 在 $\mathrm{M}^*(p+q, p; \mathbb{C})$ 上的左作用和 $\mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$ 在 $\mathrm{M}^*(p+q, p; \mathbb{C})$ 上的右作用都是不变的；进一步说明：在 $G_{p,q}(\mathbb{C})$ 上存在唯一的一个 $(1,1)$ 型实值闭微分式 Φ, 使得 $\pi^*\Phi = \tilde{\Phi}$, 并且 Φ 关于 $\mathrm{U}(p+q)$ 在 $G_{p,q}(\mathbb{C})$ 上的诱导作用是不变的.

(12) 设 J 是 $G_{p,q}(\mathbb{C})$ 上的典型复结构，定义

$$h(X, Y) = \Phi(JX, Y) + \sqrt{-1}\,\Phi(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(G_{p,q}(\mathbb{C})).$$

证明： h 是 $G_{p,q}(\mathbb{C})$ 上的一个 Hermite 结构，因而由结论 (5) 和结论 (11), $\mathrm{U}(p+q)$ 可以视为由 $(G_{p,q}(\mathbb{C}), h)$ 上的全纯等距变换构成的群.

(13) 定义映射 $\sigma : \mathrm{U}(p+q) \to \mathrm{U}(p+q)$, 使得

$$\sigma(A) = \varepsilon_{p,q} A \varepsilon_{p,q}, \quad \forall A \in \mathrm{U}(p+q), \text{ 其中 } \varepsilon_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}.$$

证明： σ 是 $\mathrm{U}(p+q)$ 上的对合自同构，它的不动点子群是

$$K_\sigma = K = \mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q).$$

(14) 综合上面的结论说明： $G_{p,q}(\mathbb{C})$ 是一个 Hermite 对称空间.

19. 证明：典型域 $D_{p,q}$(参看第八章的例 6.5) 是一个 Hermite 对称空间.

20. 设 $G, \tilde{G}$ 都是李群， $\tilde{K}$ 是李群 $\tilde{G}$ 的闭子群， $\varphi : G \to \tilde{G}$ 是李群同态，即 φ 是从 G 到 $\tilde{G}$ 的群同态，同时又是光滑流形 G 到 $\tilde{G}$ 的光滑映射. 令 $K = \varphi^{-1}(\tilde{K})$. 证明：如果 φ 是满射，则 φ 的诱导映射 $\tilde{\varphi} : G/K \to \tilde{G}/\tilde{K}$ 是光滑同胚.

21. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个有限维李代数， B 是 $\mathfrak{g}$ 上的 Killing 形式，由 (5.6) 式所定义. 证明：

(1) B 是 $\mathfrak{g}$ 上的双线性函数.

(2) B 在 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 的作用下是不变的，即对于任意的 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, 有

$$B(\mathrm{ad}(X)Y, Z) + B(Y, \mathrm{ad}(X)Z) = 0.$$

22. 设 B 是李代数 $\mathfrak{g}$ 上的 Killing 形式，如果存在 $\mathfrak{g}$ 的理想 $\mathfrak{g}_1, \cdots, \mathfrak{g}_r$ 使得 $\mathfrak{g}$ 可以分解为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r,$$

证明：对于任意的 $i \ne j$, $B(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j) = 0$, 并且 B 在每一个理想 $\mathfrak{g}_i$ 上的限制恰好是 $\mathfrak{g}_i$ 的 Killing 形式.

23. 证明：紧致李代数的 Killing 形式是半负定的.

24. 证明定理 5.6 的结论.

25. 设 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是有效的正交对称李代数. 证明: 如果 $\mathfrak{g}$ 是单李代数, 或存在 $\mathfrak{g}$ 的紧单理想 $\mathfrak{g}_1$ 使得 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\sigma(\mathfrak{g}_1)$, 则 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是不可约的.

26. 设 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是有效的正交对称李代数, $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{g}$ 关于对合自同构 σ 的特征子空间分解. 证明: 如果 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数, 则 $\mathfrak{k}=[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]$.

27. 仿照定理 5.8 的证明方法证明推论 5.12.

第十章 主纤维丛上的联络

从黎曼几何的发展历史以及微分几何在数学的各个分支和理论物理中的应用来看, 联络的概念处于中心的位置. 我们知道, 在光滑流形上光滑结构的功用是在流形上能够借此引进光滑函数的概念; 在有了光滑函数的概念之后, 接着可以定义切向量和余切向量, 于是光滑函数的微分是有意义的. 但是要在光滑流形上开展分析研究, 仅有光滑函数及其微分的概念是不够的, 还需要对光滑的切向量场、光滑的余切向量场以及一般的光滑张量场求微分. 在这里, 光滑切向量场的微分是最基本的, 而其他光滑张量场的微分可以归结为光滑函数的微分以及光滑切向量场的微分 (参看第二章 §2.4). 第二章的讨论告诉我们, 对光滑切向量场求微分是加在光滑流形上的一种结构, 即所谓的 "联络", 它不是流形的光滑结构本身所固有的. 但是, 如果在光滑流形上指定了一个黎曼结构 (即黎曼度量), 则在此黎曼流形上就有唯一的一个无挠联络与给定的黎曼结构相容, 这个联络就是所谓的 Levi-Civita 联络或黎曼联络. 当初, Levi-Civita 和 Ricci 利用这种联络, 发展出一套张量分析的理论, 即所谓的绝对微分学, 大大地推动了黎曼几何学的发展.

在 20 世纪的 40 年代到 50 年代, 数学界对于联络的概念进行了紧张的研究. 特别是通过 E.Cartan, 陈省身, J.L.Koszul 和 G.Ehresmann 等人的努力, 联络的概念有了清晰的表述, 同时也出现了主丛上的联络的概念. 在前面各章, 我们已经结合黎曼几何的基本理论着重叙述了 E.Cartan 的活动标架方法和陈省身的联络形式理论及示性式理论, 还介绍了向量丛上的联络的概念. 在 20 世纪的后半叶, 微分几何在大范围分析和数学物理中的应用是数学研究的热门课题, 在当代数学中占据十分突出的位置. 人们认识到主纤维丛上的联络是当代数学的核心概念之一. 因此, 在本书的最后一章, 我们将介绍主纤维丛上联络的概念及其基本理论.

§10.1 向量丛上的联络和水平分布

在向量丛上给定联络之后，在丛空间上便诱导出一个水平分布．这种几何结构是主丛上联络概念的起源．在本节，我们要介绍联络在向量丛的丛空间上诱导的水平分布的概念．

设 $\pi : E \to M$ 是光滑流形 M 上秩为 r 的向量丛，$\mathrm{D} : \Gamma(E) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(E)$ 是向量丛 E 上的一个联络，其中 $\Gamma(E)$ 表示向量丛 E 的光滑截面构成的向量空间 (参看第一章的 §1.8 和第二章的 §2.8)．

在第二章的 §2.8 中已经给出了向量丛的平行截面的概念．

定义 1.1 设 $\gamma : [0,b] \to M$ 是向量丛 $\pi : E \to M$ 的底流形 M 中的一条光滑曲线，ξ 是向量丛 E 的一个光滑截面．如果对于任意的 $t \in [0,b]$ 都有 $\mathrm{D}_{\gamma'(t)}\xi = 0$，则称截面 ξ 沿光滑曲线 γ 是 **平行的**．

假定向量丛 E 在 M 的一个坐标邻域 U 上有局部标架场 $\{s_a;\ 1 \le a \le r\}$，则 $\xi|_U$ 可以表示为 $\xi|_U = \xi^a s_a$．记 $\xi^a(t) = \xi^a(\gamma(t))$．并设

$$\mathrm{D}s_a = \omega_a^b s_b, \quad \omega_a^b = \Gamma_{ai}^b \mathrm{d}x^i, \tag{1.1}$$

其中 ω_a^b 是 D 在局部标架场 $\{s_a\}$ 下的联络形式，x^i 是 U 上的坐标函数，并且设 $x^i(t) = x^i(\gamma(t))$，那么

$$\mathrm{D}_{\gamma'(t)}\xi = \mathrm{D}_{\gamma'(t)}(\xi^a s_a) = \left(\frac{\mathrm{d}\xi^a}{\mathrm{d}t} + \xi^b \frac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t}\Gamma_{bi}^a\right) s_a.$$

所以，截面 $\xi = \xi^a s_a$ 沿 γ 平行的充分必要条件是它的分量 $\xi^a(t)$，$1 \le a \le r$，满足常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\xi^a(t)}{\mathrm{d}t} + \Gamma_{bi}^a(\gamma(t))\frac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t}\xi^b(t) = 0. \tag{1.2}$$

这是一个线性齐次常微分方程组．根据常微分方程理论，对于任意给定的初始值 $\xi_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$，方程组 (1.2) 在区间 $[0,b]$ 上有唯一的一组解．由此得到

命题 1.1 设 $\pi : E \to M$ 是光滑流形 M 上的向量丛，D 是向量丛 E 上的一个联络．又设 $\gamma : [0,b] \to M$ 是底流形 M 上的任意一条光滑曲线，记 $p = \gamma(0)$．则对于任意一个向量 $\xi_0 \in \pi^{-1}(p)$，存在向量丛 E 沿曲线 γ 的唯一的一个截面 $\xi(t)$ 使得

$$\xi(0) = \xi_0,$$

并且 $\xi(t)$ 沿 γ 是平行的．

在丛空间 E 中看，$\xi(t)$ 是从 ξ_0 出发的一条光滑曲线，满足 $\pi(\xi(t)) = \gamma(t)$．通常把满足这个条件的曲线 $\xi(t)$ 称为底空间 M 上的光滑曲线 $\gamma(t)$ 在丛空间 E 上的 **提升 (曲线)**．当 $\xi(t)$ 沿 γ 平行时，则称 $\xi(t)$ 为 $\gamma(t)$ 在点 ξ_0 处的 **水平提升 (曲线)**．曲线 ξ 在 $t = 0$ 处的切向量 $\xi'(0)$ 满足 $\pi_{*\xi_0}(\xi'(0)) = \gamma'(0)$，故把 $\xi'(0) \in T_{\xi_0}E$ 称为底空间 M 中的切向量 $\gamma'(0) \in T_pM$ 在点 $\xi_0 \in \pi^{-1}(p)$ 处的 **水平提升 (切向量)**．这样，命题 1.1 可以改述为：

命题 1.1′ 设 $\pi : E \to M$ 是光滑流形 M 上的向量丛，D 是向量丛 E 上的一个联络．又设 $\gamma : [0,b] \to M$ 是底流形 M 上的任意一条光滑曲线，记 $p = \gamma(0)$．则对于任意一点 $\xi_0 \in \pi^{-1}(p)$，光滑曲线 $\gamma(t)$ 在点 ξ_0 处有唯一的水平提升曲线．更一般地，如果 γ 是 M 中的一条分段光滑曲线，则它在丛空间 E 中也有唯一的一条分段光滑的水平提升曲线经过点 ξ_0．

定理 1.2 设 D 是向量丛 $\pi : E \to M$ 上的一个联络，$p \in M$，$\xi_0 \in \pi^{-1}(p)$，则 E 在 ξ_0 处的全体水平切向量构成 $T_{\xi_0}E$ 的一个子空间，它在切映射 $\pi_{*\xi_0}$ 下与 T_pM 是线性同构的．

证明 设 $(U;x^i)$ 是光滑流形 M 在点 p 的局部坐标系，并且秩为 r 的向量丛 E 在 U 上有局部平凡化 $\varphi : U \times \mathbb{R}^r \to \pi^{-1}(U)$．这样，$M$ 在坐标邻域 U 上有局部切标架场 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$．设 $\{\delta_a\}$ 是 $\mathbb{R}^r$ 的标准基底，$\{\delta^a\}$ 是 $\{\delta_a\}$ 的对偶基底．令 $s_a(p) = \varphi(p, \delta_a)$，则向量丛 E 在 U 上有局部标架场 $\{s_a\}$．于是在 $\pi^{-1}(U)$ 上有局部坐标系 $(\pi^{-1}(U); x^i, \lambda^a)$，使

得对于任意的 $\xi \in \pi^{-1}(U)$ 有

$$\begin{cases} x^i(\xi) = x^i(\pi(\xi)), \\ \lambda^a(\xi) = \delta^a(\varphi_q^{-1}(\xi)), \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $q = \pi(\xi)$, $\varphi_q = \varphi(q, \cdot) : \mathbb{R}^r \to \pi^{-1}(q)$ 是从 $\mathbb{R}^r$ 到纤维 $\pi^{-1}(p)$ 的线性同构. 此时, $\varphi^{-1}(\xi) = \lambda^a(\xi)\delta_a$. 因此 $\xi = \lambda^a(\xi)\varphi_q(\delta_a) = \lambda^a(\xi)s_a$. 用 $\{X_i, Y_a\}$ 记从空间 E 在坐标邻域 $\pi^{-1}(U)$ 上的自然标架场, 即

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i},\ Y_a = \frac{\partial}{\partial \lambda^a}. \tag{1.4}$$

需要指出的是, X_i 是在 $\pi^{-1}(U)$ 中的 x^i-坐标曲线的切向量, 它不同于在坐标邻域 U 中 x^i-坐标曲线的切向量 $\left(\text{仍记作 } \dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)$, 但是它们是 π-相关的, 即有 $\pi_*(X_i) = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$.

设 $\gamma : [0, b] \to M$ 是光滑流形 M 中任意一条从点 $p \in M$ 出发的光滑曲线, 其参数方程记为 $x^i(t) = x^i(\gamma(t))$, $1 \le i \le m$. 那么, γ 的提升曲线表示为

$$\xi(t) = \xi^a s_a(\gamma(t)) = \varphi(\gamma(t), \xi^a(t)\delta_a),$$

并且它是 $\gamma(t)$ 的水平提升的条件是 $\xi^a(t)$ 满足方程组 (1.2).

现在假定 $\xi(t) = \xi^a(t)s_a(\gamma(t))$ 是 $\gamma(t)$ 的水平提升曲线, 并且起始点是 $\xi(0) = \xi_0$. 那么在局部坐标系 $(\pi^{-1}(U); x^i, \lambda^a)$ 下, $\xi(t)$ 的参数方程是

$$x^i = x^i(t), \quad \lambda^a = \xi^a(t). \tag{1.5}$$

所以它在 $t = 0$ 处的切向量是

$$\begin{aligned} \xi'(0) &= \frac{\mathrm{d}x^i(0)}{\mathrm{d}t} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\xi_0} + \frac{\mathrm{d}\xi^a(0)}{\mathrm{d}t} \left.\frac{\partial}{\partial \lambda^a}\right|_{\xi_0} \\ &= \frac{\mathrm{d}x^i(0)}{\mathrm{d}t}(X_i(\xi_0) - \Gamma^a_{bi}(p)\xi_0^b Y_a(\xi_0)), \end{aligned} \tag{1.6}$$

其中 $p = \pi(\xi_0)$. 由此可见, 切向量 $\gamma'(0) = \dfrac{\mathrm{d}x^i(0)}{\mathrm{d}t} \left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ 在点 $\xi_0 \in \pi^{-1}(p)$ 处的水平提升 $\xi'(0)$ 由 (1.6) 式给出. 从表达式 (1.6) 不难看出, 从 T_pM 到 $T_{\xi_0}E$ 的水平提升是线性同构, 它把切向量 $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ 映为

$$Z_i(\xi_0) = X_i(\xi_0) - \Gamma^a_{bi}(p)\xi_0^b Y_a(\xi_0). \tag{1.7}$$

所以, 在点 ξ_0 处的全体水平切向量构成 $T_{\xi_0}E$ 的一个 m 维子空间 $H(\xi_0)$, 它的基底是 $\{Z_i(\xi_0)\}$, 并且 $\pi_{*\xi_0} : H(\xi_0) \to T_pM$ 是线性同构. 证毕.

由于 $\pi^{-1}(p)$ 是从空间 E 的子流形, $T_{\xi_0}(\pi^{-1}(p))$ 也是 $T_{\xi_0}E$ 的子空间, 称为 $T_{\xi_0}E$ 的**铅垂子空间**, 并记作 $V(\xi_0)$. 事实上, 由于 $\pi(\pi^{-1}(p)) = \{p\}$, 不难知道 $V(\xi_0) = \ker(\pi_{*\xi_0})$. 根据定理 1.2 的证明, $\pi_{*\xi_0}(Y_a) = 0$, 所以 $\{Y_a(\xi_0)\}$ 是 $V(\xi_0)$ 的一个基底.

定理 1.3 设 $\pi : E \to M$ 是 m 维光滑流形 M 上秩为 r 的向量丛, 则铅垂子空间 $V(\xi), \xi \in E$, 是 E 上的完全可积的 r 维分布. 如果 D 是向量丛 E 上的一个联络, 则水平子空间 $H(\xi), \xi \in E$ 给出了 E 上的一个 m 维分布, 使得

(1) $T_\xi E = H(\xi) \oplus V(\xi)$;

(2) $\pi_{*\xi} : H(\xi) \to T_{\pi(\xi)}M$ 是线性同构.

证明 由定理 1.2 的证明易知性质 (2) 成立. 因此, 只需要证明性质 (1) 成立就行了.

根据铅垂子空间 $V(\xi)$ 的定义, 铅垂分布在每一点 $\xi \in E$ 都有 r 维积分流形 $\pi^{-1}(\pi(\xi))$, 所以该分布是完全可积的. 由于 $H(\xi)$ 和 $V(\xi)$ 是分别由 $\{Z_i(\xi)\}$ 和 $\{Y_a(\xi)\}$ 张成的, 并且 $\{Z_i(\xi), Y_a(\xi)\}$ 是线性无关的, 所以 $H(\xi) \cap V(\xi) = \{0\}$, 从而结论 (1) 成立. 证毕.

在向量丛 $\pi : E \to M$ 上由铅垂子空间确定的分布 $V(\xi), \xi \in E$, 称为 E 上的**铅垂分布**; 此外, 满足定理 1.3 中条件 (1) 和 (2) 的分布 $H(\xi), \xi \in E$, 称为向量丛 E 上的一个**水平分布**.

定理 1.4 设 D 是向量丛 $\pi: E \to M$ 上的联络. 对于 E 的任意一个截面 $\xi \in \Gamma(E)$ 以及 M 上的任意一条光滑曲线 $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, 令 $\xi(t) = \xi(\gamma(t))$. 如果把纤维 $\pi^{-1}(\gamma(0))$(向量空间) 和它在 $\xi(0)$ 的切空间 $T_{\xi(\gamma(0))}(\pi^{-1}(\gamma(0))) = V(\xi(\gamma(0)))$ 自然地等同起来, 则有

$$\mathrm{D}_{\gamma'(0)}\xi = (\xi'(0))^{\mathrm{v}} = \left(\left.\frac{\mathrm{d}\xi(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)^{\mathrm{v}}, \tag{1.8}$$

其中 $(\ )^{\mathrm{v}}$ 表示切空间 $T_{\xi(\gamma(0))}E$ 在直和分解

$$T_{\xi(\gamma(0))}E = H(\xi(\gamma(0))) \oplus V(\xi(\gamma(0)))$$

下向铅垂子空间 $V(\xi(\gamma(0)))$ 所作的自然投影.

证明 在 E 的局部坐标系 $(\pi^{-1}(U); x^i, \lambda^a)$ 下, 将截面 ξ 限制在 γ 上所得到的曲线 $\xi(t) = \xi(\gamma(t))$ 的切向量是

$$\frac{\mathrm{d}\xi(\gamma(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t}\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\xi(t)} + \frac{\mathrm{d}\xi^a(t)}{\mathrm{d}t}\left.\frac{\partial}{\partial \lambda^a}\right|_{\xi(t)},$$

其中

$$\begin{aligned} x^i(t) &= x^i(\xi(t)) = x^i(\pi \circ \xi(t)) = x^i(\gamma(t)), \\ \xi^a(t) &= \lambda^a(\xi(t)) = \lambda^a(\xi(\gamma(t))) \end{aligned}$$

(参看 (1.3) 式). 因此, $\xi'(t)$ 按照直和分解

$$T_{\xi(t)}E = H(\xi(t)) \oplus V(\xi(t))$$

可以分解为

$$\begin{aligned} \xi'(t) &= \frac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t}\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\xi(t)} + \frac{\mathrm{d}\xi^a(t)}{\mathrm{d}t}\left.\frac{\partial}{\partial \lambda^a}\right|_{\xi(t)} \\ &= \frac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\xi(t)} - \Gamma^a_{bi}(\gamma(t))\xi^b(t)\left.\frac{\partial}{\partial \lambda^a}\right|_{\xi(t)}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\mathrm{d}\xi^a(t)}{\mathrm{d}t} + \Gamma^a_{bi}(\gamma(t))\frac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t}\xi^b(t)\right)\left.\frac{\partial}{\partial \lambda^a}\right|_{\xi(t)}, \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} (\xi'(t))^{\mathrm{v}} &= \left(\frac{\mathrm{d}\xi^a(t)}{\mathrm{d}t} + \Gamma^a_{bi}(\gamma(t))\frac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t}\xi^b(t)\right)\left.\frac{\partial}{\partial \lambda^a}\right|_{\xi(t)} \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}\xi^a(t)}{\mathrm{d}t} + \Gamma^a_{bi}(\gamma(t))\frac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t}\xi^b(t)\right)s_a(\gamma(t)) \\ &= \mathrm{D}_{\gamma'(t)}\xi, \end{aligned}$$

其中把 $\left.\dfrac{\partial}{\partial \lambda^a}\right|_{\xi(t)}$ 换成 $s_a(\gamma(t))$ 是利用了向量空间 $\pi^{-1}(p)$ 与其切空间 $T_\xi(\pi^{-1}(p))$ $(\xi \in \pi^{-1}(p))$ 的自然等同. 事实上, 对于任意的 t, $\{s_a(\gamma(t))\}$ 是向量空间 $\pi^{-1}(p)$ $(p = \gamma(t))$ 的基底, 而 $\{\lambda^a\}$ 是在向量空间 $\pi^{-1}(p)$ 中由基底 $\{s_a(p)(\gamma(t))\}$ 给出的坐标系, 因而切向量 $\left.\dfrac{\partial}{\partial \lambda^a}\right|_{\xi(t)}$ 恰好是 $s_a(\gamma(t))$. 证毕.

根据定理 1.3 和定理 1.4, 对于黎曼流形 M 的切丛 TM 上的诱导黎曼度量 (参看第二章的习题第 48 题) 将会有一个新的看法. 设 M 是黎曼流形, $\pi: E \to M$ 是在 M 上的黎曼向量丛 (参看第一章 §1.9 中的定义 9.3), D 是 E 上的一个联络. 在 E 上可以定义黎曼度量如下: 对于任意的 $p \in M$ 和任意的 $\xi \in \pi^{-1}(p)$, 令

$$\langle X, Y\rangle = \langle \pi_{*\xi}(X), \pi_{*\xi}(Y)\rangle + \langle X^{\mathrm{v}}, Y^{\mathrm{v}}\rangle, \quad \forall X, Y \in T_\xi E, \tag{1.9}$$

上式右边的第一个 $\langle\ ,\ \rangle$ 是底流形 M 上的黎曼度量, 右边的第二个 $\langle\ ,\ \rangle$ 是纤维 $\pi^{-1}(p)$ 上的欧氏内积, X^{v} 和 Y^{v} 分别是 X 和 Y 的铅垂分量. 在 (1.9) 式所定义的丛空间上的黎曼度量下, 水平子空间 $H(\xi)$ 和铅垂子空间 $V(\xi)$ 是彼此正交的, 切映射 $\pi_{*\xi}$ 是水平子空间 $H(\xi)$ 和切空间 T_pM 之间的线性等距同构, 铅垂子空间 $V(\xi)$ 和纤维 $\pi^{-1}(p)$ 有相同的欧氏内积. 容易证明, 在丛空间的上述诱导度量下, 丛投影 $\pi: E \to M$ 是黎曼淹没 (参看第二章的习题第 8 题). 同时, 不难看

出，第二章的习题第 48 题在切丛上定义的黎曼度量是黎曼向量丛的丛空间上诱导黎曼度量的特殊情形.

§10.2 标架丛和联络

设 $\pi: E \to M$ 是 m 维光滑流形 M 上秩为 r 的向量丛. 假定 $\{(U_\alpha, \psi_\alpha);\ \alpha \in I\}$ 是 E 的一个 **局部平凡化结构**. 换句话说，$\{U_\alpha, \psi_\alpha;\ \alpha \in I\}$ 满足如下三个条件：

(1) $\{U_\alpha; \alpha \in I\}$ 是 M 的开覆盖；

(2) 对于每一个 $\alpha \in I$, $\psi_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{R}^r \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ 是光滑同胚，称为向量丛 E 的 **局部平凡化**, 同时对于任意固定的点 $p \in U_\alpha$, 纤维 $\pi^{-1}(p)$ 是向量空间，并且由 $\psi_{\alpha,p} = \psi_\alpha(p, \cdot)$ 确定的映射是从 $\mathbb{R}^r$ 到 $\pi^{-1}(p)$ 上的线性同构；

(3) 对于任意的 $\alpha, \beta \in I$, 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时，由 $p \mapsto g_{\alpha\beta}(p) = \psi_{\alpha,p}^{-1} \circ \psi_{\beta,p} \in \mathrm{GL}(r) (\forall p \in U_\alpha \cap U_\beta)$ 定义的映射 $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r)$ 是光滑映射.

于是，对于任意的 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, 以及任意的 $y \in \mathbb{R}^r$, 等式

$$\psi_\beta(p, y) = \psi_\alpha(p, g_{\alpha\beta}(p) \cdot y) \tag{2.1}$$

成立，其中 $g_{\alpha\beta}(p) \cdot y$ 是 $\mathrm{GL}(r)$ 中的元素 $g_{\alpha\beta}(p)$ (作为 $\mathbb{R}^r$ 上的线性变换) 在 y 上作用. 对于任意的 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, $\{p\} \times \mathbb{R}^r$ 既是乘积空间 $U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ 的纤维，又是乘积空间 $U_\beta \times \mathbb{R}^r$ 中的纤维，它们借助于线性变换 $g_{\alpha\beta}(p)$ 等同起来. 我们把 $\{g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r)\}$ 称为向量丛 E 关于局部平凡化结构 $\{(U_\alpha, \psi_\alpha); \alpha \in I\}$ 的 **转移函数族**. 由于 $\{U_\alpha; \alpha \in I\}$ 是 M 的开覆盖，于是丛空间 E 可以看作将所有的 $U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ 通过转移函数族粘接的结果.

根据转移函数 $g_{\alpha\beta}$ 的定义，下面的结论是显然的：

命题 2.1 设 $\pi: E \to M$ 是光滑流形 M 上的秩为 r 的向量丛，

$\{g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r)\}$ 是关于局部平凡化结构 $\{(U_\alpha, \psi_\alpha); \alpha \in I\}$ 的转移函数族. 则下面的相容性条件成立：

(1) 对于任意的 $\alpha \in I$ 以及任意的 $p \in U_\alpha$, $g_{\alpha\alpha}(p) = I_r$, 其中 I_r 是 r 阶单位矩阵；

(2) 对于任意的 $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$,

$$g_{\alpha\beta}(p) \cdot g_{\beta\gamma}(p) = g_{\alpha\gamma}(p).$$

作为 (1) 和 (2) 的推论有

(3) 对于任意的 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$,

$$g_{\alpha\beta}(p) = (g_{\beta\alpha}(p))^{-1}.$$

下面的定理表明转移函数族是构造纤维丛的核心.

定理 2.2 设 M 是 m 维光滑流形，$\{U_\alpha;\ \alpha \in I\}$ 是 M 的一个开覆盖. 如果对于任意的 $\alpha, \beta \in I$, 在 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时，都指定了一个光滑映射 $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r)$, 并且映射族 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 满足命题 2.1 中的相容性条件 (1) 和 (2). 则在 M 上存在秩为 r 的向量丛 $\pi: E \to M$ 以 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 为它的转移函数族.

证明 考虑并集

$$\tilde{E} = \bigcup_{\alpha \in I} \{\alpha\} \times U_\alpha \times \mathbb{R}^r, \tag{2.2}$$

它是一个 $m + r$ 维光滑流形. 在 $\tilde{E}$ 中定义关系 "$\sim$" 如下：设

$$(\alpha, p, y),\quad (\beta, \tilde{p}, \tilde{y}) \in \tilde{E},$$

则 $(\alpha, p, y) \sim (\beta, \tilde{p}, \tilde{y})$ 当且仅当 $p = \tilde{p} \in U_\alpha \cap U_\beta$, 并且 $y = g_{\alpha\beta}(p) \cdot \tilde{y}$. 由于 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 满足命题 2.1 中的相容性条件，容易验证，上面定义的关系 $\sim$ 是一个等价关系. 用 $E = \tilde{E}/\sim$ 表示 $\tilde{E}$ 关于等价关系 $\sim$ 的商空间，并把 $(\alpha, p, y) \in \tilde{E}$ 关于 $\sim$ 的等价类记为 $[\alpha, p, y]$. 从 (α, p, y) 得到等价

类 $[\alpha,p,y]$ 的过程，在直观上就是借助于转移函数族 $g_{\alpha\beta}$ 将 (α,p,y) 与 $(\beta,\tilde{p},\tilde{y})$ 粘接 (等同) 的过程. 定义投影 $\pi: E\to M$ 为

$$\pi([\alpha,p,y])=p,\quad \forall[\alpha,p,y]\in E. \tag{2.3}$$

容易证明，在 E 上存在光滑结构使得 E 成为光滑流形，并且 π 是光滑映射. 事实上，设 $\{x^i_\alpha\}$ 是在 $U_\alpha\subset M$ 上的局部坐标系，那么 $\{x^i_\alpha,y^a\}$ 是在 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上的局部坐标系. 当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ 时，在 $\pi^{-1}(U_\alpha)\cap\pi^{-1}(U_\beta)=\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$ 上有局部坐标变换

$$\begin{cases} x^i_\beta = x^i_\beta(x^1_\alpha,\cdots,x^m_\alpha),\\ \tilde{y}^a=\sum\limits_{b=1}^{r}(g_{\beta\alpha}(x^1_\alpha,\cdots,x^m_\alpha))^a_b y^b. \end{cases} \tag{2.4}$$

很明显，上面两组式子的右端都是 $(x^1_\alpha,\cdots,x^m_\alpha,y^1,\cdots,y^r)$ 的光滑函数. 因此，$\{(\pi^{-1}(U_\alpha);x^i_\alpha,y^a);\alpha\in I\}$ 是 E 的一个光滑坐标覆盖.

定义映射 $\psi_\alpha: U_\alpha\times\mathbb{R}^r\to\pi^{-1}(U_\alpha)$ 为

$$\psi_\alpha(p,y)=[\alpha,p,y],\quad \forall(p,y)\in U_\alpha\times\mathbb{R}^r. \tag{2.5}$$

容易看出 $\pi\circ\psi_\alpha(p,y)=p$, 并且 ψ_α 是光滑同胚. 所以，ψ_α 是 E 的一个局部平凡化. 设 $\psi_\beta: U_\beta\times\mathbb{R}^r\to\pi^{-1}(U_\beta)$ 是 E 的另一个平凡化，那么对于任意的 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$ 以及 $y,\tilde{y}\in\mathbb{R}^r$, 如果

$$\psi_\alpha(p,y)=\psi_\beta(p,\tilde{y}),\quad 即\ [\alpha,p,y]=[\beta,p,\tilde{y}],$$

则有 $y=g_{\alpha\beta}(p)\cdot\tilde{y}$. 这意味着

$$\psi^{-1}_{\alpha,p}\circ\psi_{\beta,p}=g_{\alpha\beta}(p). \tag{2.6}$$

由此可见，$\pi: E\to M$ 是光滑流形 M 上秩为 r 的向量丛，它的转移函数族是已知的 $\{g_{\alpha\beta}: U_\alpha\cap U_\beta\to \mathrm{GL}(r)\}$. 证毕.

纤维丛的特征是丛空间在局部上等同于一个乘积空间，即具有所谓的局部平凡性. 但是它的纤维型可以不限于向量空间. 特别是给定一个秩为 r 的向量丛 $\pi: E\to M$, 则从向量丛 E 出发可以构造光滑流形 M 上的标架丛，它在局部上是 M 的开子集与一般线性群 $\mathrm{GL}(r)$ 的乘积空间，并且与向量丛 E 共享同一个转移函数族. 具体作法如下：

设向量丛 $\pi: E\to M$ 的局部平凡化结构是 $\{(U_\alpha,\psi_\alpha);\ \alpha\in I\}$, 其中 $(U_\alpha;x^i_\alpha)$ 是 M 的局部坐标系. 用 $\{\delta_a; 1\leq a\leq r\}$ 表示实向量空间 $\mathbb{R}^r$ 的标准基底，并置

$$s^{(\alpha)}_a(p)=\psi_\alpha(p,\delta_a),\quad p\in U_\alpha, \tag{2.7}$$

则 $s^{(\alpha)}=(s^{(\alpha)}_1,\cdots,s^{(\alpha)}_r)$ 是向量丛 E 在 U_α 上的局部标架场. 对于每一点 $p\in U_\alpha$, 用 $F(p)$ 表示由向量空间 $\pi^{-1}(p)$ 中基底的全体所构成的集合，则在 $\mathrm{GL}(r)$ 和 $F(p)$ 之间有一一对应关系. 事实上，让 $A\in\mathrm{GL}(r)$ 所对应的标架是

$$\begin{aligned} f(p)&=(f_1(p),\cdots,f_r(p))\\ &=(s^{(\alpha)}_1(p),\cdots,s^{(\alpha)}_r(p))\cdot A\equiv s^{(\alpha)}(p)\cdot A, \end{aligned} \tag{2.8}$$

即

$$f_a(p)=A^b_a\psi_\alpha(p,\delta_b)=\psi_{\alpha,p}(A^b_a\delta_b),\quad 1\leq a\leq r, \tag{2.9}$$

这里 $\psi_{\alpha,p}:\mathbb{R}^r\to\pi^{-1}(p)$ 是线性同构. 令 $F(E)=\bigcup\limits_{p\in M}F(p)$, 并且定义映射 $\tilde{\pi}: F(E)\to M$, 使得对于任意的 $p\in M$, 有 $\tilde{\pi}(F(p))=\{p\}$. 借助于向量丛 E 的局部平凡化结构可以引入空间 $F(E)$ 的局部平凡化结构. 事实上，对于任意的 $\alpha\in I$, 定义映射 $\varphi_\alpha: U_\alpha\times\mathrm{GL}(r)\to\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$, 使得

$$\varphi_\alpha(p,A)=s^{(\alpha)}(p)\cdot A,\quad \forall(p,A)\in U_\alpha\times\mathrm{GL}(r). \tag{2.10}$$

容易看出，这样定义的映射 φ_α 是从 $U_\alpha\times\mathrm{GL}(r)$ 到 $\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$ 上的一一对应. 借助于映射 φ_α 可以在 $F(E)$ 上引进拓扑结构和光滑结构，使得每一个 φ_α 是光滑同胚，并且 $\tilde{\pi}: F(E)\to M$ 是光滑映射. 具体作法可以参照第一章 §1.9 中关于切丛的构造或者本节的定理 2.2 的证

明．特别地，通过映射 $\varphi_\alpha^{-1}:\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times \mathrm{GL}(r)$ 以及 M 在坐标邻域 U_α 上的坐标映射可以给出 $F(E)$ 在 $\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$ 上的局部坐标系，记为 $(\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha);x_\alpha^i,A_a^b)$.

从上面的构造可以看出，$F(E)$ 在局部上是乘积空间 $U_\alpha\times \mathrm{GL}(r)$，它在每一点 $p\in M$ 处的纤维是 $\tilde{\pi}^{-1}(p)=F(p)$，后者与 $\mathrm{GL}(r)$ 是等同的．换言之，$F(E)$ 是将一族乘积空间 $U_\alpha\times \mathrm{GL}(r),\alpha\in I$，沿底流形 M 上的同一点 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$ 的纤维 $\{p\}\times \mathrm{GL}(r)\subset U_\alpha\times \mathrm{GL}(r)$ 和 $\{p\}\times \mathrm{GL}(r)\subset U_\beta\times \mathrm{GL}(r)$ 按照一定的方式粘合起来的结果．具体地说，设 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$，$A,B\in \mathrm{GL}(r)$，那么

$$\varphi_\alpha(p,A)=\varphi_\beta(p,B),\text{ 或等价地，}A=\varphi_{\alpha,p}^{-1}\circ\varphi_{\beta,p}(B),\tag{2.11}$$

当且仅当

$$s^{(\alpha)}(p)\cdot A=s^{(\beta)}(p)\cdot B,\tag{2.12}$$

即

$$\psi_\alpha(p,A_a^b\delta_b)=\psi_\beta(p,B_a^b\delta_b),\quad 1\le a\le r.\tag{2.13}$$

上式等价于

$$A_a^b\delta_b=\psi_{\alpha,p}^{-1}\circ\psi_{\beta,p}(B_a^b\delta_b)=B_a^c g_{\alpha\beta}(p)\cdot\delta_c=(g_{\alpha\beta}(p))_c^b B_a^c\delta_b,$$

即有

$$A=g_{\alpha\beta}(p)\cdot B.\tag{2.14}$$

将上式与 (2.11) 式相比较得知 $\varphi_{\alpha,p}^{-1}\circ\varphi_{\beta,p}=g_{\alpha\beta}(p)$．因此，纤维丛 $\tilde{\pi}:F(E)\to M$ 和向量丛 $\pi:E\to M$ 共享同一个转移函数族 $\{g_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to \mathrm{GL}(r)\}$．通常称纤维丛 $\tilde{\pi}:F(E)\to M$ 是与向量丛 $\pi:E\to M$**相配的标架丛**，并且记作 $(F(E),M,\tilde{\pi})$．有时也记作 $\tilde{\pi}:F(E)\to M$，或 $F(E)$．与向量丛的情形类似，把光滑流形 $F(E)$，M 和映射 $\tilde{\pi}$ 分别叫做标架丛的 **丛空间**，**底流形** 和 **丛投影**.

标架丛有一个很重要的几何结构，即群 $\mathrm{GL}(r)$ 在丛空间 $F(E)$ 上的右作用．设 $g\in \mathrm{GL}(r)$，令

$$\varphi_\alpha(p,A)\cdot g=\varphi_\alpha(p,A\cdot g),\quad\forall(p,A)\in U_\alpha\times \mathrm{GL}(r).\tag{2.15}$$

上面的定义与局部平凡化 $\varphi_\alpha:U_\alpha\times \mathrm{GL}(r)\to\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$ 的取法无关．事实上，当 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$ 时，$\varphi_\alpha(p,A)=\varphi_\beta(p,B)$ 的充分必要条件是 (2.12) 式成立，因而 $\varphi_\alpha(p,A\cdot g)=\varphi_\beta(p,B\cdot g)$．容易验证，$\mathrm{GL}(r)$ 是作用在 $F(E)$ 上的李氏变换群．很明显，$g\in \mathrm{GL}(r)$ 在 $F(E)$ 上的作用保持纤维不变；而且从几何上看，g 在 $F(E)$ 上的右作用就是让向量丛 $\pi:E\to M$ 的每一个标架作一个满秩的线性变换．由此可见，g 在 $F(E)$ 上的右作用没有不动点．根据李氏变换群的理论 (参看参考文献 [3, 第六章, 定理 5.1])，$\mathrm{GL}(r)$ 在 $F(E)$ 上的作用诱导出 r^2 个处处线性无关的基本向量场 $X_a^b(1\le a,b\le r)$，它们在局部坐标系 $(\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha);x_\alpha^i,A_a^b)$ 下具有如下的表达式

$$X_a^b=A_a^c\frac{\partial}{\partial A_b^c}.\tag{2.16}$$

因此，基本向量场 X_a^b 在 $\sigma\in\tilde{\pi}(p)\subset F(E)$ 处张成纤维 $\tilde{\pi}^{-1}(p)$ 的切空间 $\tilde{V}(\sigma)=T_\sigma(\tilde{\pi}^{-1}(p))\subset T_\sigma F(E)$．$\tilde{V}(\sigma)$ 称为标架丛 $F(E)$ 在 σ 的 **铅垂子空间**，$\tilde{V}$ 称为在 $F(E)$ 上的 **铅垂分布**．上面的讨论说明，铅垂分布 $\tilde{V}$ 是由基本向量场 X_a^b $(1\le a,b\le r)$ 张成的，它是完全可积的，相应的 r^2 维积分流形就是标架丛 $F(E)$ 的纤维.

设在向量丛 $\pi:E\to M$ 上给定一个联络 D，则根据 §10.1 的做法可以在相配标架丛 $\tilde{\pi}:F(E)\to M$ 的丛空间上诱导出一个水平分布 $\tilde{H}$．设 $p\in M$，$\sigma_0\in\tilde{\pi}^{-1}(p)$，则 $\sigma_0=(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)$ 是向量空间 $\pi^{-1}(p)=E|_p$ 中的一个基底．在底流形 M 中任意给定一条光滑曲线 $\gamma:[0,b]\to M$，使得 $\gamma(0)=p$，则由命题 1.1 得知，存在唯一的一组沿 γ 平行的向量场 $\sigma_a(t)$，$0\le t\le b$，$1\le a\le r$，使得 $\sigma_a(0)=\sigma_a$．记 $\sigma(t)=(\sigma_1(t),\cdots,\sigma_r(t))$，则 $\sigma(t)$ 是沿 γ 平行的标架场，并且满足初始

条件 $\sigma(0)=\sigma_0$. $\sigma(t)$ 称为光滑曲线 $\gamma(t)$ 在丛空间 $F(E)$ 中经过点 σ_0 的 **水平提升 (曲线)**, 切向量 $\sigma'(0)$ 称为 $\gamma'(0)\in T_pM$ 在点 $\sigma_0\in\tilde{\pi}^{-1}(p)$ 处的 **水平提升 (切向量)**. 在点 $\sigma_0\in\tilde{\pi}^{-1}(p)$ 处的水平切向量的集合记为 $\tilde{H}(\sigma_0)$. 下面要说明 $\tilde{H}(\sigma_0)$ 是 $T_{\sigma_0}F(E)$ 的子空间, 称为标架丛 $F(E)$ 在点 σ_0 处的 **水平子空间**.

为此, 采用前面的记号, 设 $\{(U_\alpha,\psi_\alpha);\alpha\in I\}$ 是向量丛 $\pi:E\to M$ 的局部平凡化结构, 使得 $(U_\alpha;x^i_\alpha)$ 是底流形 M 的局部坐标系, 则 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha);\ \alpha\in I\}$ 是与 E 相配的标架丛 $\tilde{\pi}:F(E)\to M$ 的一个局部平凡化结构, 并且通过局部平凡化映射 $\varphi_\alpha^{-1}:\tilde{\pi}(U_\alpha)\to U_\alpha\times\mathrm{GL}(r)$ 给出了丛空间 $F(E)$ 上的局部坐标系 $(\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha);x^i_\alpha,A^b_a)$. 对每一个固定的 $\alpha\in I$, 令

$$\mathrm{D}s^{(\alpha)}_a=\omega^{(\alpha)b}_a s^{(\alpha)}_b,\quad \omega^{(\alpha)b}_a=\Gamma^{(\alpha)b}_{ai}\mathrm{d}x^i_\alpha. \tag{2.17}$$

则 $\omega^{(\alpha)b}_a$ 是联络 D 在局部标架场 $\{s^{(\alpha)}_a;1\le a\le r\}$ 下的联络形式. 借助于联络形式 $\omega^{(\alpha)b}_a$ 可以在开集 $\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$ 上引入如下的 1 次微分式

$$\begin{aligned}\theta^b_a=&(A^{-1})^b_c(\mathrm{d}A^c_a+\tilde{\pi}^*(\omega^{(\alpha)c}_d)A^d_a)\\=&(A^{-1})^b_c(\mathrm{d}A^c_a+A^d_a\Gamma^{(\alpha)c}_{di}\mathrm{d}x^i_\alpha).\end{aligned} \tag{2.18}$$

定理 2.3　由 (2.18) 式定义的 θ^b_a $(1\le a,b\le r)$ 是大范围地定义在丛空间 $F(E)$ 上的 r^2 个 1 次微分式, 即 $\theta=(\theta^b_a)$ 是大范围地定义在 $F(E)$ 上的 $\mathfrak{gl}(r)$-值的 1 次微分式, 其中 $\mathfrak{gl}(r)$ 是一般线性群 $\mathrm{GL}(r)$ 的李代数.

证明　设 $(U_\beta;x^i_\beta)$ 是 M 的另一个局部坐标系, $(\tilde{\pi}^{-1}(U_\beta);x^i_\beta,B^b_a)$ 是在丛空间 $F(E)$ 上对应的局部坐标系. 若 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$, 则有坐标变换 $A=g_{\alpha\beta}(p)\cdot B$(参看 (2.14) 式), 即

$$A^b_a=(g_{\alpha\beta}(p))^b_cB^c_a, \tag{2.19}$$

其中 $g_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to\mathrm{GL}(r)$ 是转移函数. 因此

$$\mathrm{d}A^b_a=\mathrm{d}(g_{\alpha\beta})^b_c\cdot B^c_a+(g_{\alpha\beta})^b_c\cdot\mathrm{d}B^c_a. \tag{2.20}$$

另一方面, 联络形式遵循如下的变换公式

$$(g_{\alpha\beta})^a_c\omega^{(\beta)c}_b=\mathrm{d}(g_{\alpha\beta})^a_b+\omega^{(\alpha)a}_c(g_{\alpha\beta})^c_b \tag{2.21}$$

(参看第二章的 (8.4) 式). 将 (2.21) 式代入 (2.20) 式得到

$$\mathrm{d}A^b_a+A^c_a\tilde{\pi}^*\omega^{(\alpha)b}_c=(g_{\alpha\beta})^b_c(\mathrm{d}B^c_a+B^d_a\tilde{\pi}^*\omega^{(\beta)c}_d),$$

即

$$(A^{-1})^b_d(\mathrm{d}A^d_a+A^c_a\tilde{\pi}^*\omega^{(\alpha)d}_c)=(B^{-1})^b_d(\mathrm{d}B^d_a+B^c_a\tilde{\pi}^*\omega^{(\beta)d}_c).$$

证毕.

一次微分式 $\theta^b_a(1\le a,b\le r)$ 有明显的几何意义. 事实上, (x^i_α,A^b_a) 代表 $\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$ 中的点, 因而是向量丛 E 在 U_α 上的标架. 于是 θ^b_a $(1\le a,b\le r)$ 恰好是 E 在 U_α 上的活动标架的 "协变微分" 关于该标架自身的分量 (即活动标架的相对分量). 实际上, 如果采用 (2.8) 式的记号, 则活动标架 $f=s^{(\alpha)}\cdot A$ 的协变微分是

$$\begin{aligned}\mathrm{D}f=&\mathrm{D}s^{(\alpha)}\cdot A+s^{(\alpha)}\cdot\mathrm{d}A=s^{(\alpha)}\cdot(\omega^{(\alpha)}\cdot A+\mathrm{d}A)\\=&f\cdot A^{-1}(\mathrm{d}A+\omega^{(\alpha)}\cdot A)=f\cdot\theta,\end{aligned} \tag{2.22}$$

其中

$$\theta=A^{-1}(\mathrm{d}A+\omega^{(\alpha)}\cdot A).$$

定理 2.3 的意思是: 向量丛的活动标架的相对分量与参照标架场 $s^{(\alpha)}=(s^{(\alpha)}_1,\cdots,s^{(\alpha)}_r)$ 的选取无关. 另外, 从表达式 (2.18) 和 (2.16) 式不难看出, 如果把 θ^b_a 限制在纤维 $\tilde{\pi}^{-1}(p)$ 上, 则 θ^b_a 和基本向量场 X^b_a 是彼此对偶的, 即

$$\theta^b_a(X^d_c)=\delta^d_a\delta^b_c,\quad 1\le a,b,c,d\le r. \tag{2.23}$$

由方程组 (1.2) 可知, 如果在 U_α 上任意给定一条光滑曲线 γ: $x^i_\alpha=x^i_\alpha(t)$, 则对于每一个固定的指标 a, 方程组

$$\frac{\mathrm{d}A^c_a}{\mathrm{d}t}+A^d_a\Gamma^{(\alpha)c}_{di}\frac{\mathrm{d}x^i_\alpha(t)}{\mathrm{d}t}=0,\quad 1\le c\le r \tag{2.24}$$

的解 $A_a^c(t)$ 给出一个沿曲线 γ 平行的向量场 $\sigma_a(t) = A_a^c(t)s_c^{(\alpha)}(\gamma(t))$. 换言之, $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \cdots, \sigma_r(t))$ 是沿 γ 平行的标架场, 所以 $\sigma(t)$ 是曲线 $\gamma(t)$ 在标架丛空间 $F(E)$ 上的水平提升. 由此可见, $\sigma(t)$ 是 $\gamma(t)$ 在标架丛空间 $F(E)$ 上的水平提升曲线的充分必要条件是 $A_a^c(t)(1 \le a, c \le r)$ 满足方程组 (2.24). 注意到在 $F(E)$ 的局部系 $(\bar\pi^{-1}(U_\alpha); x_\alpha^i, A_a^b)$ 下, 切向量 $\sigma'(t)$ 的坐标表达式是

$$\sigma'(t) = \frac{\mathrm{d}x_\alpha^i(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} + \frac{\mathrm{d}A_a^b(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial A_a^b}. \tag{2.25}$$

再结合 (2.18) 式, $A_a^c(t)$ 满足方程组 (2.24) 等价于 $\sigma'(t)$ 满足方程组

$$\theta_a^b(\sigma'(t)) = 0, \quad 1 \le a, b \le r.$$

因此,

$$\tilde H(\sigma_0) = \{X \in T_{\sigma_0}F(E);\ \theta_a^b(X) = 0, 1 \le a, b \le r\}$$

是 $T_{\sigma_0}F(E)$ 的 m 维子空间. 从 (2.25) 和 (2.24) 两式得知, 水平分布 $\tilde H$ 在局部上是由下列向量场张成的:

$$\tilde Z_i = \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} - A_a^d\Gamma_{di}^{(\alpha)b}\frac{\partial}{\partial A_a^b}, \quad 1 \le i \le m. \tag{2.26}$$

在上面的讨论中由对应 $\sigma \mapsto \tilde H(\sigma)$ 确定的 m 维分布 $\tilde H$ 称为在标架丛空间 $F(E)$ 上由联络 D 诱导的**水平分布**. 于是得到下面的定理:

定理 2.4 设 $\bar\pi : F(E) \to M$ 是与秩为 r 的向量丛 $\pi : E \to M$ 相配的标架丛, 则铅垂分布 $\tilde V$ 是由 $\mathrm{GL}(r)$ 在 $F(E)$ 上的右作用的李氏变换群在 $F(E)$ 上产生的基本向量场张成的, 并且是完全可积的. 如果 D 是向量丛 $\pi : E \to M$ 上的一个联络, 则它在 $F(E)$ 上诱导出一个水平分布 $\tilde H$, 使得在每一点 $\sigma \in F(E)$ 处下面的结论成立:

(1) $T_\sigma F(E) = \tilde H(\sigma) \oplus \tilde V(\sigma)$;

(2) $\bar\pi_{*\sigma} : \tilde H(\sigma) \to T_{\bar\pi(\sigma)}M$ 是线性同构.

根据 (2.15) 式, $g \in \mathrm{GL}(r)$ 在丛空间 $F(E)$ 上的右作用相当于在其坐标 A 的右边乘以 g. 从方程组 (2.24) 不难知道, g 的右作用把 $F(E)$ 上的水平曲线变为水平曲线, 因而把水平切向量变为水平切向量, 把水平子空间变为水平子空间. 于是有下面的定理:

定理 2.5 设 $\bar\pi : F(E) \to M$ 是与向量丛 $\pi : E \to M$ 相配的标架丛, $\tilde H$ 是联络 D 诱导的水平分布, 则对于任意的 $g \in \mathrm{GL}(r)$, 它在 $F(E)$ 上的右作用 R_g 满足

$$(R_g)_{*\sigma}\tilde H(\sigma) = \tilde H(\sigma \cdot g), \quad \forall \sigma \in F(E), \tag{2.27}$$

并且

$$(R_g)^*(\theta(\sigma \cdot g)) = g^{-1} \cdot \theta(\sigma) \cdot g = \mathrm{Ad}(g^{-1}) \cdot \theta(\sigma). \tag{2.28}$$

证明 根据 θ 的定义有

$$\begin{aligned}(R_g)^*(\theta(\sigma \cdot g)) &= (A \cdot g)^{-1}(\mathrm{d}(A \cdot g) + \omega^{(\alpha)} \cdot A \cdot g)\\ &= g^{-1} \cdot (A^{-1}\mathrm{d}A + A^{-1} \cdot \omega^{(\alpha)} \cdot A) \cdot g\\ &= \mathrm{Ad}(g^{-1}) \cdot \theta(\sigma).\end{aligned}$$

(2.27) 式是 (2.28) 式的直接推论, 也是在定理 2.5 的前面的一段论述的结果. 证毕.

§10.3 微分纤维丛

向量丛及其相配的标架丛的概念能够推广为微分纤维丛的一般概念.

定义 3.1 设 B, M, F 是光滑流形, G 是左作用在光滑流形 F 上的李氏变换群, $\pi : B \to M$ 是一个光滑映射. 如果下列三个条件成立, 则称 $\pi : B \to M$ 是光滑流形 M 上的一个**微分纤维丛**:

(1) 存在 M 的一个开覆盖 $\{U_\alpha;\alpha\in I\}$, 使得对于每一个 $\alpha\in I$ 都有一个光滑同胚 $\psi_\alpha:U_\alpha\times F\to\pi^{-1}(U_\alpha)$ 满足条件

$$\pi\circ\psi_\alpha(p,f)=p,\quad\forall(p,f)\in U_\alpha\times F;$$

(2) 对于每一个固定的 $p\in U_\alpha$ 以及任意的 $f\in F$, 记 $\psi_{\alpha,p}(f)=\psi_\alpha(p,f)$, 则映射 $\psi_{\alpha,p}:F\to\pi^{-1}(p)$ 是光滑同胚, 并且当 $p\in U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ 时, 光滑同胚 $\psi_{\alpha,p}^{-1}\circ\psi_{\beta,p}:F\to F$ 等同于 G 的一个元素 $g_{\alpha\beta}(p)$ 在 F 上的作用, 即有 $g_{\alpha\beta}(p)\in G$ 使得

$$\psi_{\alpha,p}^{-1}\circ\psi_{\beta,p}(f)=g_{\alpha\beta}(p)\cdot f,\quad\forall f\in F;$$

(3) 当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ 时, 映射 $g_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to G$ 是光滑的.

为了方便起见, 以后把微分纤维丛 $\pi:B\to M$ 记为 (B,M,F,π,G) 或 B. 其中 B 称为 **丛空间**, M 称为 **底流形**, F 称为 **纤维型**, π 称为 **丛投影**, G 称为 **结构群**.

上述定义中的条件 (1) 所涉及的映射 $\psi_\alpha:U_\alpha\times F\to\pi^{-1}(U_\alpha)$ 称为纤维丛 B 的 **局部平凡化**; $\{(U_\alpha,\psi_\alpha);\alpha\in I\}$ 称为 B 的 **局部平凡化结构**, 映射 $g_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to G$ 称为 B 的 **转移函数**. 局部平凡化是纤维丛的最主要特征, 即丛空间在局部上是乘积空间. 实际上, 纤维丛 B 是一族乘积空间 $\{U_\alpha\times F;\alpha\in I\}$ 在每一点 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$ 上将纤维 $\{p\}\times F\subset U_\alpha\times F$ 和 $\{p\}\times F\subset U_\beta\times F$ 借助于转移函数 $g_{\alpha\beta}(p)\in G$ 等同起来的结果, 即对于任意的 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$, $f,\tilde f\in F$, 点 $\psi_\alpha(p,f)$ 和 $\psi_\beta(p,\tilde f)$ 是丛空间 B 中的同一个点的充分必要条件是

$$f=g_{\alpha\beta}(p)\cdot\tilde f.\tag{3.1}$$

很明显, 转移函数 $g_{\alpha\beta}(p)=\psi_{\alpha,p}^{-1}\circ\psi_{\beta,p}$ 满足命题 2.1 中的相容性条件. 转移函数族 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 是构造微分纤维丛的核心. 特别是, 定理 2.2 的结论可以搬到这里来成为下面的定理 3.1, 其证明过程也是类似的.

定理 3.1 设 M 是一个 m 维光滑流形, G 是左作用在光滑流形 F 上的李氏变换群. 如果存在 M 的一个开覆盖 $\{U_\alpha;\alpha\in I\}$, 使得对于任意的 $\alpha,\beta\in I$, 当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ 时, 都指定了一个光滑映射 $g_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to G$, 满足如下的相容性条件:

(1) $g_{\alpha\alpha}(p)=e$, $\forall\alpha\in I$, $\forall p\in U_\alpha$, 其中 e 是李群 G 的单位元素;

(2) 对于任意的 $\alpha,\beta,\gamma\in I$, 当 $U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma\neq\emptyset$ 时,

$$g_{\alpha\beta}(p)\cdot g_{\beta\gamma}(p)=g_{\alpha\gamma}(p),\quad\forall p\in U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma,$$

则存在以 G 为结构群的微分纤维丛 (B,M,F,π,G), 使得它的转移函数族正好是 $\{g_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to G\}$.

假定 (B,M,F,π,G) 是一个微分纤维丛, 其转移函数族为 $\{g_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to G\}$. 由于 G 是左作用在 G 自身上的李氏变换群, 于是根据定理 3.1, 存在微分纤维丛 $(\tilde B,M,G,\pi,G)$, 它以结构群 G 为纤维型, 并且与 (B,M,F,π,G) 共享同一个转移函数族.

定义 3.2 在光滑流形 M 上以结构群 G 为其纤维型的微分纤维丛 $\pi:B\to M$ 称为在光滑流形 M 上的 G-主丛, 记为 (B,M,π,G) 或 B.

相配丛的概念可以作如下的一般推广:

定义 3.3 设 (B,M,F,π,G) 和 $(\tilde B,M,\tilde F,\tilde\pi,G)$ 是光滑流形 M 上的两个以 G 为结构群的微分纤维丛, 如果它们具有相同的转移函数族 $\{g_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to G\}$, 则称 B 和 $\tilde B$ 是 **相配的微分纤维丛**.

于是, 向量丛 $\pi:E\to M$ 和对应的标架丛 $\tilde\pi:F(E)\to M$ 是相配的. 任意一个微分纤维丛 (B,M,F,π,G) 都有与其相配的 G-主丛. 由此可见, 在相配的微分纤维丛的集合中总是可以取 G-主丛作为它的代表. G-主丛的重要性在于 G-主丛的结构比较简单, 纤维型就是它的结构群本身; 另外, 其他的相配丛都可以通过 G-主丛方便地构造出来.

定理 3.2 设 (B,M,π,G) 是光滑流形 M 上的一个 G-主丛, 则 G 是自由地右作用在丛空间 B 上的李氏变换群, 并且主丛 B 的每一个局部平凡化 $\psi:U\times G\to\pi^{-1}(U)$ 关于 G 的右作用都是等变的, 即对

于任意的 $p\in U$ 和 $g,h\in G$, 下列关系式

$$\psi(p,g)\cdot h=\psi(p,g\cdot h) \tag{3.2}$$

成立.

证明 设主丛 (B,M,π,G) 的局部平凡化结构是 $\{(U_\alpha,\psi_\alpha);\alpha\in I\}$. 对于任意的 $(p,g)\in U_\alpha\times G$, 以及任意的 $h\in G$, 令

$$\psi_\alpha(p,g)\cdot h=\psi_\alpha(p,g\cdot h). \tag{3.3}$$

下面要证明上式的右端与局部平凡化的取法无关. 对于 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$ 和 $\tilde g\in G$, 如果

$$\psi_\alpha(p,g)=\psi_\beta(p,\tilde g),$$

那么

$$g=\psi_{\alpha,p}^{-1}\circ\psi_{\beta,p}(\tilde g)=g_{\alpha\beta}(p)\cdot\tilde g.$$

因此, 对于任意的 $h\in G$ 有

$$g\cdot h=g_{\alpha\beta}(p)\cdot(\tilde g\cdot h).$$

所以

$$\psi_\alpha(p,g\cdot h)=\psi_\beta(p,\tilde g\cdot h).$$

不难看出, 由 (3.3) 式给出的 h 在 B 上的右作用是等变的, 这种右作用使得 G 是右作用在 B 上的李氏变换群.

为了说明 G 在 B 上的右作用是自由的, 只需要证明 G 中的每一个非单位元素 h 在 B 上的作用都没有不动点. 为此, 设 $h\in G$. 如果存在 $\psi_\alpha(p,g)\in B$ 使得 $\psi_\alpha(p,g)$ 在 h 的右作用下不变, 即

$$\psi_\alpha(p,g)\cdot h=\psi_\alpha(p,g),$$

则有

$$\psi_\alpha(p,g\cdot h)=\psi_\alpha(p,g).$$

由于 $\psi_\alpha:U_\alpha\times G\to\pi^{-1}(U_\alpha)$ 是可微同胚, 必有 $g\cdot h=g$, 因而 h 是 G 中的单位元. 证毕.

上述定理的逆命题也成立. 事实上, 我们有下面的定理:

定理 3.3 设 G 是自由地右作用在光滑流形 B 上的李氏变换群. 如果

(1) B 在 G 的右作用下的轨道空间 $M=B/G$ 是一个光滑流形, 并且自然投影 $\pi:B\to M$ 是光滑的;

(2) B 有 G-等变的局部平凡化, 即对于每一点 $p\in M$, 存在点 p 的开邻域 $U\subset M$ 以及光滑同胚 $\psi:U\times G\to\pi^{-1}(U)$, 使得

$$\pi\circ\psi(p,g)=p,\quad\forall(p,g)\in U\times G, \tag{3.4}$$

$$\psi(p,g)\cdot h=\psi(p,g\cdot h),\quad\forall h\in G, \tag{3.5}$$

则 (B,M,π,G) 是一个 G-主丛.

证明 根据条件 (2), 在 M 上有一个开覆盖 $\{U_\alpha;\alpha\in I\}$, 使得对于每一个 $\alpha\in I$, 都有光滑同胚 $\psi_\alpha:U_\alpha\times G\to\pi^{-1}(U_\alpha)$ 满足条件 (3.4) 和 (3.5).

对于任意的 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$, 设有 $g,\tilde g\in G$, 使得

$$\psi_\alpha(p,g)=\psi_\beta(p,\tilde g), \tag{3.6}$$

则利用 G-等变的条件 (3.5) 得到

$$\psi_\alpha(p,e)\cdot g=\psi_\beta(p,e)\cdot\tilde g. \tag{3.7}$$

因为

$$\pi\circ\psi_\alpha(p,e)=\pi\circ\psi_\beta(p,e)=p,$$

所以 $\psi_\alpha(p,e)$ 和 $\psi_\beta(p,e)$ 属于同一条 G-轨道. 于是存在 G 的元素 $g_{\alpha\beta}(p)$, 使得

$$\psi_\alpha(p,e)\cdot g_{\alpha\beta}(p)=\psi_\beta(p,e). \tag{3.8}$$

代入 (3.7) 式得到

$$\psi_\alpha(p,e)\cdot g=\psi_\alpha(p,e)\cdot g_{\alpha\beta}(p)\cdot\tilde{g}.$$

因为 G 在 B 上的作用是自由的，所以上式成立的充分必要条件是

$$g=g_{\alpha\beta}(p)\cdot\tilde{g}.$$

与 (3.6) 式相对照可知，$\psi_{\alpha,p}^{-1}\circ\psi_{\beta,p}:G\to G$ 恰好是元素 $g_{\alpha\beta}(p)$ 在 G 上的左作用. 由 (3.8) 式得到

$$g_{\alpha\beta}(p)=\psi_{\alpha,p}^{-1}\circ\psi_{\beta,p}(e),\quad \forall p\in U_\alpha\cap U_\beta, \tag{3.9}$$

这说明 $g_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to G$ 是光滑映射，(B,M,π,G) 是 G-主丛. 证毕.

定理 3.4 设 (B,M,π,G) 是光滑流形 M 上的 G-主丛，F 是一个光滑流形，并且李群 G 是左作用在 F 上的李氏变换群. 令

$$\tilde{B}=B\times_G F=(B\times F)/\sim, \tag{3.10}$$

其中等价关系 $\sim$ 的定义是：对于 $(b,f),(\tilde{b},\tilde{f})\in B\times F$, $(b,f)\sim(\tilde{b},\tilde{f})$ 当且仅当存在 $g\in G$, 使得

$$b=\tilde{b}\cdot g,\quad f=g^{-1}\cdot\tilde{f}. \tag{3.11}$$

那么，$(\tilde{B},M,F,\tilde{\pi},G)$ 是与 (B,M,π,G) 相配的微分纤维丛，其中映射 $\tilde{\pi}:\tilde{B}\to M$ 是由 $\tilde{\pi}([b,f])=\pi(b)(\forall(b,f)\in B\times F)$ 定义的.

证明 设 $\{(U_\alpha,\psi_\alpha);\alpha\in I\}$ 是 G-主丛 $\pi:B\to M$ 的局部平凡化结构. 对于任意的 $\alpha\in I$, 定义映射 $\varphi_\alpha:U_\alpha\times F\to\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$ 为

$$\varphi_\alpha(p,f)=[\psi_\alpha(p,e),f],\quad \forall(p,f)\in U_\alpha\times F. \tag{3.12}$$

显然, 映射 φ_α 是一一对应. 当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ 时, 对于任意的 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$, $f,\tilde{f}\in F$, 等式

$$\varphi_\alpha(p,f)=\varphi_\beta(p,\tilde{f}) \tag{3.13}$$

成立的充分必要条件是

$$(\psi_\alpha(p,e),f)\sim(\psi_\beta(p,e),\tilde{f}). \tag{3.14}$$

根据 (3.8) 和 (3.11) 式，

$$\begin{aligned}(\psi_\alpha(p,e),f)&\sim(\psi_\alpha(p,e)\cdot g_{\alpha\beta}(p),(g_{\alpha\beta}(p))^{-1}\cdot f)\\&=(\psi_\beta(p,e),(g_{\alpha\beta}(p))^{-1}\cdot f).\end{aligned}$$

因此，(3.13) 式成立当且仅当

$$\tilde{f}=(g_{\alpha\beta}(p))^{-1}\cdot f \text{ 或 } f=g_{\alpha\beta}(p)\cdot\tilde{f}. \tag{3.15}$$

由此可见, f 是光滑地依赖于 $(p,\tilde{f})$ 的. 现在, 如同定理 2.2 的证明, 可以借助于 (3.12) 式把 $U_\alpha\times F(\alpha\in I)$ 的微分结构移植到 $\tilde{B}$ 上去, 使之成为光滑流形, 并且 $\tilde{\pi}$ 成为光滑映射. 同时, 每一个 $\varphi_\alpha:U_\alpha\times F\to\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$ 是光滑同胚.

另外，从 (3.13) 和 (3.15) 式得知

$$\varphi_{\alpha,p}^{-1}\circ\varphi_{\beta,p}=g_{\alpha\beta}(p).$$

因此，$(\tilde{B},M,F,\tilde{\pi},G)$ 是一个以 G 为结构群、以 F 为纤维型的微分纤维丛，它的转移函数族和 G-主丛 $\pi:B\to M$ 是相同的. 证毕.

定义 3.4 设 (B,M,F,π,G) 是光滑流形 M 上的微分纤维丛，U 是 M 的一个开子集. 若有光滑映射 $s:U\to B$ 满足条件 $\pi\circ s=\mathrm{id}:U\to U$, 则称 s 是纤维丛 B 在开子集 U 上的一个 **(光滑) 截面**.

按照习惯，以后用 $\Gamma(B)$ 表示纤维丛 (B,M,F,π,G) 在底流形 M 上的光滑截面的全体所构成的集合.

利用微分纤维丛 $\pi:B\to M$ 的局部平凡化结构不难看出，对于任意的点 $p\in M$, 存在点 p 的邻域 U, 使得纤维丛 B 在 U 上有截面. 但一般来说，纤维丛 B 的定义在整个底流形 M 上的截面未必是存在

的. 这一点与向量丛是不同的. 在后面将会看到, 主丛的大范围截面 (即整体截面) 的存在性意味着纤维丛构造的平凡性 (参看推论 3.6).

例 3.1 设 G 是一个李群, H 是 G 的一个闭子群, 则 $\pi: G\to G/H$ 是一个 H-主丛.

根据李群的理论, 在李群的闭子群上存在唯一的光滑结构使它成为一个李群. 因此, H 是李群, 也是 G 的李子群. 于是, 在商空间 G/H 上存在唯一的光滑流形结构, 使得自然投影 $\pi: G\to G/H$ 是光滑的, 并且 G/H 在 G 中有局部的光滑截面, 即对于单位元素 $e\in G$, 存在 $[e]=\pi(e)$ 在 G/H 中的的开邻域 W 和光滑映射 $\tau: W\to G$ 使得

$$\pi\circ\tau=\mathrm{id}: W\to W$$

(参看参考文献 [3, 第六章, 定理 3.12]). 由此可以定义 G 在 W 上的局部平凡化 $\psi: W\times H\to\pi^{-1}(W)$, 使得

$$\psi(p,h)=\tau(p)\cdot h,\quad \forall(p,h)\in W\times H. \tag{3.16}$$

容易验证, ψ 是光滑同胚.

设 $p=\pi(g)\in G/H$, 令 $\tilde W=g\cdot W$, 并且定义映射 $\tilde\psi:\tilde W\times H\to\pi^{-1}(\tilde W)$ 如下:

$$\tilde\psi(q,h)=g\cdot\tau(g^{-1}\cdot q)\cdot h=g\cdot\psi(g^{-1}\cdot q,h),\quad \forall(q,h)\in\tilde W\times H, \tag{3.17}$$

则 $\tilde\pi$ 也是光滑同胚. 由此可见, $\pi: G\to G/H$ 在每一点 $p\in G/H$ 处都有局部平凡化.

H 是 G 的李子群, 因此它也可以看作右作用在 G 上的李氏变换群. 因此, 从局部平凡化的定义式 (3.16) 和 (3.17) 得知, 对于任意的 $h_1\in H$ 有

$$\psi(p,h)\cdot h_1=\psi(p,h\cdot h_1);\quad \tilde\psi(q,h)\cdot h_1=\tilde\psi(q,h\cdot h_1),$$

即局部平凡化 ψ 和 $\tilde\psi$ 是 H-等变的. 根据定理 3.3, $(G,G/H,\pi,H)$ 是一个 H-主丛.

例 3.2 S^2 上的 U(1)-主丛.

酉群 $\mathrm{U}(1)=\{z\in\mathbb{C};\ |z|=1\}=S^1$. 令

$$V_1=\left\{(\cos\theta\cos\varphi,\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta);\ -\varepsilon<\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\varphi<2\pi\right\},$$
$$V_2=\left\{(\cos\theta\cos\varphi,\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta);\ -\frac{\pi}{2}\le\theta<\varepsilon, 0\le\varphi<2\pi\right\}.$$

则 V_1,V_2 构成 S^2 的开覆盖, 并且

$$V_1\cap V_2=\{(\cos\theta\cos\varphi,\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta);\ -\varepsilon<\theta<\varepsilon, 0\le\varphi<2\pi\},$$

它是赤道的 ε-邻域. 任意固定一个整数 n, 定义映射 $t: V_1\cap V_2\to S^1$, 使得 $t(\theta,\varphi)=\mathrm{e}^{\sqrt{-1}n\varphi}$. 把 $\{t: V_1\cap V_2\to S^1\}$ 作为转移函数族便得到 S^2 上的 $U(1)$-主丛 $(B_n,S^2,\pi,U(1))$; 它是 $V_1\times S^1$ 和 $V_2\times S^1$ 按照下面的关系 $\sim$ 粘接起来的结果:

$$(p(\theta,\varphi),\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\alpha})\sim(p(\theta,\varphi),\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\beta})$$

当且仅当

$$\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\alpha}=\mathrm{e}^{\sqrt{-1}n\varphi}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\beta}=\mathrm{e}^{\sqrt{-1}(\beta+n\varphi)}, \tag{3.18}$$

其中 $p(\theta,\varphi)=(\cos\theta\cos\varphi,\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta)\in V_1\cap V_2$, 而整数 n 恰好是映射 $t|_{S^1}: S^1\to S^1$ 的映射度.

例 3.3 S^3 可以作为 S^2 上的 U(1)-主丛.

设

$$\begin{aligned}S^3=&\{(x^1,x^2,x^3,x^4)\in\mathbb{R}^4;\ \textstyle\sum(x^i)^2=1\}\\=&\{(z^1,z^2)\in\mathbb{C}^2;\ |z^1|^2+|z^2|^2=1\},\end{aligned}$$

其中 $z^1=x^1+\sqrt{-1}x^2$, $z^2=x^3+\sqrt{-1}x^4$. 定义映射 $\pi: S^3\to\mathbb{C}P^1$, 使得

$$\pi(z^1,z^2)=[(z^1,z^2)],$$

其中

$$\pi^{-1}([(z^1,z^2)]) = \{\lambda\cdot(z^1,z^2);\ \lambda\in\mathbb{C}, |\lambda|=1\}.$$

复射影空间 $\mathbb{C}P^1$ 和二维球面 S^2 可以等同起来，理由如下：

取定 $\mathbb{C}P^1$ 的一个复坐标覆盖 $\{(U_1,\xi_1),(U_2,\xi_2)\}$，其中

$$U_1 = \{[(z^1,z^2)]\in\mathbb{C}P^1;\ z^1\neq 0\},\ U_2 = \{[(z^1,z^2)]\in\mathbb{C}P^1;\ z^2\neq 0\},$$

并且

$$\xi_1([(z^1,z^2)]) = \frac{z^2}{z^1},\quad \xi_2([(z^1,z^2)]) = \frac{z^1}{z^2}. \tag{3.19}$$

于是，在 $U_1\cap U_2$ 上的复坐标变换是 $\xi_1 = \dfrac{1}{\xi_2}$，因而 $\mathbb{C}P^1$ 是一维复流形.

另一方面，二维单位球面

$$S^2 = \{(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3)\in\mathbb{R}^3;\ (\tilde{x}^1)^2+(\tilde{x}^2)^2+(\tilde{x}^3)^2=1\}$$

有复坐标覆盖 $\{(\tilde{U}_1,\tilde{\xi}_1),(\tilde{U}_2,\tilde{\xi}_2)\}$，其中

$$\tilde{U}_1 = S^2\backslash\{0,0,-1\},\quad \tilde{U}_2 = S^2\backslash\{1,0,0\};$$

并且

$$\tilde{\xi}_1(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3) = \frac{\tilde{x}^1-\sqrt{-1}\,\tilde{x}^2}{1+\tilde{x}^3},\quad \tilde{\xi}_2(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3) = \frac{\tilde{x}^1+\sqrt{-1}\,\tilde{x}^2}{1-\tilde{x}^3}. \tag{3.20}$$

相应地，在 $\tilde{U}_1\cap\tilde{U}_2$ 上有复坐标变换 $\tilde{\xi}_1 = \dfrac{1}{\tilde{\xi}_2}$. 于是，$S^2$ 和 $\mathbb{C}P^1$ 一样也是一维复流形.

现在，可以把 $\mathbb{C}P^1$ 和 S^2 等同起来，使得 $\tilde{\xi}_1=\xi_1$，$\tilde{\xi}_2=\xi_2$. 事实上，如果令

$$\tilde{\xi}_1(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3) = \xi_1([(z^1,z^2)]), \tag{3.21}$$

则有

$$\tilde{x}^1 = \frac{2(x^1x^3+x^2x^4)}{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(x^4)^2},$$

$$\tilde{x}^2 = \frac{2(x^2x^3-x^1x^4)}{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(x^4)^2},$$

$$\tilde{x}^3 = \frac{(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2-(x^4)^2}{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(x^4)^2}.$$

与此同时，容易验证 $\tilde{\xi}_2(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3)=\xi_2([(z^1,z^2)])$ 给出同一个映射. 于是，通过映射 $\tilde{\xi}_1^{-1}\circ\xi_1$ 和 $\tilde{\xi}_2^{-1}\circ\xi_2$，可以把 U_1 和 $\tilde{U}_1$，以及 U_2 和 $\tilde{U}_2$ 分别等同起来. 不难看出，这种等同在 $U_1\cap U_2$ 上是一致的. 因此，映射 $\tilde{\xi}_1^{-1}\circ\xi_1$ 和 $\tilde{\xi}_2^{-1}\circ\xi_2$ 合起来便给出从 $\mathbb{C}P^1$ 到 S^2 上的等同映射.

下面说明 $\pi: S^3\to\mathbb{C}P^1=S^2$ 是 S^2 上的 U(1)-主丛. 为此，定义它的局部平凡化结构如下：对于任意的 $([(1,w)],\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\alpha})\in U_1\times S^1$，令

$$\varphi_1([(1,w)],\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\alpha}) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\alpha}(1,w)}{\sqrt{1+|w|^2}}\in S^3; \tag{3.22}$$

同样地，对于任意的 $([(z,1)],\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\beta})\in U_2\times S^1$，令

$$\varphi_2([(z,1)],\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\beta}) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\eta}(z,1)}{\sqrt{1+|z|^2}}\in S^3. \tag{3.23}$$

当 $[(1,w)]=[(z,1)]\in U_1\cap U_2$ 时，等式

$$\varphi_1([(1,w)],\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\alpha}) = \varphi_2([(z,1)],\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\beta})$$

成立的充分必要条件是

$$z=\frac{1}{w},\quad \mathrm{e}^{\sqrt{-1}\alpha} = \frac{|w|}{w}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\beta}. \tag{3.24}$$

由此得到相应的转移函数是

$$g_{12}([(1,w)]) = \frac{|w|}{w},\quad g_{21} = (g_{12})^{-1}. \tag{3.25}$$

如果用球面 S^2 上的坐标 $(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3)$ 表示，则有

$$g_{12}(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3) = \frac{\tilde{x}^1+\sqrt{-1}\,\tilde{x}^2}{\sqrt{(\tilde{x}^1)^2+(\tilde{x}^2)^2}},\quad \tilde{x}^3=\sqrt{1-(\tilde{x}^1)^2-(\tilde{x}^2)^2}.$$

例 3.4 在定理 3.4 中用 r 维向量空间 V 取代光滑流形 F, 可以构造出与主丛 (B,M,π,G) 相配的向量丛.

事实上, 设 $\rho: G\to \mathrm{GL}(V)$ 是 G 在向量空间 V 上的线性表示, 则在乘积空间 $B\times V$ 上可以引入等价关系 $\sim$, 使得对于任意的 $(b,v),(\tilde{b},\tilde{v})\in B\times V$, $(b,v)\sim(\tilde{b},\tilde{v})$ 当且仅当存在 $g\in G$ 满足 $(\tilde{b},\tilde{v})=(b\cdot g,\rho(g^{-1})\tilde{v})$. $B\times V$ 关于 $\sim$ 的商空间记为 $B\times_\rho V$, 即 $B\times_\rho V=(B\times V)/\sim$. 令 $E=B\times_\rho V$ 并定义映射 $\tilde{\pi}:E\to M$, 使得

$$\tilde{\pi}([(b,v)])=\pi(b),\quad \forall (b,v)\in B\times V.$$

根据定理 3.4, $\tilde{\pi}:E\to M$ 是和主丛 $\pi:B\to M$ 相配的微分纤维丛. 对于每一个 $b\in B$, 记 $p=\pi(b)$, 则由 b 可以自然地诱导出映射 $\phi_b: V\to\tilde{\pi}^{-1}(p)$, 其定义是

$$\phi_b(v)=[(b,v)],\quad \forall v\in V. \tag{3.26}$$

容易验证 ϕ_b 是光滑同胚, 并且满足如下的关系式

$$\phi_{b\cdot g}=\phi_b\circ\rho(g),\quad \forall b\in B,\quad \forall g\in G. \tag{3.27}$$

如果 $b,\tilde{b}\in\pi^{-1}(p)$, 则存在 $g\in G$ 使得 $\tilde{b}=b\cdot g$. 于是由 (3.27) 式,

$$\phi_b^{-1}\circ\phi_{\tilde{b}}=\phi_b^{-1}\circ\phi_{b\cdot g}=\rho(g)\in\mathrm{GL}(V).$$

据此, 可以在纤维 $\tilde{\pi}^{-1}(p)$ 上引入自然的线性结构, 使得 $\tilde{\pi}^{-1}(p)$ 成为 r 维向量空间, 并且当 $b\in\pi^{-1}(p)$ 时, $\phi_b: V\to\tilde{\pi}^{-1}(p)$ 是线性同构. 此时不难验证, $\tilde{\pi}:E\to M$ 是和主丛 $\pi:B\to M$ 相配的向量丛, 它的秩是 r.

此外, 设 $U\subset M$ 是开集, $\sigma:U\to B$ 是主丛 $\pi:B\to M$ 的一个局部截面. 则 σ 给出了一族线性同构 $\phi_\sigma=\{\phi_{\sigma(p)};p\in U\}$, 它确定了向量丛 $\tilde{\pi}:E\to M$ 在 U 上的一个局部平凡化 $\phi_\sigma: U\times V\to\tilde{\pi}^{-1}(U)$, 使得

$$\phi_\sigma(p,v)=\phi_{\sigma(p)},\quad \forall p\in U,\quad \forall v\in V. \tag{3.28}$$

为了方便, 以后对于任意的 $v\in V$, 用 $\phi_\sigma(v)$ 表示 $\phi_\sigma(\cdot,v)$.

在例 3.4 中适当选取结构群 G 的线性表示 ρ, 可以得到主丛 $\pi: B\to M$ 的一些重要的相配向量丛. 比如: m 阶一般线性群 $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}^m$ 上的典型表示 $\rho:\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})\to\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ 的定义是

$$\rho(A)(x^1,\cdots,x^m)=(a_i^1x^i,\cdots,a_i^mx^i),$$
$$\forall A=(a_i^j)\in\mathrm{GL}(m,\mathbb{R}),\quad (x^1,\cdots,x^m)\in\mathbb{R}^m.$$

设 TM 是光滑流形 M 的切丛, 它的标架丛 $\pi: F(TM)\to M$ 称为 M 的 **切标架丛**(参看本章习题第 3 题), 记为 $\pi: F(M)\to M$ 或 $F(M)$. 则 $F(M)$ 是 M 上的 $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$-主丛, 并且在向量丛同构的意义下有 $TM=F(M)\times_\rho\mathbb{R}^m$, 这里的 ρ 是 $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}^m$ 上的典型表示 (证明留作练习).

例 3.5 设 (B,M,π,G) 是光滑流形 M 上的主丛, $\mathfrak{g}$ 是结构群 G 的李代数, $\mathrm{Ad}: G\to\mathfrak{g}$ 是李群 G 在其李代数 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表示. 在例 3.4 中令 $V=\mathfrak{g}$, $\rho=\mathrm{Ad}$. 则有 M 上的向量丛 $B\times_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{g}$, 它是主丛 (B,M,π,G) 的一个相配向量丛, 称为 (B,M,π,G) 的 **伴随 (向量) 丛**, 记为 $\mathrm{Ad}(B)$, 它的丛投影是 $\tilde{\pi}:\mathrm{Ad}(B)\to M$. 对于任意的 $p\in M$, 以及任意的 $b\in\pi^{-1}(p)$, 有线性同构 $\phi_b:\mathfrak{g}\to\tilde{\pi}^{-1}(p)$, 使得对于任意的 $v\in\mathfrak{g}$, 有 $\phi_b(v)=[(b,v)]$. 利用映射 ϕ_b 可以把 $\mathfrak{g}$ 上的李代数结构诱导在纤维 $\tilde{\pi}^{-1}(p)$ 上, 使之成为一个李代数. 具体做法如下:

设 $[\cdot,\cdot]$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 上的李代数乘法 (李括号积), $b,\tilde{b}\in\pi^{-1}(p)$, 则存在 $g\in G$, 使得 $b=\tilde{b}\cdot g$. 对于任意的 $v,w,\tilde{v},\tilde{w}\in\mathfrak{g}$, 如果 $\phi_b(v)=\phi_{\tilde{b}}(\tilde{v})$, $\phi_b(w)=\phi_{\tilde{b}}(\tilde{w})$, 则由 (3.27) 式有 $\tilde{v}=\phi_{\tilde{b}}^{-1}\circ\phi_{\tilde{b}\cdot g}(v)=\mathrm{Ad}(g)(v)$. 同理, $\tilde{w}=\mathrm{Ad}(g)(w)$. 因此, $[\tilde{v},\tilde{w}]=[\mathrm{Ad}(g)v,\mathrm{Ad}(g)w]=[v,w]$. 据此可以在 $\tilde{\pi}^{-1}(p)$ 上定义李括号积 $[\cdot,\cdot]_p$, 使得

$$[\xi,\eta]_p=[\phi_b^{-1}(\xi),\phi_b^{-1}(\eta)],\quad \forall\xi,\eta\in\tilde{\pi}^{-1}(p), \tag{3.29}$$

其中 $b\in\pi^{-1}(p)$. 显然, 定义式 (3.29) 与 b 的取法无关.

对于微分纤维丛来说，有时可以选取适当的局部平凡化结构，使得对应的转移函数在结构群 G 的某个李子群内取值，从而可以把结构群 G 换为它的李子群. 例如： m 维光滑流形 M 的切丛 TM 的结构群是 $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$. 但是，如果在 M 上给定一个黎曼度量，则对于 M 上的每一点 p, 都有一个开邻域 U_p, 使得在 U_p 内存在单位正交标架场 e_p. 此时，可以利用标架场 e_p 来定义切丛 TM 在点 p 的邻域 U_p 上的局部平凡化 ψ_p. 用这种方式得到的局部平凡化结构 $\{(U_p,\psi_p);\ p\in M\}$ 所对应的转移函数族只在正交群 $\mathrm{O}(m)$ 中取值，即光滑流形 M 的切丛 TM 能够以 $\mathrm{O}(m)$ 为其结构群. 如果光滑流形 M 是可定向的，则切丛 TM 的结构群可以进一步取为特殊正交群 $\mathrm{SO}(m)$. 以上结论的证明细节留给读者自己完成.

一般说来，结构群越小，微分纤维丛就越接近于平凡丛 (即底空间和纤维型的乘积空间). 要说明这一点，需要定义丛同态的概念.

定义 3.5 设 M 和 $\tilde{M}$ 是两个光滑流形，(B,M,π,G) 和 $(\tilde{B},\tilde{M},\tilde{\pi},\tilde{G})$ 分别是光滑流形 M 和 $\tilde{M}$ 上的主丛，相应的结构群分别是 G 和 $\tilde{G}$. 如果存在光滑映射 $\Phi: B\to\tilde{B}$ 和李群同态 $\phi: G\to\tilde{G}$, 使得对于任意的 $b\in B$ 和 $g\in G$, 都有

$$\Phi(b\cdot g)=\Phi(b)\cdot\phi(g), \tag{3.30}$$

则称 $\Phi: B\to\tilde{B}$ 是从 B 到 $\tilde{B}$ 的一个 **丛同态**. 特别地，如果丛同态 $\Phi: B\to\tilde{B}$ 是嵌入，并且 $\phi: G\to\tilde{G}$ 是单同态，则称 (B,M,π,G) 是主丛 $(\tilde{B},\tilde{M},\tilde{\pi},\tilde{G})$ 的 **子丛**.

如果主丛同态 $\Phi: B\to\tilde{B}$ 同时是光滑同胚，并且相应的群同态 $\phi: G\to\tilde{G}$ 是群同构，则称 Φ 是从 B 到 $\tilde{B}$ 的 **丛同构**. 此时，称主丛 $\pi: B\to M$ 同构于主丛 $\tilde{\pi}: \tilde{B}\to\tilde{M}$.

根据定理 3.2 容易知道，丛同态 $\Phi: B\to\tilde{B}$ 把纤维映到纤维. 换句话说，对于任意的 $b_1,b_2\in B$, 如果 $\pi(b_1)=\pi(b_2)$, 则有 $\tilde{\pi}(\Phi(b_1))=\tilde{\pi}(\Phi(b_2))$. 于是，丛同态 $\Phi: B\to\tilde{B}$ 诱导出底流形之间的光滑映射

$\Phi^\flat: M\to\tilde{M}$, 其定义是：对于任意的 $p\in M$, 取 $b\in\pi^{-1}(p)$, 令

$$\Phi^\flat(p)=\tilde{\pi}(\Phi(b)). \tag{3.31}$$

易知，映射 $\Phi^\flat$ 和点 $b\in\pi^{-1}(p)$ 的取法无关. 此外，它的光滑性是容易验证的. 事实上，对于任意的 $p\in M$, 存在点 p 的开邻域 U 以及主丛 $\pi: B\to M$ 在 U 上的局部截面 $s: U\to M$. 显然，$\Phi^\flat|_U=\tilde{\pi}\circ\Phi\circ s: U\to\tilde{M}$, 因而映射 $\Phi^\flat$ 在点 p 附近是光滑的.

定义 3.6 设 (B,M,π,G) 是光滑流形 M 上的 G-主丛，$K\subset G$ 是结构 G 的一个李子群. 如果在 M 上存在 K-主丛 $(\tilde{B},M,\tilde{\pi},K)$ 以及丛同态 $\Phi: \tilde{B}\to B$, 使得诱导映射 $\Phi^\flat: M\to M$ 是底流形 M 上的恒同映射，则称 B 的结构群 G 可以 **约化** 为它的李子群 K. 此时，主丛 $\tilde{\pi}: \tilde{B}\to M$ 称为主丛 $\pi: B\to M$ 的 **约化丛**.

定理 3.5 主丛 $\pi: B\to M$ 的结构群 G 可以约化为它的李子群 K, 当且仅当 B 有一个局部平凡化结构 $\{(U_\alpha,\psi_\alpha);\ \alpha\in I\}$, 使得相应的转移函数族 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 只在 K 中取值.

证明 假定主丛 $\pi: B\to M$ 的结构群 G 可以约化为它的李子群 K, 则有 K-主丛 $\tilde{\pi}: \tilde{B}\to M$ 以及丛同态 $\Phi: \tilde{B}\to B$, 使得诱导映射 $\Phi^\flat=\mathrm{id}: M\to M$. 设 K-主丛 $\tilde{\pi}: \tilde{B}\to M$ 的局部平凡化结构是 $\{(U_\alpha,\tilde{\psi}_\alpha);\ \alpha\in I\}$, 则相应的转移函数族是 $\{g_{\alpha\beta}: U_\alpha\cap U_\beta\to K\}$.

设 e 是李群 $K\subset G$ 的单位元素. 对于任意固定的 $\alpha\in I$, 定义映射 $s_\alpha: U_\alpha\to B$, 使得对于任意的 $p\in U_\alpha$, 有 $s_\alpha(p)=\Phi(\tilde{\psi}_\alpha(p,e))$, 则有

$$\begin{aligned}\pi\circ s_\alpha(p)=&\pi\circ\Phi(\tilde{\psi}_\alpha(p,e))=\Phi^\flat(\tilde{\pi}(\tilde{\psi}_\alpha(p,e)))\\=&\tilde{\pi}(\tilde{\psi}_\alpha(p,e))=p,\quad\forall p\in U_\alpha.\end{aligned}$$

所以，$s_\alpha: U_\alpha\to B$ 是 B 在 U_α 上的一个局部截面. 利用 s_α 可以定义映射 $\psi_\alpha: U_\alpha\times G\to\pi^{-1}(U_\alpha)$ 如下：

$$\psi_\alpha(p,g)=\Phi(\tilde{\psi}_\alpha(p,e))\cdot g$$

$$=s_\alpha(p)\cdot g,\quad \forall(p,g)\in U_\alpha\times G. \tag{3.32}$$

于是，(U_α,ψ_α) 是 G-主丛 $\pi:B\to M$ 的局部平凡化. 当 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$，$g,\bar{g}\in G$ 时，等式

$$\psi_\alpha(p,g)=\psi_\beta(p,\bar{g})$$

成立当且仅当 $s_\alpha(p)\cdot g=s_\beta(p)\cdot\bar{g}$，即有

$$\Phi(\tilde{\psi}_\alpha(p,e))\cdot g=\Phi(\tilde{\psi}_\beta(p,e))\cdot\bar{g}. \tag{3.33}$$

根据局部平凡化与转移函数之间的关系，又有

$$\tilde{\psi}_\alpha(p,e)\cdot g_{\alpha\beta}(p)=\tilde{\psi}_\beta(p,e). \tag{3.34}$$

所以，由丛同态的定义得知

$$\Phi(\tilde{\psi}_\beta(p,e))=\Phi(\tilde{\psi}_\alpha(p,e)\cdot g_{\alpha\beta}(p))=\Phi(\tilde{\psi}_\alpha(p,e))\cdot g_{\alpha\beta}(p). \tag{3.35}$$

将上式代入 (3.33) 式得到

$$\Phi(\tilde{\psi}_\alpha(p,e))\cdot g=\Phi((\psi_\alpha(p,e))\cdot g_{\alpha\beta}(p)\cdot\bar{g}.$$

由于 G 在 B 上的右作用是自由的，故有

$$g=g_{\alpha\beta}(p)\bar{g}.$$

这意味着，主丛 $\pi:B\to M$ 关于局部平凡化结构 $\{(U_\alpha,\psi_\alpha);\ \alpha\in I\}$ 的转移函数是

$$\psi_{\alpha,p}^{-1}\circ\psi_{\beta,p}=g_{\alpha\beta}(p)\in K,\quad p\in U_\alpha\cap U_\beta. \tag{3.36}$$

反过来，假定 G-主丛 $\pi:B\to M$ 有一个局部平凡化结构 $\{(U_\alpha,\psi_\alpha);\alpha\in I\}$，使得相应的转移函数 $g_{\alpha\beta}$ 只在李子群 K 中取值. 那么，根据定理 3.1，必有 K-主丛 $\tilde{\pi}:\tilde{B}\to M$ 以 $\{g_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to K\}$ 为其转移函数族. 这里

$$\tilde{B}=\left(\bigcup_{\alpha\in I}\{\alpha\}\times U_\alpha\times K\right)\Big/\sim,$$

其中的等价关系 $\sim$ 的定义是：对于任意的

$$(\beta,p,h_1),(\gamma,q,h_2)\in\bigcup_{\alpha\in I}\{\alpha\}\times U_\alpha\times K,$$

$(\beta,p,h_1)\sim(\gamma,q,h_2)$ 当且仅当 $p=q\in U_\beta\cap U_\gamma$，$h_1=g_{\beta\gamma}(p)\cdot h_2$. 用 $[(\alpha,p,h)]$ 表示点 (α,p,h) 的 $\sim$ 等价类，则有 $\tilde{\pi}([(\alpha,p,h)])=p$. 因此，主丛 $\tilde{\pi}:\tilde{B}\to M$ 的局部平凡化为 $\tilde{\psi}_\alpha:U_\alpha\times K\to\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$，其定义是

$$\tilde{\psi}_\alpha(p,h)=[(\alpha,p,h)],\quad \forall(p,h)\in U_\alpha\times K. \tag{3.37}$$

于是，与 $\tilde{B}$ 的局部平凡化结构 $\{(U_\alpha,\tilde{\psi}_\alpha);\ \alpha\in I\}$ 相对应的转移函数是

$$\tilde{\psi}_{\beta,p}^{-1}\circ\tilde{\psi}_{\gamma,p}=g_{\beta\gamma}(p)\in K.$$

定义映射 $\Phi:\tilde{B}\to B$，使得对于任意的 $(p,h)\in U_\alpha\times K$ 有 $\Phi(\tilde{\psi}_\alpha(p,h))=\psi_\alpha(p,h)$. 此式与 α 的取法无关. 事实上，如果存在 U_β，使得 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$，并且有 $h_1,h_2\in K$ 满足

$$\tilde{\psi}_\alpha(p,h_1)=\tilde{\psi}_\beta(p,h_2),$$

则 $h_1=g_{\alpha\beta}(p)\cdot h_2$. 因此，由 (3.36) 式得到

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(p,h_1)=&\psi_\alpha(p,g_{\alpha\beta}(p)\cdot h_2)=\psi_{\alpha,p}(g_{\alpha\beta}(p)\cdot h_2)\\=&\psi_{\beta,p}(h_2)=\psi_\beta(p,h_2),\end{aligned}$$

即 $\Phi(\tilde{\psi}_\alpha(p,h_1))=\Phi(\tilde{\psi}_\beta(p,h_2))$. 此外，对于任意的 $h\in K$，我们有

$$\begin{aligned}\Phi(\tilde{\psi}_\alpha(p,h_1)\cdot h)=&\Phi(\tilde{\psi}_\alpha(p,h_1\cdot h))=\psi_\alpha(p,h_1\cdot h)\\=&\psi_\alpha(p,h_1)\cdot h=\Phi(\tilde{\psi}_\alpha(p,h_1))\cdot h,\end{aligned}$$

并且

$$\pi\circ\Phi(\tilde{\psi}_\alpha(p,h))=\pi\circ\psi_\alpha(p,h_1)=p=\tilde{\pi}(\tilde{\psi}_\alpha(p,h)).$$

所以，K-主丛 $\tilde{\pi}:\tilde{B}\to M$ 是主丛 $\pi:B\to M$ 的约化丛，因而 G 可以约化为它的李子群 K. 证毕.

由定理 3.5 可以得到平凡丛的如下特征：

推论 3.6 设 (B,M,F,π,G) 是光滑流形 M 上的微分纤维丛，则 B 是平凡丛 $M\times F$ 的充分必要条件是它的相配主丛 $(\tilde{B},M,\tilde{\pi},G)$ 可以约化为 $\{e\}$-主丛，或等价地说，G-主丛 $(\tilde{B},M,\tilde{\pi},G)$ 有大范围地定义在底流形 M 上的光滑截面.

推论 3.6 的证明留作练习.

§10.4 主纤维丛上的联络

设 (B,M,π,G) 是 m 维光滑流形 M 上的 G-主丛，$\dim G=r$. 根据定理 3.2, 李群 G 是自由地右作用在丛空间 B 上的李氏变换群，而且 G 在 B 上的这种右作用保持 B 的纤维不变.

根据李氏变换群的一般理论 (参见参考文献 [3, 第六章，§5]), 在 B 上存在 r 个处处线性无关的基本向量场，由它们所张成的线性空间关于切向量场的 Poisson 括号积构成一个李代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$. 李代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 和李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 是同构的. 在这里，$\mathfrak{g}$ 是在 G 上由左不变向量场构成的李代数. $\tilde{\mathfrak{g}}$ 和 $\mathfrak{g}$ 之间的李代数同构可以具体地描述如下：

在单位元素 e 处取李群 G 的局部坐标系 $(W;y^\lambda;1\le\lambda\le r)$, 并设 $\delta_\lambda=\left.\dfrac{\partial}{\partial y^\lambda}\right|_e$, 则在 G 上与 δ_λ 相对应的左不变向量场 E_λ 是

$$(E_\lambda)_g=(L_g)_{*e}(\delta_\lambda)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(g\cdot\exp(t\delta_\lambda)),\quad \forall g\in G, \tag{4.1}$$

它在 B 上所对应的基本向量场 $\tilde{E}_\lambda$ 是

$$(\tilde{E}_\lambda)_b=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(b\cdot\exp(t\delta_\lambda)),\quad \forall b\in B. \tag{4.2}$$

容易看出，由对应 $E_\lambda\mapsto\varpi(E_\lambda)=\tilde{E}_\lambda$ 确定的线性映射 $\varpi:\mathfrak{g}\to\tilde{\mathfrak{g}}$ 与局部坐标系 (W,y^λ) 的取法无关，并且是李代数的同构.

对于任意的点 $b\in B$, 设 $p=\pi(b)$, 并置

$$V_b=T_b(\pi^{-1}(p))=\ker\pi_{*b}=\{X\in T_b;\ \pi_{*b}(X)=0\}, \tag{4.3}$$

则 V_b 是切空间 T_bB 的子空间，称为主丛 B 在点 b 的**铅垂子空间**. 在丛空间 B 上由 $b\mapsto V_b, b\in B$ 确定的分布 V 称为在丛空间 B 上的**铅垂分布**. 由于 G 在 B 上的右作用保持纤维不变，对于 $1\le\lambda\le r$ 有

$$\pi(b\cdot\exp(t\delta_\lambda))=\pi(b)=p,\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

由此得知

$$\pi_{*b}((\tilde{E}_\lambda)_b)=0. \tag{4.4}$$

于是，$(\tilde{E}_\lambda)_b\in V_b$. 因为 $\{(\tilde{E}_\lambda)_b;1\le\lambda\le r\}$ 是线性无关的，所以它们是铅垂子空间 V_b 的基底. 因此，对于每一个 $b\in B$, 可以定义线性同构 $\tau_b:V_b\to T_eG=\mathfrak{g}$, 使得

$$\tau_b((\tilde{E}_\lambda)_b)=\delta_\lambda. \tag{4.5}$$

10.4.1 联络的定义

在 §10.2 中曾经引入过标架丛上的水平分布的概念，这个概念明显地可以移植到一般的 G-主丛上来作为 G 主丛上的联络的定义，具体地叙述如下：

定义 4.1 设 (B,M,π,G) 是 m 维光滑流形 M 上的 G-主丛，$\dim G=r$. 设 H 是丛空间 B 上的一个 m 维光滑分布，或等价地说，H 是 B 上的一个光滑的 m 维切子空间场. 如果下面的条件成立：

(1) 在每一点 $b\in B$, 切空间 T_bB 有直和分解

$$T_bB=H_b\oplus V_b,$$

并且切映射 π_* 在 H_b 上的限制 $(\pi_*)|_{H_b}:H_b\to T_{\pi(b)}M$ 是线性同构;

(2) 分布 H 在 G 的右作用下是不变的，即对于任意的 $b \in B$, $g \in G$, 有

$$(R_g)_{*b}(H_b) = H_{b\cdot g},$$

则称 H 是 G-主丛 $\pi : B \to M$ 上的一个 **联络**.

简言之，主丛 $\pi : B \to M$ 上的一个联络就是在丛空间 B 上在李群 G 的右作用下保持不变的一个水平分布 (在这里"水平"的意思是条件 (1) 成立).

设 $p \in M$, $b \in \pi^{-1}(p)$. 对于联络 H, 既然 π_{*b} 在 H_b 上的限制是从 H_b 到 T_pM 的线性同构，因此下面的结论成立：

命题 4.1 设 H 是主丛 $\pi : B \to M$ 上的一个联络，$p \in M$, $b \in \pi^{-1}(p)$. 则对于任意给定的切向量 $X \in T_pM$, 必存在唯一的一个切向量 $\tilde{X}_b \in H_b \subset T_bB$, 使得 $\pi_{*b}(\tilde{X}_b) = X$. 切向量 $\tilde{X}_b$ 称为 $X \in T_pM$ 在点 $b \in \pi^{-1}(p)$ 处的 **水平提升 (切向量)** 或 **水平切向量**.

根据命题 4.1 不难知道，如果 X 是定义在底流形 M 上的一个光滑切向量场，则在 B 上存在唯一的一个光滑切向量场 $\tilde{X}$, 使得对于任意的 $b \in B$, $\tilde{X}_b$ 是 $X_{\pi(b)}$ 的水平提升. 切向量场 $\tilde{X}$ 也称为 X 的 **水平提升 (切向量场)**.

命题 4.2 设 H 是主丛 $\pi : B \to M$ 上的一个联络，$\tilde{X} \in \mathfrak{X}(B)$, 则 $\tilde{X}$ 是 M 上的某个光滑切向量场 X 的水平提升当且仅当 $\tilde{X}$ 是在丛空间 B 上在 G 的右作用下保持不变的水平切向量场，即对于任意的 $b \in B$, $g \in G$ 有

$$\tilde{X}_b \in H_b, \quad \text{且 } (R_g)_{*b}(\tilde{X}_b) = \tilde{X}_{b\cdot g}. \tag{4.6}$$

证明 如果 $\tilde{X}$ 是 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 的水平提升，则在每一点 $b \in B$, 都有 $\tilde{X}_b \in H_b$, 并且 $\pi_{*b}(\tilde{X}_b) = X_{\pi(b)}$. 因此，对于任意的 $g \in G$ 有 $\tilde{X}_{b\cdot g} \in H_{b\cdot g}$, $\pi_{*b\cdot g}(\tilde{X}_{b\cdot g}) = X_{\pi(b\cdot g)} = X_{\pi(b)}$. 因为水平分布在 G 的右作用下保持不变，故有

$$(R_g)_{*b}(\tilde{X}_b) \in H_{b\cdot g}, \tag{4.7}$$

并且

$$\pi_{*b\cdot g}((R_g)_{*b}(\tilde{X}_b)) = (\pi \circ R_g)_{*b}(\tilde{X}_b) = \pi_{*b}(\tilde{X}_b) = X_{\pi(b)}. \tag{4.8}$$

所以

$$\pi_{*b\cdot g}((R_g)_{*b}(\tilde{X}_b)) = \pi_{*b\cdot g}(\tilde{X}_{b\cdot g}).$$

由于切映射 $\pi_{*b\cdot g}$ 在 $H_{b\cdot g}$ 上的限制是到 $T_{\pi(b)}M$ 的线性同构，故

$$(R_g)_*(\tilde{X}_b) = \tilde{X}_{b\cdot g}.$$

反过来，设 $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(B)$ 在 G 的右作用下保持不变，即在任意一点 $b \in B$ 对于任意的 $g \in G$, (4.6) 式成立. 于是

$$\begin{aligned}\pi_{*b\cdot g}(\tilde{X}_{b\cdot g}) &= \pi_{*b\cdot g} \circ (R_g)_{*b}(\tilde{X}_b) \\ &= (\pi \circ R_g)_{*b}(\tilde{X}_b) = \pi_{*b}(\tilde{X}_b).\end{aligned} \tag{4.9}$$

这样，在底流形 M 上存在一个大范围地定义的切向量场 X, 使得对于任意的 $p \in M$ 有

$$X_p = \pi_{*b}(\tilde{X}_b), \quad b \in \pi^{-1}(p). \tag{4.10}$$

事实上，因为 G 在纤维 $\pi^{-1}(p)$ 上的右作用是可迁的，由 (4.9) 式得知 (4.10) 式的右边与 b 在 $\pi^{-1}(p)$ 中的取法无关. 为说明切向量场 X 的光滑性，对于任意的 $p \in M$, 取点 p 的一个开邻域 U 以及主丛 $\pi : B \to M$ 在 U 上的一个光滑的局部截面 $\sigma : U \to B$, 此时有

$$X_q = \pi_{*\sigma(q)}(\tilde{X}_{\sigma(q)}), \quad \forall q \in U,$$

即有

$$X|_U = \pi_*(\tilde{X}) \circ \sigma.$$

由 σ, $\tilde{X}$ 和 π 的光滑性便知，X 在点 p 附近是光滑的. 证毕.

10.4.2 联络的表示

在下面，我们要把联络 H 和切向量的水平提升具体地表示出来. 假定 $\psi: U\times G\to\pi^{-1}(U)$ 是主丛 $\pi: B\to M$ 的局部平凡化，底流形 M 在 U 上的局部坐标是 $x^i, 1\le i\le m$. 设 $p\in U$, $g\in G$, 有 $b=\psi(p,g)$. 用 $(Z;z^\lambda;\ 1\le\lambda\le r)$ 表示李群 G 在 g 处的局部坐标系，则 $(\psi(U\times Z);x^i,z^\lambda)$ 是丛空间 B 在点 b 处的局部坐标系，$\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_b, \left.\frac{\partial}{\partial z^\lambda}\right|_b; b\in\psi(U\times Z)\right\}$ 是 B 在坐标邻域 $\psi(U\times Z)$ 上的自然标架场. 由于 $\pi_{*b}\left(\left.\frac{\partial}{\partial z^\lambda}\right|_b\right)=0$, 故 $V_b=\mathrm{Span}\left\{\left.\frac{\partial}{\partial z^\lambda}\right|_b; 1\le\lambda\le r\right\}$. 因此，$\left\{\frac{\partial}{\partial z^\lambda}|_b; b\in\psi(U\times Z)\right\}$ 和 B 上的基本向量场 $\{\tilde{E}_\lambda\}$ 可以互相线性表示. 事实上，如果设 $(W;y^\lambda)$ 是李群 G 在单位元素 e 附近的坐标系，$\varphi^\mu(g,y)=z^\mu(g\cdot y), y\in W, 1\le\mu\le r$, 则由 (4.2) 式得到

$$\begin{aligned}(\tilde{E}_\lambda)_b&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(b\cdot\exp(t\delta_\lambda))\\&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(p,g\cdot\exp(t\delta_\lambda))\right|_{t=0}\\&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}z^\mu(\psi(p,g\cdot\exp(t\delta_\lambda)))\cdot\left.\frac{\partial}{\partial z^\mu}\right|_b\\&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}z^\mu(g\cdot\exp(t\delta_\lambda))\cdot\left.\frac{\partial}{\partial z^\mu}\right|_b\\&=\left.\frac{\partial\varphi^\mu(g,y)}{\partial y^\lambda}\right|_{y=e}\cdot\left.\frac{\partial}{\partial z^\mu}\right|_b,\end{aligned}\tag{4.11}$$

其中 $\delta_\lambda=\left.\frac{\partial}{\partial y^\lambda}\right|_{y=e}$. 顺便提一下，李群 G 在 g 处的左不变向量场 (参看 (4.1) 式) 的坐标表达式是

$$E_\lambda(g)=\left.\frac{\partial\varphi^\mu(g,y)}{\partial y^\lambda}\right|_{y=e}\cdot\left.\frac{\partial}{\partial z^\mu}\right|_g.$$

需要指出的是，在上式和 (4.11) 式中的 $\{z^\mu\}$ 有不同的含义，它们分别是李群 G 在 g 处的坐标函数和主丛 B 在 b 处的 (部分) 坐标函数，因而 $\left.\frac{\partial}{\partial z^\mu}\right|_g$ 和 $\left.\frac{\partial}{\partial z^\mu}\right|_b$ 分别是在 Z 上的坐标切向量和在 $\psi(U\times Z)$ 上的坐标切向量.

很明显，还有 $\pi_{*b}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_b\right)=\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$, 其中 $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, p\in U\right\}$ 是底流形 M 在 U 上的自然标架场，且 $b\in\pi^{-1}(p)$. 于是，切向量 $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\in T_pM$ 在点 $b\in\pi^{-1}(p)$ 处的水平提升可以表示为

$$(X_i)_b=\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_b+C_i^\lambda(b)(\tilde{E}_\lambda)_b,\tag{4.12}$$

其中 $C_i^\lambda\in C^\infty(\pi^{-1}(U))$. 当 U 上的局部坐标系 x^i 作变换时，自然基底 $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ 作相应的线性变换，其系数矩阵是坐标变换的 Jacobi 矩阵. 由于 $\pi_{*b}|_{H_b}: H_b\to T_pM$ 是线性同构，由 (4.12) 给出的水平提升 $(X_i)_b$ 也按同一个变换规律进行变换. 由此可见，在底流形上的坐标进行变换时，$C_i^\lambda(b)$ 关于下标 i 按协变张量的变换规律作线性变换. 注意到 $\{(X_i)_b; 1\le i\le m\}$ 是 H_b 的基底，因此

$$H|_{\pi^{-1}(U)}=\mathrm{Span}\{X_1,\cdots,X_m\}.$$

如果 $b,\tilde{b}\in\pi^{-1}(p)$, 则有 $g\in G$, 使得 $\tilde{b}=b\cdot g$. 于是，定义 4.1 中的条件 (2) 化为 $(R_g)_{*b}(H_b)=H_{b\cdot g}$. 特别地有 $(R_g)_{*b}((X_i)_b)\in H_{b\cdot g}$. 又因为

$$\begin{aligned}\pi_{*b\cdot g}((R_g)_{*b}((X_i)_b))=&(\pi\circ R_g)_{*b}((X_i)_b)\\=&\pi_{*b}((X_i)_b)=\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p,\end{aligned}\tag{4.13}$$

所以 $(R_g)_{*b}((X_i)_b)$ 和 $(X_i)_{b\cdot g}$ 都是 $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ 在点 $b\cdot g$ 处的水平提升，从而根据命题 4.1 的唯一性得知

$$(R_g)_{*b}((X_i)_b)=(X_i)_{b\cdot g}.\tag{4.14}$$

因此由 X_i 的表达式 (4.12) 得到

$$
\begin{aligned}
(R_g)_{*b}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_b\right)&=\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{b\cdot g},\\
C_i^\lambda(b)\cdot(R_g)_{*b}((\tilde{E}_\lambda)_b)&=C_i^\lambda(b\cdot g)\cdot(\tilde{E}_\lambda)_{b\cdot g}.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

此外，根据 $\tilde{E}_\lambda$ 的定义式 (4.2) 得知

$$
\begin{aligned}
(R_g)_{*b}((\tilde{E}_\lambda)_b)&=(R_g)_{*b}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}(b\cdot\exp(t\delta_\lambda))\right)\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}(b\cdot\exp(t\delta_\lambda)\cdot g)\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}(b\cdot g\cdot\exp(t\cdot\mathrm{Ad}(g^{-1})\delta_\lambda)),
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

其中 $\mathrm{Ad}:G\to\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 是李群 G 的伴随表示，换言之， $\mathrm{Ad}(g^{-1})$ 是李代数 $\mathfrak{g}=T_eG$ 的内自同构．若设

$$
\mathrm{Ad}(g^{-1})\delta_\lambda=(\mathrm{Ad}(g^{-1}))^\mu_\lambda\delta_\mu,\tag{4.17}
$$

则 (4.16) 式成为

$$
(R_g)_{*b}((\tilde{E}_\lambda)_b)=(\mathrm{Ad}(g^{-1}))^\mu_\lambda(\tilde{E}_\mu)_{b\cdot g}.\tag{4.18}
$$

将 (4.18) 式代入 (4.15) 式，并注意到基本向量场 $\tilde{E}_\lambda\,(1\le\lambda\le r)$ 是处处线性无关的，则有

$$
C_i^\lambda(b\cdot g)=(\mathrm{Ad}(g^{-1}))^\lambda_\mu C_i^\mu(b).\tag{4.19}
$$

综合上面的讨论得到如下的结论：水平分布 H 在局部上是由水平向量场 $X_1,\cdots,X_r$ 张成的，这里每一个 X_i 是底流形 M 上的切向量场 $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ $(p\in U)$ 的水平提升，其表达式是 (4.12)；当在底流形 M 上作坐标变换时， (4.12) 中的系数 $C_i^\lambda(b)$ 关于下指标 i 按协变张量的变换规律进行变换．同时， $C_i^\lambda(b)$ 对于李群 G 在 B 上的右作用满足关系式 (4.19)．

10.4.3 联络形式

上面的讨论告诉我们在 $\pi^{-1}(U)$ 上存在标架场 $\{(X_i)_b,(\tilde{E}_\lambda)_b;b\in\pi^{-1}(U)\}$，其中 $\tilde{E}_\lambda$ 张成铅垂分布 V；X_i 张成水平分布 H．于是，任意一个切向量 $\xi\in T_bB$ 可以唯一地表示为

$$
\xi=\xi^i(X_i)_b+\tilde{\xi}^\lambda(\tilde{E}_\lambda)_b=\xi^{\mathrm{h}}+\xi^{\mathrm{v}},\tag{4.20}
$$

其中

$$
\xi^{\mathrm{h}}=\xi^i(X_i)_b\in H_b,\quad \xi^{\mathrm{v}}=\tilde{\xi}^\lambda(\tilde{E}_\lambda)_b\in V_b\tag{4.21}
$$

分别是 ξ 的水平分量和铅垂分量．利用线性同构 $\tau_b:V_b\to\mathfrak{g}$(参看 (4.5) 式)，可以在丛空间 B 上定义一个 $\mathfrak{g}$-值的 1 次微分式 ω 如下：

$$
\omega(\xi)=\tau_b(\xi^{\mathrm{v}}),\quad \forall\xi\in T_bB,\quad b\in B.\tag{4.22}
$$

很明显， $\xi\in H_b$ 的充分必要条件是 $\omega(\xi)=0$．如果设 $\delta_\lambda=\frac{\partial}{\partial y^\lambda}\Big|_{y=e}$，$\omega=\omega^\lambda\delta_\lambda$，则由 (4.5) 式，以及 (4.20)~(4.22) 式得到

$$
\omega^\lambda(\xi)=\tilde{\xi}^\lambda,\quad \forall\xi\in T_bB,\quad b\in B.\tag{4.23}
$$

另外，从 (4.20) 和 (4.12), (4.11) 式得到

$$
\begin{aligned}
\xi=&\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_b+(\xi^iC_i^\lambda(b)+\tilde{\xi}^\lambda)(\tilde{E}_\lambda)_b\\
=&\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_b+(\xi^iC_i^\lambda(b)+\tilde{\xi}^\lambda)\frac{\partial\varphi^\mu(g,y)}{\partial y^\lambda}\bigg|_{y=e}\cdot\frac{\partial}{\partial z^\mu}\bigg|_b;
\end{aligned}
$$

因此

$$
\mathrm{d}x^i(\xi)=\xi^i,\qquad \mathrm{d}z^\mu(\xi)=(\xi^iC_i^\lambda(b)+\tilde{\xi}^\lambda)\frac{\partial\varphi^\mu(g,y)}{\partial y^\lambda}\bigg|_{y=e}.
$$

所以

$$
\tilde{\xi}^\lambda=\Lambda^\lambda_\mu(g)\mathrm{d}z^\mu(\xi)-C_i^\lambda(b)\xi^i=(-C_i^\lambda\mathrm{d}x^i|_b+\Lambda^\lambda_\mu\mathrm{d}z^\mu|_b)(\xi),
$$

其中 (Λ^λ_μ) 是矩阵 $\left(\left.\dfrac{\partial\varphi^\mu(g,y)}{\partial y^\lambda}\right|_{y=e}\right)$ 的逆矩阵，即

$$\Lambda^\lambda_\mu\cdot\left.\frac{\partial\varphi^\mu(g,y)}{\partial y^\nu}\right|_{y=e}=\delta^\lambda_\nu.$$

这意味着在局部坐标系 $(\psi(U\times Z);x^i,z^\lambda)$ 下，ω^λ 的表达式是

$$\omega^\lambda=-C^\lambda_i\mathrm{d}x^i|_b+\Lambda^\lambda_\mu\mathrm{d}z^\mu|_b. \tag{4.24}$$

定理 4.3 设 H 是 G-主丛 $\pi:B\to M$ 上的一个联络，ω 是丛空间 B 上由 (4.22) 式定义的 $\mathfrak{g}$-值 1 次微分式，则

(1) $\omega|_{V_b}=\tau_b:V_b\to\mathfrak{g}$，即对于任意的 $A\in\mathfrak{g}$ 所生成的基本向量场 $\tilde{A}$，有 $\omega((\tilde{A})_b)=A$；

(2) 对于任意的 $g\in G$ 有 $(R_g)^*\omega=\mathrm{Ad}(g^{-1})\cdot\omega$，其中右端的 $\mathrm{Ad}(g^{-1})\cdot\omega$ 是指 $\mathrm{Ad}(g^{-1})$ 作为李代数 $\mathfrak{g}$ 的内自同构在 ω(看作 $\mathfrak{g}$ 中的元素) 上的作用.

反之，设 ω 是定义在丛空间 B 上满足条件 (1) 和 (2) 的 $\mathfrak{g}$-值 1 次微分式，如果对于每一点 $b\in B$，令

$$H_b=\{\xi\in T_bB;\ \omega(\xi)=0\}, \tag{4.25}$$

则 H 是 G-主丛 $\pi:B\to M$ 上的一个联络.

上述 $\mathfrak{g}$-值 1 次微分式 ω 称为 G-主丛 $\pi:B\to M$ 上的联络 H 的**联络形式**.

证明 性质 (1) 是明显的. 事实上，对于每一个 λ，因为基本向量场 $\tilde{E}_\lambda$ 是铅垂切向量场，所以对于任意的 $b\in B$ 有

$$\omega((\tilde{E}_\lambda)_b)=\tau_b((\tilde{E}_\lambda)_b)=\delta_\lambda.$$

对于 $A\in\mathfrak{g}$，可设 $A=A^\lambda\delta_\lambda$，则 A 所生成的基本向量场是 $\tilde{A}=A^\lambda\tilde{E}_\lambda$. 因此

$$\omega(\tilde{A})=\omega(A^\lambda\tilde{E}_\lambda)=A^\lambda\delta_\lambda=A.$$

现在证明性质 (2). 任意的 $\xi\in T_bB$ 都可以表示为 (4.20) 式. 于是，对于任意的 $g\in G$ 有

$$(R_g)_{*b}\xi=\xi^i\cdot(R_g)_{*b}((X_i)_b)+\tilde{\xi}^\lambda\cdot(R_g)_{*b}((\tilde{E}_\lambda)_b).$$

利用 (4.14) 和 (4.18) 两式得到

$$(R_g)_{*b}\xi=\xi^i(X_i)_{b\cdot g}+\tilde{\xi}^\mu(\mathrm{Ad}(g^{-1}))^\lambda_\mu(\tilde{E}_\lambda)_{b\cdot g}.$$

因此，由 (2.23) 式和结论 (1) 得到

$$\begin{aligned}((R_g)^*\omega)(\xi)=&\omega((R_g)_*\xi)=\omega(\tilde{\xi}^\mu\cdot(\mathrm{Ad}(g^{-1}))^\lambda_\mu\cdot(\tilde{E}_\lambda)_{b\cdot g})\\=&\tilde{\xi}^\mu(\mathrm{Ad}(g^{-1}))^\lambda_\mu\cdot\omega((\tilde{E}_\lambda)_{b\cdot g})=\omega^\mu(\xi)\cdot(\mathrm{Ad}(g^{-1}))^\lambda_\mu\cdot\delta_\lambda\\=&(\mathrm{Ad}(g^{-1})\cdot\omega)(\xi).\end{aligned}$$

由 $\xi\in T_bB$ 的任意性得知

$$(R_g)^*\omega=\mathrm{Ad}(g^{-1})\cdot\omega. \tag{4.26}$$

反过来，设 ω 是定理所假设的 $\mathfrak{g}$-值 1 次微分式，则在每一点 $b\in B$，$\omega:T_bB\to\mathfrak{g}$ 是线性映射. 因为铅垂子空间 V_b 是 T_bB 的子空间，而 ω 所满足的条件 (1) 说明 $\omega|_{V_b}$ 是从 V_b 到 $\mathfrak{g}$ 的线性同构，所以根据 H_b 的定义，

$$\dim H_b=\dim T_bB-\dim\mathfrak{g}=\dim B-\dim G=\dim M,$$

因而 $T_bB=H_b\oplus V_b$. 条件 (2) 意味着，对于任意的 $\xi\in H_b$，$g\in G$ 有

$$\omega((R_g)_{*b}\xi)=((R_g)^*\omega)(\xi)=\mathrm{Ad}(g^{-1})\cdot\omega(\xi)=0,$$

从而

$$(R_g)_{*b}\xi\in H_{b\cdot g}.$$

由 $\xi\in H_b$ 的任意性得到

$$(R_g)_{*b}(H_b)\subset H_{b\cdot g}. \tag{4.27}$$

比较上式两端的维数可知，$(R_g)_{*b}(H_b) = H_{b\cdot g}$. 所以，$H$ 是 G-主丛 $\pi: B \to G$ 上的联络. 证毕.

定理 4.4　设 $\pi: B \to M$ 是光滑流形 M 上的 G-主丛，θ 是李群 G 的 Maurer-Cartan 形式，B 的一个局部平凡化结构和相应的转移函数族分别记为 $\{(U_\alpha, \psi_\alpha); \alpha \in I\}$ 和 $\{g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to G\}$. 假定 ω 是主丛 B 上的联络形式，并且对于 B 在 U_α 上的光滑截面 $\sigma_\alpha = \psi_\alpha(\cdot, e): U_\alpha \to B$, 记 $\omega_\alpha = \sigma_\alpha^*\omega$, 则当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上有下面的变换公式:

$$\omega_\beta(p) = \mathrm{Ad}(g_{\alpha\beta}(p))^{-1} \cdot \omega_\alpha(p) + (g_{\alpha\beta}^*\theta)(p), \quad \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta. \tag{4.28}$$

证明　对于任意的 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, 由 (3.2) 式,

$$\begin{aligned}\sigma_\beta(p) &= \psi_\beta(p, e) = \psi_{\beta,p}(e) = \psi_{\alpha,p} \circ \psi_{\alpha,p}^{-1} \circ \psi_{\beta,p}(e)\\ &= \psi_\alpha(p, g_{\alpha\beta}(p)) = \psi_\alpha(p, e) \cdot g_{\alpha\beta}(p) = \sigma_\alpha(p) \cdot g_{\alpha\beta}(p).\end{aligned}$$

于是，光滑截面 $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ 在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上满足关系式

$$\sigma_\beta = \sigma_\alpha \cdot g_{\alpha\beta}. \tag{4.29}$$

设 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, 并且令 $b = \sigma_\alpha(p)$, $g = g_{\alpha\beta}(p)$. 对于任意的 $X \in T_pM$, 在 M 中可以作光滑曲线 $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \to M$, 使得 $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = X$. 于是

$$\begin{aligned}(\sigma_\beta)_{*p}(X) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \psi_\beta(\gamma(t), e)\\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\psi_\alpha(\gamma(t), e) \cdot g_{\alpha\beta}(\gamma(t)))\\ &= (R_g)_{*b}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \psi_\alpha(\gamma(t), e)\right) + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\sigma_\alpha(p) \cdot g_{\alpha\beta}(\gamma(t)))\\ &= (R_g)_{*b}((\sigma_\alpha)_{*p}(X)) + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} ((b \cdot g) \cdot g^{-1} g_{\alpha\beta}(\gamma(t)))\\ &= (R_g)_{*b}((\sigma_\alpha)_{*p}(X)) + (\tau_{b\cdot g})^{-1}(g_{\alpha\beta}^*\theta(X)).\end{aligned} \tag{4.30}$$

将联络形式 ω 在 $(\sigma_\beta)_*(X) \in T_{b\cdot g}B$ 上求值，得到

$$\begin{aligned}(\sigma_\beta^*\omega)(X) &= \omega((\sigma_\beta)_{*p}(X)) = \omega((R_g)_{*b}((\sigma_\alpha)_{*p}(X))) + g_{\alpha\beta}^*\theta(X)\\ &= ((R_g)^*\omega)((\sigma_\alpha)_{*p}(X)) + g_{\alpha\beta}^*\theta(X)\\ &= \mathrm{Ad}(g^{-1}) \cdot \omega((\sigma_\alpha)_{*p}X) + g_{\alpha\beta}^*\theta(X)\\ &= \mathrm{Ad}(g^{-1}) \cdot \omega_\alpha(X) + g_{\alpha\beta}^*\theta(X),\end{aligned}$$

即

$$\omega_\beta = \sigma_\beta^*\omega = \mathrm{Ad}(g^{-1}) \cdot \omega_\alpha + g_{\alpha\beta}^*\theta.$$

证毕.

定理 4.5　设 $\pi: B \to M$ 是光滑流形 M 上的 G-主丛，θ 是李群 G 的 Maurer-Cartan 形式，B 的一个局部平凡化结构和相应的转移函数族分别记为 $\{(U_\alpha, \psi_\alpha); \alpha \in I\}$ 和 $\{g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to G\}$. 对于任意的 $\alpha \in I$, 定义 B 在 U_α 上的光滑截面 $\sigma_\alpha = \psi_\alpha(\cdot, e)$. 如果对于每一个 $\alpha \in I$ 都指定了一个定义在 U_α 上的 $\mathfrak{g}$-值 1 次微分式 ω_α, 并且使得它们在 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时满足变换公式 (4.28), 则在 B 上存在唯一的一个联络形式 ω, 使得对于任意的 $\alpha \in I$ 有 $\omega_\alpha = \sigma_\alpha^*\omega$.

证明　由于 $\sigma_\alpha: U_\alpha \to B$ 是主丛 B 在 U_α 上的光滑截面，故有 $\pi^{-1}(U_\alpha) = \sigma_\alpha(U_\alpha) \cdot G$. 对于任意的 $b \in \pi^{-1}(U_\alpha)$, 在 G 中存在唯一的一个元素，记为 $\varphi_\alpha(b)$, 使得 $b = \sigma_\alpha(\pi(b)) \cdot \varphi_\alpha(b)$, 由此定义了映射 $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \to G$. 在 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上定义 $\mathfrak{g}$-值 1 次微分式 $\tilde{\omega}_\alpha$ 使得

$$\tilde{\omega}_\alpha(b) = \mathrm{Ad}(\varphi_\alpha(b))^{-1} \cdot (\pi^*\omega_\alpha)(b) + (\varphi_\alpha^*\theta)(b), \quad \forall b \in \pi^{-1}(U_\alpha). \tag{4.31}$$

下面要证明：当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时，在 $\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ 上有 $\tilde{\omega}_\alpha = \tilde{\omega}_\beta$. 事实上，当 $b \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ 时，记 $p = \pi(b)$, 则有

$$b = \sigma_\alpha(p) \cdot \varphi_\alpha(b) = \sigma_\beta(p) \cdot \varphi_\beta(b).$$

由于 $\sigma_\alpha(p) \cdot g_{\alpha\beta}(p) = \sigma_\beta(p)$, 并且 G 在 B 上的右作用没有不动点，因此

$$\varphi_\alpha(b) = g_{\alpha\beta}(p) \cdot \varphi_\beta(b). \tag{4.32}$$

另外，由 (4.28) 式得知

$$\pi^*\omega_\beta(b) = \mathrm{Ad}(g_{\alpha\beta}(p))^{-1}\cdot\pi^*\omega_\alpha(b) + (\pi^*\circ g_{\alpha\beta}^*\theta)(b), \tag{4.33}$$

故有

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_\beta(b) =& \mathrm{Ad}(\varphi_\beta(b))^{-1}\cdot(\pi^*\omega_\beta)(b) + (\varphi_\beta^*\theta)(b)\\ =& \mathrm{Ad}(\varphi_\beta(b))^{-1}\cdot\mathrm{Ad}(g_{\alpha\beta}(p))^{-1}\cdot\pi^*\omega_\alpha(b)\\ &+ \mathrm{Ad}(\varphi_\beta(b))^{-1}\cdot(g_{\alpha\beta}\circ\pi)^*\theta(b) + (\varphi_\beta^*\theta)(b)\\ =& \mathrm{Ad}(\varphi_\alpha(b))^{-1}\cdot\pi^*\omega_\alpha(b) + \mathrm{Ad}(\varphi_\beta(b))^{-1}\cdot(g_{\alpha\beta}\circ\pi)^*\theta(b)\\ &+ (\varphi_\beta^*\theta)(b).\end{aligned} \tag{4.34}$$

对于任意的 $X\in T_bB$, 作光滑曲线 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to B$, 使得 $\gamma(0)=b$, $\gamma'(0)=X$. 则由 (4.32) 式得到

$$\begin{aligned}&\varphi_\alpha(\gamma(t)) = g_{\alpha\beta}(\pi\circ\gamma(t))\cdot\varphi_\beta(\gamma(t)),\\ &(\varphi_\alpha)_{*b}(X) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\varphi_\alpha(\gamma(t)).\end{aligned} \tag{4.35}$$

所以

$$\begin{aligned}(\varphi_\alpha^*\theta)(X) =& \theta((\varphi_\alpha)_{*b}(X)) = \theta\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\varphi_\alpha(\gamma(t))\right)\\ =& \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}((\varphi_\alpha(b))^{-1}\varphi_\alpha(\gamma(t)))\\ =& \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}((g_{\alpha\beta}(p)\cdot\varphi_\beta(b))^{-1}\cdot g_{\alpha\beta}(\pi\circ\gamma(t))\cdot\varphi_\beta(\gamma(t)))\\ =& \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}((\varphi_\beta(b))^{-1}\cdot(g_{\alpha\beta}(p))^{-1}(g_{\alpha\beta}(\pi\circ\gamma(t))\cdot\varphi_\beta(\gamma(t)))\\ =& \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}((\varphi_\beta(b))^{-1}\cdot(g_{\alpha\beta}(p))^{-1}\cdot g_{\alpha\beta}(\pi\circ\gamma(t))\cdot\varphi_\beta(b))\\ &+ \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}((\varphi_\beta(b))^{-1}\cdot(g_{\alpha\beta}(p))^{-1}\cdot g_{\alpha\beta}(p)\cdot\varphi_\beta(\gamma(t)))\\ =& \mathrm{Ad}(\varphi_\beta(b))^{-1}\cdot\theta((g_{\alpha\beta}\circ\pi)_*(X)) + \theta((\varphi_\beta)_*(X))\end{aligned}$$

$$= \left(\mathrm{Ad}(\varphi_\beta(b))^{-1}\cdot(g_{\alpha\beta}\circ\pi)^*\theta + \varphi_\beta^*\theta\right)(X),$$

即

$$\varphi_\alpha^*\theta(b) = \mathrm{Ad}(\varphi_\beta(b))^{-1}\cdot(g_{\alpha\beta}\circ\pi)^*\theta(b) + \varphi_\beta^*\theta(b). \tag{4.36}$$

将 (4.36) 式代入 (4.34) 式得到

$$\tilde{\omega}_\beta(b) = \mathrm{Ad}(\varphi_\alpha(b))^{-1}\cdot\pi^*\omega_\alpha(b) + \varphi_\alpha^*\theta(b) = \tilde{\omega}_\alpha(b).$$

于是，在 B 上可以定义 $\mathfrak{g}$-值的 1 次微分式 ω, 使得

$$\omega|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} = \tilde{\omega}_\alpha. \tag{4.37}$$

注意到

$$\varphi_\alpha(\sigma_\alpha(p)) = \varphi_\alpha(\psi_\alpha(p,e)) = e, \quad \forall p\in U_\alpha,$$

因此 $(\varphi_\alpha\circ\sigma_\alpha)^*\theta = 0$, 所以

$$\begin{aligned}(\sigma_\alpha^*\omega)(p) =& \sigma_\alpha^*(\omega(\sigma_\alpha(p))) = \sigma_\alpha^*(\tilde{\omega}_\alpha(\sigma_\alpha(p)))\\ =& \sigma_\alpha^*\left(\mathrm{Ad}(\varphi_\alpha(\sigma_\alpha(p)))^{-1}\cdot(\pi^*\omega_\alpha)(\sigma_\alpha(p)) + (\varphi_\alpha^*\theta)(\sigma_\alpha(p))\right)\\ =& \mathrm{Ad}(e^{-1})\cdot\sigma_\alpha^*(\pi^*\omega_\alpha)(p) + \sigma_\alpha^*(\varphi_\alpha^*\theta)(p)\\ =& (\pi\circ\sigma_\alpha)^*\omega_\alpha(p) + (\varphi_\alpha\circ\sigma_\alpha)^*\theta(p)\\ =& \omega_\alpha(p),\end{aligned}$$

即 $\sigma_\alpha^*\omega = \omega_\alpha$.

接着需要证明 1 次微分式 ω 满足定理 4.3 的条件 (1) 和 (2). 为此，设 $A\in\mathfrak{g}$, 它在 B 上所生成的基本向量场是 $\tilde{A}$, 则在点 $b\in\pi^{-1}(U_\alpha)$ 处有

$$(\tilde{A})_b = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(b\cdot\exp(tA)).$$

于是

$$\omega((\tilde{A})_b) = \tilde{\omega}_\alpha((\tilde{A})_b) = \varphi_\alpha^*\theta((\tilde{A})_b) = \theta((\varphi_\alpha)_{*b}(\tilde{A})_b)$$

$$=\theta\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\varphi_\alpha(b)\cdot\exp(tA)\right)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\exp(tA)=A,$$

条件 (1) 成立. 现在设 $b\in\pi^{-1}(U_\alpha)$, $g\in G$, $X\in T_bB$. 取光滑曲线 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to B$, 使得 $\gamma(0)=b$, $\gamma'(0)=X$. 那么

$$\begin{aligned}((R_g)^*\omega)(X)&=\tilde\omega_\alpha((R_g)_{*b}X)\\&=\mathrm{Ad}(\varphi_\alpha(b\cdot g))^{-1}\cdot\pi^*\omega_\alpha((R_g)_{*b}X)+\varphi_\alpha^*\theta((R_g)_{*b}X).\end{aligned}$$

注意到

$$\varphi_\alpha(b\cdot g)=\varphi_\alpha(b)\cdot g,\quad \pi\circ R_g=\pi,$$

所以

$$\begin{aligned}&\varphi_\alpha^*\theta((R_g)_{*b}X)\\&=\theta((\varphi_\alpha\circ R_g)_{*b}(\gamma'(0)))=\theta\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\varphi_\alpha(\gamma(t))\cdot g\right)\\&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}((\varphi_\alpha(b)\cdot g)^{-1}\cdot\varphi_\alpha(\gamma(t))\cdot g)\\&=\mathrm{Ad}(g^{-1})\cdot\varphi_\alpha^*\theta(X),\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}&((R_g)^*\omega)(X)\\&=\mathrm{Ad}(g^{-1})\cdot\mathrm{Ad}(\varphi_\alpha(b))^{-1}\cdot\pi^*\omega_\alpha(X)+\mathrm{Ad}(g^{-1})\cdot\varphi_\alpha^*\theta(X)\\&=\mathrm{Ad}(g^{-1})\cdot\tilde\omega_\alpha(X)=\mathrm{Ad}(g^{-1})\cdot\omega(X),\end{aligned}$$

即条件 (2) 成立. 再由定理 4.3 得知, ω 是 G-主丛 $\pi:B\to M$ 上的一个联络 H 的联络形式. 证毕.

在主丛 $\pi:B\to M$ 上给定联络 H 之后, 底流形 M 上的光滑切向量场可以水平地提升到丛空间 B 上去 (命题 4.1), 而且底流形 M 中的光滑曲线也可以水平提升为丛空间 B 中的光滑曲线.

定理 4.6　设 H 是 G-主丛 $\pi:B\to M$ 上的联络, $p\in M$, $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是底流形 M 上的任意一条光滑曲线, 并且 $\gamma(0)=p$. 则对于任意一点 $b\in\pi^{-1}(p)$, 在 B 上存在唯一的一条光滑曲线 $\tilde\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to B$, 使得 $\tilde\gamma(0)=b$, $\pi(\tilde\gamma(t))=\gamma(t)$, 并且 $\tilde\gamma'(t)\in H(\gamma(t))$.

曲线 $\tilde\gamma$ 称为底流形 M 中的光滑曲线 γ 在丛空间 B 中经过点 b 的**水平提升 (曲线)**. 此时对于任意的 t, 也把 $\tilde\gamma(t)$ 成为主丛 B 上的元素 $b=\tilde\gamma(0)\in\pi^{-1}(p)$ 沿光滑曲线 γ 从点 $p=\gamma(0)$ 到点 $\gamma(t)$ 的 "平行移动".

证明　设 $(U;x^i)$ 是 M 在点 p 处的局部坐标系, 使得主丛 $\pi:B\to M$ 在 U 上有局部平凡化 $\psi:U\times G\to\pi^{-1}(U)$. 于是, 对于 $b\in\pi^{-1}(p)$ 必存在 $g\in G$ 使得 $b=\psi(p,g)$. 又设 $(W;y^\lambda)$ 和 $(Z;z^\lambda)$ 分别是李群 G 在单位元素 e 和点 g 处的局部坐标系, 则 $(\psi(U\times Z);x^i,z^\lambda)$ 是丛空间 B 在点 b 处的局部坐标系. 设 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 的参数方程是 $x^i(t)=x^i(\gamma(t))$, 那么可以假设它的水平提升曲线 $\tilde\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to B$ 的参数方程为

$$x^i=x^i(t),\quad z^\lambda=z^\lambda(t)=z^\lambda(g(t)),$$

其中 $t\mapsto g(t)$ 是 G 中的光滑曲线使得 $\tilde\gamma(t)=\psi(\gamma(t),g(t))$. 于是

$$\begin{aligned}\tilde\gamma(t)&=\frac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t}\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\tilde\gamma(t)}+\frac{\mathrm{d}z^\lambda(t)}{\mathrm{d}t}\left.\frac{\partial}{\partial z^\lambda}\right|_{\tilde\gamma(t)}\\&=\frac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\tilde\gamma(t)}+C_i^\lambda(\tilde\gamma(t))\tilde E_\lambda(\tilde\gamma(t))\right)\\&\quad+\left(\frac{\mathrm{d}z^\lambda(t)}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t}C_i^\mu(\tilde\gamma(t))\left.\frac{\partial\varphi^\lambda(z(t),y)}{\partial y^\mu}\right|_{y=e}\right)\left.\frac{\partial}{\partial z^\lambda}\right|_{\tilde\gamma(t)}\end{aligned}$$

(参看 (4.11) 和 (4.12) 式). 由此可见, $\tilde\gamma'(t)\in H(\tilde\gamma(t))$ 的充分必要条件是函数 $z^\lambda(t)$ 满足常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}z^\lambda(t)}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t}C_i^\mu(\tilde\gamma(t))\left.\frac{\partial\varphi^\lambda(z(t),y)}{\partial y^\mu}\right|_{y=e}=0,\quad 1\le\lambda\le r.\tag{4.38}$$

根据常微分方程组的理论, 方程组 (4.38) 对于任意给定的初始值 $z^\lambda(0) = z^\lambda(g)$ 有唯一的解 $z^\lambda = z^\lambda(t)$. 这样, $\tilde{\gamma}(t) = \psi(\gamma(t), g(t))$ 就是所要求的曲线, 其中 $z^\lambda(g(t)) = z^\lambda(t)$. 证毕.

10.4.4 在相配向量丛上的诱导联络

至此, 对于主丛上联络的概念及其表达的方法都已经作了详细的介绍. 最后要说明: 主丛上的联络在与它相配的向量丛上自然地诱导出一个联络. 因此, 主丛上联络的概念是向量丛上联络的推广.

定理 4.7 设 $\pi : B \to M$ 是一个 G-主丛, H 是该主丛上的联络, ω 是其联络形式. 如果李群 G 在向量空间 V 上有一个表示 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, 则联络 H 在主丛 $\pi : B \to M$ 的相配向量丛 $E = B \times_\rho V$ 上自然地诱导出一个联络 D.

证明 相配丛 $E = B \times_\rho V$ 的构造由例 3.4 给出. 设 $p \in M$, $X \in T_pM$, 取光滑曲线 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ 使得 $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = X$. 任意取一点 $b \in \pi^{-1}(p)$, 则根据定理 4.6, 在 B 中存在光滑曲线 $\tilde{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to B$ 使得

$$\tilde{\gamma}(0) = b, \quad \pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t), \quad \tilde{\gamma}'(t) \in H_{\tilde{\gamma}(t)}.$$

设 s 是 E 的任意一个局部截面, 它在 $\gamma(t)$ 上的限制可以表示为

$$s(t) = [(\tilde{\gamma}(t), v(t))], \tag{4.39}$$

令

$$\mathrm{D}_X s = [(b, v'(0))]. \tag{4.40}$$

由于水平分布 H 在 G 的右作用下保持不变, 水平提升曲线 $\tilde{\gamma}$ 在 G 的右作用下也是不变的. 因此, (4.40) 式的右端与表示局部截面 $s(t)$ 的代表元的取法无关. 所以 (4.40) 式定义了一个映射 $\mathrm{D} : \Gamma(E) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(E)$. 容易验证, 映射 D 满足向量丛上的联络的定义 (参看第二章的定义 8.1). (4.40) 式的几何意义是: 将 $\tilde{\gamma}(t)$ 看作 "平行标架场", 则 $v(t)$ 是向量场 $s(t)$ 在该标架场下的 "分量", 于是 $s(t)$ 的协变导数恰好是分量 $v(t)$ 的导数 (参看第二章定理 7.2). 证毕.

相配向量丛 $\tilde{\pi} : E = B \times_\rho V \to M$ 上的诱导联络 D 也可以用主丛 B 上相应联络 H 的联络形式 ω 来刻画. 设 $\sigma : U \to B$ 是主丛 $\pi : B \to M$ 的一个局部截面, $\{e_\alpha\}$ 是向量空间 V 的基底. 对于任意的 $p \in U$, 令 $s_\alpha(p) = \phi_{\sigma(p)}(e_\alpha)$, 其中的线性同构 $\phi_{\sigma(p)} : V \to \tilde{\pi}^{-1}(p)$ 由 (3.26) 式给出, 则 $\{s_\alpha\}$ 是向量丛 E 的一个局部标架场. 用 $\rho_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ 记 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 的诱导表示. 这样, $\rho_*\omega$ 是定义在 B 上在 $\mathfrak{gl}(V)$ 中取值的 1 次微分式, $\rho_*(\sigma^*\omega) = \sigma^*(\rho_*\omega)$ 是定义在 $U(\subset M)$ 上在 $\mathfrak{gl}(V)$ 中取值的 1 次微分式. 对于每一个 α, 设

$$(\rho_*(\omega))(e_\alpha) = \omega_\alpha^\beta e_\beta, \quad (\rho_*(\sigma^*\omega))(e_\alpha) = \tilde{\omega}_\alpha^\beta e_\beta, \tag{4.41}$$

则显然有 $\sigma^*\omega_\alpha^\beta = \tilde{\omega}_\alpha^\beta$. 利用定理 4.7 可以得到如下的结论:

命题 4.8 设 $\sigma : U \to B$ 是主丛 $\pi : B \to M$ 的局部截面, 相配向量丛 $\tilde{\pi} : E \to M$ 的局部标架场 $\{s_\alpha\}$ 由 $s_\alpha(p) = \phi_{\sigma(p)}(\delta_\alpha)$ $(p \in U)$ 定义. 如果 1 次形式 $\omega_\alpha^\beta, \tilde{\omega}_\alpha^\beta$ 由 (4.41) 式给出, 则有

$$\mathrm{D}s_\alpha = \tilde{\omega}_\alpha^\beta s_\beta = \sigma^*\omega_\alpha^\beta \cdot s_\alpha. \tag{4.42}$$

证明 设 $p \in U$, $X \in T_pM$, 记 $b = \sigma(p)$. 又设 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ 是底流形 M 上满足 $\gamma(0) = p$ 和 $\gamma'(0) = X$ 的光滑曲线, $\tilde{\gamma}$ 是 γ 在主丛 B 上过点 b 的水平提升 (即有 $\tilde{\gamma}(0) = b$), 则存在结构群 G 上的曲线 $g(t)$, 满足 $g(0) = e$ 并且 $\sigma(\gamma(t)) = \tilde{\gamma}(t) \cdot g(t)$. 令 $A = g'(0)$, 则 A 在主丛空间 B 上确定的基本向量场 $\tilde{A}$ 在点 b 的值是 $(\tilde{A})_b = \left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (b \cdot g(t))$. 于是由 s_α 的定义和 (4.40) 式有

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_X s_\alpha &= \mathrm{D}_X([(\sigma, e_\alpha)]) = \mathrm{D}_X([(\tilde{\gamma}(t), \rho(g(t))e_\alpha)]) \\ &= [(b, \rho_*(g'(0))e_\alpha)] = [(b, \rho_*(A)e_\alpha)] \\ &= [(b, \rho_*(\omega((\tilde{A})_b))e_\alpha)]. \end{aligned} \tag{4.43}$$

因为 $\tilde{\gamma}'(0)$ 是 B 在点 b 的水平向量，并且

$$\begin{aligned}(\tilde{A})_b &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(b\cdot g(t))\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{\gamma}(t)\cdot g(t))\Big|_{t=0} - \tilde{\gamma}'(0)\cdot g(0)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma(\gamma(t))\Big|_{t=0} - \tilde{\gamma}'(0) = \sigma_*(X) - \tilde{\gamma}'(0),\end{aligned}$$

所以 $\omega((\tilde{A})_b) = \omega(\sigma_*(X)) = \sigma^*\omega(X)$. 代入 (4.43) 式便得

$$\mathrm{D}_X s_\alpha = [(b, \rho_*(\sigma^*\omega(X))e_\alpha)] = \phi_b(\tilde{\omega}_\alpha^\beta(X)e_\beta) = \tilde{\omega}_\alpha^\beta(X)s_\beta(p).$$

再由点 p 和 X 的任意性，命题得证.

注记 4.1 在向量空间 V 上取定一个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, 令

$$\mathrm{O}(V) = \{T\in \mathrm{GL}(V);\ \langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle,\ \forall v, w\in V\}.$$

如果对于任意的 $g\in G$, $\rho(g)\in \mathrm{O}(V)$, 则内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 在向量丛 $\tilde{\pi}: E\to M$ 上自然地诱导了一个黎曼结构，使得 $\tilde{\pi}: E\to M$ 成为黎曼向量丛，并且对于任意的 $p\in M$ 和任意的 $b\in\pi^{-1}(b)$, $\phi_b: V\to\tilde{\pi}^{-1}(p)$ 是等距的线性同构. 此时，如果 $\{e_\alpha\}$ 是 V 的单位正交基底，则由截面 $\sigma: U\to B$ 给出的局部标架场 $\{s_\alpha\}$ 也是单位正交的.

利用向量丛 $\tilde{\pi}: E\to M$ 上的黎曼结构，容易得到如下的命题:

命题 4.9 设 V 是欧氏向量空间，$\{e_\alpha\}$ 是 V 的一个单位正交基. 如果线性表示 $\rho: G\to \mathrm{GL}(V)$ 满足 $\rho(G)\subset \mathrm{O}(V)$, 则由 (4.41) 式定义的 1 次外形式 $\omega_\alpha^\beta, \tilde{\omega}_\alpha^\beta$ 关于指标 α,β 是反对称的，即有

$$\omega_\alpha^\beta = -\omega_\beta^\alpha,\quad \tilde{\omega}_\alpha^\beta = -\tilde{\omega}_\beta^\alpha. \tag{4.44}$$

证明 正交变换群 $\mathrm{O}(V)$ 的李代数 $\mathfrak{o}(V)$ 由 V 上的反对称线性变换构成，证明的细节留给读者自己完成.

§10.5 主丛上联络的曲率

在第四章我们已经知道，黎曼流形上的曲率形式是衡量黎曼结构偏离欧氏结构的程度的不变量，向量丛上的联络的曲率形式是反映向

量丛偏离平凡丛的程度的不变量. 对于主丛上的联络来说，可以定义类似的曲率形式，具有相同的功能. 下面先从光滑流形的切标架丛 (参看 §10.2) 谈起.

10.5.1 标架丛上的曲率形式

设 M 是 m 维光滑流形，$\pi: TM\to M$ 是 M 的切丛，它的局部平凡化结构是 $\{(U_\alpha, \psi_\alpha : \alpha\in I)\}$. 设 $\tilde{\pi}: F(M)\to M$ 是与其相配的标架丛，结构群是 $\mathrm{GL}(m;\mathbb{R})$, 相应的局部平凡化结构是 $\{(U_\alpha; \varphi_\alpha : \alpha\in I\}$. 设 M 在 U_α 上的局部坐标是 $x_\alpha^i, 1\le i\le m$. 命 $s_i^{(\alpha)} = \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha^i}$, 则 $s^{(\alpha)} = \{s_i^{(\alpha)}\}$ 是切丛 TM 在 U_α 上的局部标架场，即 $s^{(\alpha)}$ 是标架丛 $F(M)$ 的一个局部截面. 这样，$\tilde{\pi}: F(M)\to M$ 的局部平凡化 $\varphi_\alpha: U_\alpha\times \mathrm{GL}(m,\mathbb{R})\to\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$ 是

$$\varphi_\alpha(p, A) = s^{(\alpha)}\cdot A = \{A_1^j s_j^{(\alpha)}, \cdots, A_m^j s_j^{(\alpha)}\},$$

在这里 A_i^j 是矩阵 A 的第 j 行、第 i 列元素. 因此在 $\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$ 上的局部坐标系由 $(x_\alpha^i; A_i^j)$ 给出.

设 D 是 M 上的一个仿射联络，假定

$$\mathrm{D}s_i^{(\alpha)} = \omega_i^{(\alpha)j}s_j^{(\alpha)},\qquad \omega_i^{(\alpha)j} = \Gamma_{ik}^{(\alpha)j}\mathrm{d}x_\alpha^k, \tag{5.1}$$

则在 $F(M)$ 上有一个大范围定义好的、在 $\mathfrak{gl}(m;\mathbb{R})$ 中取值的 1 次微分式 (参看 §10.2)

$$\theta|_{U_\alpha} = A^{-1}\cdot(\mathrm{d}A + \tilde{\pi}^*\omega^{(\alpha)}\cdot A), \tag{5.2}$$

它是标架丛 $\tilde{\pi}: F(M)\to M$ 作为 $\mathrm{GL}(m;\mathbb{R})$ 主丛的联络形式.

联络 D 在局部坐标系 $(U_\alpha; x_\alpha^i)$ 下的曲率形式是

$$\Omega^{(\alpha)} = \mathrm{d}\omega^{(\alpha)} + \omega^{(\alpha)}\wedge\omega^{(\alpha)}, \tag{5.3}$$

即

$$\Omega_i^{(\alpha)j} = \mathrm{d}\omega_i^{(\alpha)j} + \omega_k^{(\alpha)j}\wedge\omega_i^{(\alpha)k}$$

$$= \mathrm{d}\omega_i^{(\alpha)j} - \omega_i^{(\alpha)k} \wedge \omega_k^{(\alpha)j}.$$

命

$$\Theta|_{U_\alpha} = A^{-1} \cdot \tilde{\pi}^*(\Omega_{(\alpha)}) \cdot A. \tag{5.4}$$

容易验证：Θ 是在 $F(M)$ 上大范围定义的、在 $\mathfrak{gl}(m;\mathbb{R})$ 中取值的 2 次外微分式. 事实上，设 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 则在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上有两组局部坐标系 (x_α^i) 和 (x_β^i), 命 $J_{\alpha\beta} = \left(\dfrac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}\right)$, 则

$$s^{(\beta)} = s^{(\alpha)} \cdot J_{\alpha\beta}. \tag{5.5}$$

因而 $\varphi_\alpha(p, A) = \varphi_\beta(p, B)$ 当且仅当

$$A = J_{\alpha\beta} \cdot B \text{ 或 } B = J_{\alpha\beta}^{-1} \cdot A. \tag{5.6}$$

联络形式 $\omega^{(\alpha)}$ 在局部坐标变换下变为

$$\omega^{(\beta)} = J_{\alpha\beta}^{-1}(\mathrm{d}J_{\alpha\beta} + \omega^{(\alpha)} J_{\alpha\beta}), \tag{5.7}$$

因此曲率形式 $\Omega^{(\alpha)}$ 经受的变换是

$$\Omega^{(\beta)} = J_{\alpha\beta}^{-1} \cdot \omega^{(\alpha)} \cdot J_{\alpha\beta}. \tag{5.8}$$

由此可见

$$\begin{aligned} &B^{-1} \cdot \tilde{\pi}^*(\Omega^{(\beta)}) \cdot B \\ &=(J_{\alpha\beta}^{-1} \cdot A)^{-1} \cdot \tilde{\pi}^*(J_{\alpha\beta}^{-1} \cdot \Omega^{(\theta)} \cdot J_{\alpha\beta}) \cdot J_{\alpha\beta}^{-1} \cdot A \\ &=A^{-1} \cdot \tilde{\pi}^*(\Omega^{(\alpha)}) \cdot A, \end{aligned}$$

即 (5.4) 式的右端与局部坐标系 $(U_\alpha; x_\alpha^i)$ 的选取无关.

命题 5.1 由 (5.4) 式在切标架丛 $F(M)$ 上定义的、在 $\mathfrak{gl}(m;\mathbb{R})$ 中取值的 2 次外微分式 Θ 与联络形式 θ 满足关系式

$$\Theta = \mathrm{d}\theta + \theta \wedge \theta. \tag{5.9}$$

Θ 称为联络形式 θ 的曲率形式.

证明 对 $\theta|_{U_\alpha}$ 的定义式 (5.2) 求外微分得到

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\theta|_{U_\alpha} =&\mathrm{d}A^{-1} \wedge (\mathrm{d}A + \tilde{\pi}^*\omega^{(\alpha)} \cdot A) + A \cdot \mathrm{d}(\tilde{\pi}^*\omega^{(\alpha)} \cdot A) \\ =&- A^{-1}\mathrm{d}A \wedge A^{-1}\mathrm{d}A - A^{-1}\mathrm{d}A \wedge A^{-1}(\tilde{\pi}^*\omega^{(\alpha)})A \\ &+ A \cdot \mathrm{d}(\tilde{\pi}^*\omega^{(\alpha)}) \cdot A - A^{-1}(\tilde{\pi}^*\omega^{(\alpha)})A \wedge A^{-1}\mathrm{d}A. \end{aligned}$$

另外

$$\begin{aligned} \theta \wedge \theta|_{U_\alpha} =&A^{-1}(\mathrm{d}A + \tilde{\pi}^*\omega^{(\alpha)}A) \wedge A^{-1}(\mathrm{d}A + \tilde{\pi}^*\omega^{(\alpha)}A) \\ =&A^{-1}\mathrm{d}A \wedge A^{-1}\mathrm{d}A + A^{-1}\mathrm{d}A \wedge A^{-1}(\tilde{\pi}^*\omega^{(\alpha)})A \\ &+ A^{-1}\tilde{\pi}^*\omega^{(\alpha)}A \wedge A^{-1}\mathrm{d}A + A^{-1} \cdot (\tilde{\pi}^*(\omega^{(\alpha)}) \wedge \omega^{(\alpha)}) \cdot A, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}\theta + \theta \wedge \theta)|_{U_\alpha} &= A^{-1} \cdot \tilde{\pi}^*(\mathrm{d}\omega^{(\alpha)} + \omega^{(\alpha)} \wedge \omega^{(\alpha)}) \cdot A \\ &= A^{-1} \cdot \tilde{\pi}^*(\Omega^{(\alpha)}) \cdot A = \Theta|_{U_\alpha}. \end{aligned}$$

证毕.

从定义式 (5.4) 不难知道下面的命题成立：

命题 5.2 在切标架丛 $F(M)$ 上关于联络 θ 的曲率形式 Θ 有下列性质：

(1) 对于任意的 $g \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ 有

$$R_g^*\Theta = \mathrm{Ad}(g^{-1}) \cdot \Theta,$$

其中 Ad 是李群 $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ 的伴随表示；

(2) Θ 是水平的，即对于 $F(M)$ 上在任意一点处的两个切向量 X, Y 都有

$$\Theta(X, Y) = \Theta(X^{\mathrm{h}}, Y^{\mathrm{h}}),$$

其中 $X^{\mathrm{h}}, Y^{\mathrm{h}}$ 表示 X, Y 的水平分量. 特别是当 X 是铅垂切向量时, 对于任意的切向量 Y 有

$$\Theta(X,Y) = -\Theta(Y,X) = 0.$$

证明　Θ 的水平性质 (2) 是其定义的直接推论. 关于 (1), 取 $g \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$, 则

$$\begin{aligned} R_g^*\Theta|_{U_\alpha} &= R_g^*(A^{-1}\cdot\tilde{\pi}^*(\Omega^{(\alpha)})\cdot A) \\ &= (A\cdot g)^{-1}\cdot R_g^*(\tilde{\pi}^*(\Omega^{(\alpha)}))\cdot(A\cdot g) \\ &= g^{-1}\cdot(A^{-1}\cdot R_g^*(\tilde{\pi}^*(\Omega^{(\alpha)}))\cdot A)\cdot g \\ &= g^{-1}\cdot(A^{-1}\cdot(\tilde{\pi}\circ R_g)^*(\Omega^{(\alpha)})\cdot A)\cdot g \\ &= g^{-1}\cdot(A^{-1}\cdot\tilde{\pi}^*(\Omega^{(\alpha)})\cdot A)\cdot g \\ &= g^{-1}\cdot\Theta|_{U_\alpha}\cdot g = \mathrm{Ad}(g^{-1})\cdot\Theta|_{U_\alpha}. \end{aligned}$$

证毕.

10.5.2　主丛上的曲率形式

命题 5.2 所表述的两个性质十分重要, 我们把它们移植到一般的主丛上去.

定义 5.1　设 H 是主丛 (B,M,π,G) 上的一个联络, V 是一个向量空间, $\rho: G\to \mathrm{GL}(V)$ 是李群 G 在 V 上的线性表示. 设 φ 是定义在 B 上、取值在 V 中的 r 次外微分式, 如果 φ 满足下面两个条件:

(1) 对于任意的 $g\in G$ 有

$$R_g^*\varphi = \rho(g^{-1})\cdot\varphi;$$

(2) φ 是水平的, 即对于丛空间 B 上的任意 r 个光滑切向量场 $X_1,\cdots,X_r$ 有

$$\varphi(X_1,\cdots,X_r) = \varphi(X_1^{\mathrm{h}},\cdots,X_r^{\mathrm{h}}),$$

其中 X_i^{h} 表示切向量场 X_i 的水平分量, 则称 φ 是 B 上的 r 次 (ρ, V) **型张量形式**.

命题 5.3　设 H 是主丛 (B,M,π,G) 上的一个联络, ω 是它的联络形式. 命 $\Omega = \mathrm{d}\omega\circ h$, 即对于 B 上的任意两个光滑切向量场 X, Y,

$$\Omega(X,Y) = \mathrm{d}\omega(X^{\mathrm{h}},Y^{\mathrm{h}}), \tag{5.10}$$

其中 $X^{\mathrm{h}}, Y^{\mathrm{h}}$ 分别表示 X, Y 的水平分量, 则 Ω 是 B 上的 2 次 $(\mathrm{Ad},\mathfrak{g})$ 型张量形式, 称为联络 H 的 **曲率形式**.

证明　由定义式 (5.10) 得知 Ω 是水平的, 因此只要证明 $R_g^*\Omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})\cdot\Omega$, $\forall g\in G$. 事实上由定理 4.3 的 (2) 知道, 联络形式 ω 满足

$$R_g^*\omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})\cdot\omega, \quad \forall g\in G.$$

因此

$$R_g^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(R_g^*\omega) = \mathrm{d}(\mathrm{Ad}(g^{-1})\cdot\omega) = \mathrm{Ad}(g^{-1})\cdot\mathrm{d}\omega.$$

所以根据联络 H 的定义, 对于 B 上的任意两个光滑切向量场 X, Y 有

$$\begin{aligned} (R_g^*(\Omega))(X,Y) &= \Omega((R_g)_*X,(R_g)_*Y) \\ &= \mathrm{d}\omega(((R_g)_*X)^{\mathrm{h}},((R_g)_*Y)^{\mathrm{h}}) \\ &= \mathrm{d}\omega((R_g)_*X^{\mathrm{h}},(R_g)_*Y^{\mathrm{h}}) = R_g^*(\mathrm{d}\omega)(X^{\mathrm{h}},Y^{\mathrm{h}}) \\ &= \mathrm{Ad}(g^{-1})\cdot\mathrm{d}\omega(X^{\mathrm{h}},Y^{\mathrm{h}}) \\ &= \mathrm{Ad}(g^{-1})\cdot\Omega(X,Y). \end{aligned}$$

命题得证.

为表达方便起见, 对于定义在光滑流形 M 上、在李代数 $\mathfrak{g}$ 中取值的外微分形式, 引进一种复合运算如下: 在李代数 $\mathfrak{g}$ 中取定一个基底 $\{E_\lambda\}$, 则定义在光滑流形 M 上、在李代数 $\mathfrak{g}$ 中取值的 r 次外微分式 φ 和 s 次外微分式 ψ 分别可以表示为

$$\varphi = \varphi^\lambda E_\lambda, \qquad \psi = \psi^\mu E_\mu, \tag{5.11}$$

其中 $\varphi^\lambda \in A^r(M)$, $\psi^\mu \in A^s(M)$. 命

$$[\varphi \wedge \psi] = \varphi^\lambda \wedge \psi^\mu [E_\lambda, E_\mu], \tag{5.12}$$

这里的 $[\ ,\ ]$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的乘法, 则容易验证上式与李代数 $\mathfrak{g}$ 的基底的取法无关. 我们把 $[\varphi \wedge \psi]$ 称为 $\mathfrak{g}$ 值外微分式 φ 和 ψ 的 **外积**.

命题 5.4 设 φ 和 ψ 分别是 $\mathfrak{g}$ 值 r 次外微分式和 s 次外微分式, 则对于任意 $r+s$ 个光滑切向量场 $X_1, \cdots, X_{r+s}$ 有

$$\begin{aligned}&[\varphi \wedge \psi](X_1, \cdots, X_{r+s})\\ =&\frac{1}{r!s!}\delta_{1\ \cdots\ r+s}^{i_1 \cdots i_{r+s}}[\varphi(X_{i_1}, \cdots, X_{i_r}), \psi(X_{i_{r+1}}, \cdots, X_{i_{r+s}})]. \end{aligned}\tag{5.13}$$

推论 5.5 设 φ 和 ψ 是两个 $\mathfrak{g}$ 值 1 次外微分式, 则对于任意两个光滑切向量场 X, Y 有

$$\begin{aligned}&[\varphi \wedge \psi](X, Y) = [\varphi(X), \psi(Y)] - [\varphi(Y), \psi(X)],\\ &[\varphi \wedge \varphi](X, Y) = 2[\varphi(X), \varphi(Y)].\end{aligned}\tag{5.14}$$

命题 5.6 $\mathfrak{g}$ 值外微分式的外积遵循下列运算律:

(1) 分配律: $[(\varphi + \psi) \wedge \theta] = [\varphi \wedge \theta] + [\psi \wedge \theta]$;

(2) $[\varphi \wedge \psi] = (-1)^{rs+1}[\psi \wedge \varphi]$, 其中 φ 和 ψ 分别是 $\mathfrak{g}$ 值 r 次外微分式和 s 次外微分式;

(3) 设 φ, ψ 和 θ 分别是 $\mathfrak{g}$ 值 r 次外微分式, s 次外微分式和 t 次外微分式, 则有恒等式

$$(-1)^{rt}[[\varphi \wedge \psi] \wedge \theta] + (-1)^{sr}[[\psi \wedge \theta] \wedge \varphi] + (-1)^{ts}[[\theta \wedge \varphi] \wedge \psi] = 0;$$

(4) 设 φ 和 ψ 分别是 $\mathfrak{g}$ 值 r 次外微分式和 s 次外微分式, 则

$$\mathrm{d}[\varphi \wedge \psi] = [\mathrm{d}\varphi \wedge \psi] + (-1)^r [\varphi \wedge \mathrm{d}\psi].$$

以上两个命题的证明留给读者自己完成.

定理 5.7 设 H 是主丛 (B, M, π, G) 上的一个联络, ω 是它的联络形式, 则它的曲率形式 Ω 满足方程

$$\Omega = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]. \tag{5.15}$$

证明 根据曲率形式 Ω 的定义和 (5.14) 式, 只要证明

$$\mathrm{d}\omega(X^{\mathrm{h}}, Y^{\mathrm{h}}) = \mathrm{d}\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)]. \tag{5.16}$$

为此就下列 3 种情形分别进行验证:

(1) 设 $X, Y \in V_b$, $b \in B$, 则 $X^{\mathrm{h}} = Y^{\mathrm{h}} = 0$, 于是 (5.16) 式左端为零. 由于在 B 上由结构群 G 的右作用诱导的基本向量场在 B 上是处处线性无关的, 因而存在 $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, 使得它们在 B 上产生的基本向量场 $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ 满足 $\tilde{\xi}(b) = X, \tilde{\eta}(b) = Y$, 并且

$$\omega(\tilde{\xi}) = \xi, \qquad \omega(\tilde{\eta}) = \eta.$$

同时, 由外微分的求值公式得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(X, Y) &= \mathrm{d}\omega(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})|_b\\ &= (\tilde{\xi}(\omega(\tilde{\eta})) - \tilde{\eta}(\omega(\tilde{\xi})) - \omega([\tilde{\xi}, \tilde{\eta}]))|_b\\ &= -\omega(\widetilde{[\xi, \eta]})|_b = -[\xi, \eta] = -[\omega(X), \omega(Y)],\end{aligned}$$

即

$$\mathrm{d}\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)] = 0.$$

(2) 设 $X \in V_b$, $Y \in H_b$, $b \in B$, 则 $X^{\mathrm{h}} = 0$, 于是 (5.16) 式左端仍然为零. 另外 $\omega(Y) = 0$, 故 (5.16) 式右端的第 2 项为零, 因此只要证明

$$\mathrm{d}\omega(X, Y) = 0.$$

首先, 存在 $\xi \in \mathfrak{g}$ 使得它在 B 上产生的基本向量场 $\tilde{\xi}$ 满足 $\tilde{\xi}(b) = X$, 并且 $\omega(\tilde{\xi}) = \xi$(常值). 注意到基本向量场 $\tilde{\xi}$ 是单参数变换群 $\varphi_t = R_{\exp(t\xi)}$

在 B 上诱导的切向量场. 将水平切向量 Y 扩充成 B 上的水平切向量场 $\tilde{Y}$, 使得 $\tilde{Y}(b)=Y$, 那么根据 Poisson 括号积的几何意义 (参看参考文献 [3, 第三章, 定理 3.5]) 有

$$[\tilde{\xi},\tilde{Y}]=\lim_{t\to 0}\frac{\tilde{Y}-(R_{\exp(t\xi)})_*\tilde{Y}}{t}.$$

由于 $(R_g)_*$ 把水平切向量场变为水平切向量场 (参看定义 4.1), 所以上式说明 Poisson 括号积 $[\tilde{\xi},\tilde{Y}]$ 是水平切向量场, 因此

$$\mathrm{d}\omega(X,Y)=\mathrm{d}\omega(\tilde{\xi},\tilde{Y})|_b=(\tilde{\xi}(\omega(\tilde{Y}))-\tilde{Y}(\omega(\tilde{\xi}))-\omega([\tilde{\xi},\tilde{Y}]))|_b=0.$$

(3) 设 $X,\ Y\in H_b,\ b\in B$, 则 $X^{\mathrm{h}}=X,\ Y^{\mathrm{h}}=Y,\ \omega(X)=\omega(Y)=0$, 所以

$$\begin{aligned}\Omega(X,Y)&=\mathrm{d}\omega(X^{\mathrm{h}},Y^{\mathrm{h}})=\mathrm{d}\omega(X,Y)\\&=\mathrm{d}\omega(X,Y)+[\omega(X),\omega(Y)].\end{aligned}$$

证毕.

定理 5.8(Bianchi 恒等式)　设 H 是主丛 (B,M,π,G) 上的一个联络, ω 是它的联络形式, Ω 是它的曲率形式, 则

$$\mathrm{d}\Omega=[\Omega\wedge\omega]. \tag{5.17}$$

证明　对 (5.15) 式求外微分, 并且根据命题 5.5 的 (2) 和 (4) 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Omega&=\frac{1}{2}[\mathrm{d}\omega\wedge\omega]-\frac{1}{2}[\omega\wedge\mathrm{d}\omega]=[\mathrm{d}\omega\wedge\omega]\\&=[\Omega\wedge\omega]-\frac{1}{2}[[\omega\wedge\omega]\wedge\omega],\end{aligned}$$

再根据命题 5.5 的 (3) 得到

$$3[[\omega\wedge\omega]\wedge\omega]=[[\omega\wedge\omega]\wedge\omega]+[[\omega\wedge\omega]\wedge\omega]+[[\omega\wedge\omega]\wedge\omega]=0,$$

故 (5.17) 式成立. 证毕.

10.5.3　主丛的示性类

现在, 向量丛的示性类理论可以搬到主丛上来. 首先考虑 $\mathfrak{g}$ 上的对称多重线性函数.

设 $\Phi:\underbrace{\mathfrak{g}\times\cdots\times\mathfrak{g}}_{k\text{ 个}}\to\mathbb{R}$ 是定义在李代数 $\mathfrak{g}$ 上的对称的 k 重线性函数, 若对于任意的 $g\in G,\ \xi_1,\cdots,\xi_k\in\mathfrak{g}$ 有

$$\Phi(\mathrm{Ad}(g)\xi_1,\cdots,\mathrm{Ad}(g)\xi_k)=\Phi(\xi_1,\cdots,\xi_k), \tag{5.18}$$

则称 Φ 是 $\mathrm{Ad}(G)$ 不变的. 将定义在 $\mathfrak{g}$ 上的、 $\mathrm{Ad}(G)$ 不变的对称的 k 重线性函数的全体构成的集合记为 $I^k(G)$, 则 $I^k(G)$ 是一个向量空间. 对于 $\Phi\in I^k(G),\ \Psi\in I^l(G)$ 作对称化乘积 $\Phi\cdot\Psi$, 定义为

$$\begin{aligned}&\Phi\cdot\Psi(\xi_1,\cdots,\xi_{k+l})\\&=\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+l}}\Phi(\xi_{\sigma(1)},\cdots,\xi_{\sigma(k)})\Psi(\xi_{\sigma(k+1)},\cdots,\xi_{\sigma(k+l)}),\end{aligned} \tag{5.19}$$

其中 $\mathfrak{S}_{k+l}$ 是 $k+l$ 个元素的置换群, 则 $\Phi\cdot\Psi\in I^{k+l}(G)$. 将对称化乘积线性扩充到有限项形式直和的空间 $I(G)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}I^k(G)$, 则使 $I(G)$ 成为 $\mathbb{R}$ 上的一个交换代数.

设 $\eta\in\mathfrak{g}$, 命 $g(t)=\exp(t\eta)$, 则对于 $\Phi\in I^k(G)$ 有

$$\Phi(\mathrm{Ad}(g(t))\xi_1,\cdots,\mathrm{Ad}(g(t))\xi_k)=\Phi(\xi_1,\cdots,\xi_k);$$

将上式对于 t 求导得到

$$\sum_{i=1}^{k}\Phi(\xi_1,\cdots,[\xi_i,\eta],\cdots,\xi_k)=0. \tag{5.20}$$

定理 5.9　设 H 是主丛 (B,M,π,G) 上的一个联络, ω 是联络形式, Ω 是曲率形式. 在 $\mathfrak{g}$ 中取定一个基底 $\{\xi_\alpha:1\le\alpha\le r\}$, 并设

$$\omega=\omega^\alpha\xi_\alpha,\quad \Omega=\Omega^\alpha\xi_\alpha.$$

对于 $\Phi \in I^k(G)$, 命

$$\Phi(\Omega) = \Phi(\Omega, \cdots, \Omega) = \Omega^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \Omega^{\alpha_k} \Phi(\xi_{\alpha_1}, \cdots, \xi_{\alpha_k}),$$

则有

(1) $\Phi(\Omega)$ 是在丛空间 B 上在右移动 R_g^* $(g \in G)$ 的作用下不变的、水平的 $2k$ 次闭微分式，因而在底流形 M 上存在一个 $2k$ 次闭微分式 $c(\Phi, H)$ 以 $\Phi(\Omega)$ 为它的水平提升，即 $\Phi(\Omega) = \pi^* c(\Phi, H)$;

(2) 如果 H_0 是主丛 (B, M, π, G) 上的另一个联络， Ω_0 是它的曲率形式，那么在底流形 M 上存在一个 $2k-1$ 次外微分式 ψ 使得 $c(\Phi, H) - c(\Phi, H_0) = \mathrm{d}\psi$, 于是 $c(\Phi, H)$ 的 de Rham 上同调类 $c(\Phi) \in H^{2k}(M, \mathbb{R})$ 与主丛 (B, M, π, G) 上的联络 H 的选取无关，称为主丛 (B, M, π, G) 对应于 $\mathrm{Ad}(G)$ 不变的、对称的 k 重线性函数 Φ 的示性类.

证明 (1) 由于 Ω 是水平的, 故 $\Phi(\Omega)$ 是水平的. 对于任意的 $g \in G$,

$$\begin{aligned} R_g^*(\Phi(\Omega)) &= \Phi(R_g^*\Omega, \cdots, R_g^*\Omega) \\ &= \Phi(\mathrm{Ad}(g^{-1}) \cdot \Omega, \cdots, \mathrm{Ad}(g^{-1}) \cdot \Omega) \\ &= \Phi(\Omega, \cdots, \Omega) = \Phi(\Omega), \end{aligned}$$

故 $\Phi(\Omega)$ 是 R_g^* 不变的. 对 $\Phi(\Omega)$ 求外微分，并且利用 Bianchi 恒等式 (5.17) 和 (5.20) 式得到

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Phi(\Omega) &= \Phi(\mathrm{d}\Omega, \cdots, \Omega) + \cdots + \Phi(\Omega, \cdots, \mathrm{d}\Omega) \\ &= \Phi([\Omega \wedge \omega], \cdots, \Omega) + \cdots + \Phi(\Omega, \cdots, [\Omega \wedge \omega]) \\ &= \Omega^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \Omega^{\alpha_k} \wedge \omega^\beta \cdot (\Phi([\xi_{\alpha_1}, \xi_\beta], \cdots, \xi_{\alpha_k}) \\ &\quad + \cdots + \Phi(\xi_{\alpha_1}, \cdots, [\xi_{\alpha_k}, \xi_\beta])) = 0, \end{aligned}$$

故 $\Phi(\Omega)$ 是闭微分式.

由于 $\Phi(\Omega)$ 是在右移动 R_g^*, $g \in G$ 的作用下不变的、水平的 $2k$ 次微分式, 因而在底流形 M 上存在一个 $2k$ 次微分式 $c(\Phi, H)$ 以 $\Phi(\Omega)$ 为

它的水平提升. 事实上, 对于 M 上 $2k$ 个任意的光滑切向量场 $X_1, \cdots, X_{2k}$, 在丛空间 B 上存在唯一的一组水平切向量场 $\tilde{X}_1, \cdots, \tilde{X}_{2k}$ 使得 $\pi_* \tilde{X}_i = X_i$, 于是对于任意的 $p \in M$, $b \in \pi^{-1}(p)$, 命

$$(c(\Phi, H)(X_1, \cdots, X_{2k}))(p) = (\Phi(\Omega)(\tilde{X}_1, \cdots, \tilde{X}_{2k}))(b), \tag{5.21}$$

上式右端与 b 在 $\pi^{-1}(p)$ 中的取法无关, 因而是完全确定的数值 (请读者自己验证), 并且由右端可知， $c(\Phi, H)(X_1, \cdots, X_{2k})$ 明显地光滑依赖于点 p, 因此 $c(\Phi, H)$ 是 M 上的 $2k$ 次微分式. (5.21) 式能够写成

$$\Phi(\Omega) = \pi^*(c(\Phi, H)).$$

故

$$0 = \mathrm{d}\Phi(\Omega) = \pi^*(\mathrm{d}c(\Phi, H)).$$

因为在每一点 $b \in B$, $\pi_* : H_b \to T_{\pi(b)}M$ 是线性同构, 所以 $\mathrm{d}c(\Phi, H) = 0$, 故 $c(\Phi, H)$ 是 M 上的 $2k$ 次闭微分式.

(2) 设 H_0 是主丛 (B, M, π, G) 上的另一个联络, ω_0 是联络形式, Ω_0 是曲率形式. 命 $\tau = \omega - \omega_0$, 则 τ 是 1 次的 $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{g})$ 型张量形式. 命

$$\omega_t = \omega_0 + t\tau, \tag{5.22}$$

则 ω_t 是主丛 B 上的一族联络, 它的曲率形式是

$$\Omega_t = \mathrm{d}\omega_t + \frac{1}{2}[\omega_t \wedge \omega_t]. \tag{5.23}$$

将 (5.22) 式代入上式得到

$$\Omega_t = \mathrm{d}\omega_0 + t(\mathrm{d}\tau + [\tau \wedge \omega_0]) + \frac{t^2}{2}[\tau \wedge \tau],$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega_t = \mathrm{d}\tau + [\tau \wedge \omega_0] + t[\tau \wedge \tau] = \mathrm{d}\tau + [\tau \wedge \omega_t]. \tag{5.24}$$

很明显,

$$\Phi(\Omega) - \Phi(\Omega_0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(\Omega_t)\mathrm{d}t, \tag{5.25}$$

经过直接计算得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(\Omega_t) &= k\Phi\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega_t, \Omega_t, \cdots, \Omega_t\right) \\
&= k\Phi(\mathrm{d}\tau + [\tau\wedge\omega_t], \Omega_t, \cdots, \Omega_t).
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

命

$$
\psi = k\int_0^1 \Phi(\tau, \Omega_t, \cdots, \Omega_t)\mathrm{d}t, \tag{5.27}
$$

则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\psi =& k\int_0^1 \mathrm{d}(\Phi(\tau, \Omega_t, \cdots, \Omega_t))\mathrm{d}t \\
=& k\int_0^1 (\Phi(\mathrm{d}\tau, \Omega_t, \cdots, \Omega_t) - \Phi(\tau, \mathrm{d}\Omega_t, \cdots, \Omega_t) \\
& - \cdots - \Phi(\tau, \Omega_t, \cdots, \mathrm{d}\Omega_t))\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

由 Bianchi 恒等式和 (5.20) 式得到

$$
\begin{aligned}
&\Phi(\tau, \mathrm{d}\Omega_t, \cdots, \Omega_t) + \cdots + \Phi(\tau, \Omega_t, \cdots, \mathrm{d}\Omega_t) \\
&= \Phi(\tau, [\Omega_t\wedge\omega_t], \cdots, \Omega_t) + \cdots + \Phi(\tau, \Omega_t, \cdots, [\Omega_t\wedge\omega_t]) \\
&= \sum_{i=2}^{k} \tau^{\alpha_1}\wedge\Omega_t^{\alpha_2}\wedge\cdots\wedge(\Omega_t^{\alpha_i}\wedge\omega_t^{\beta})\wedge\cdots \\
&\qquad \wedge\Omega_t^{\alpha_k}\Phi(\xi_{\alpha_1}, \xi_{\alpha_2}, \cdots, [\xi_{\alpha_i}, \xi_{\beta}], \cdots, \xi_{\alpha_k}) \\
&= \tau^{\alpha_1}\wedge\omega_t^{\beta}\wedge\Omega_t^{\alpha_2}\wedge\cdots \\
&\qquad \wedge\Omega_t^{\alpha_k}\sum_{i=2}^{k}\Phi(\xi_{\alpha_1}, \xi_{\alpha_2}, \cdots, [\xi_{\alpha_i}, \xi_{\beta}], \cdots, \xi_{\alpha_k}) \\
&= -\tau^{\alpha_1}\wedge\omega_t^{\beta}\wedge\Omega_t^{\alpha_2}\wedge\cdots\wedge\Omega_t^{\alpha_k}\Phi([\xi_{\alpha_1}, \xi_{\beta}], \xi_{\alpha_2}, \cdots, \xi_{\alpha_k}) \\
&= -\Phi([\tau\wedge\omega_t], \Omega_t, \cdots, \Omega_t).
\end{aligned}
$$

将上式代入 (5.28) 式得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\psi &= k\int_0^1 (\Phi(\mathrm{d}\tau, \Omega_t, \cdots, \Omega_t) + \Phi([\tau\wedge\omega_t], \Omega_t, \cdots, \Omega_t))\mathrm{d}t \\
&= k\int_0^1 \Phi(\mathrm{d}\tau + [\tau\wedge\omega_t], \Omega_t, \cdots, \Omega_t)\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(\Omega_t)\mathrm{d}t = \Phi(\Omega) - \Phi(\Omega_0).
\end{aligned}
$$

证毕.

容易验证，由 $\Phi\in I^k(G)$ 映为 $[\Phi(\Omega)]\in H^{2k}(M,\mathbb{R})$ 给出的映射，是从交换代数 $I(G)$ 到 de Rham 上同调环

$$
H^*(M,\mathbb{R}) = \sum_i H^i(M,\mathbb{R})
$$

的同态，称为 **Weil-Chern 同态**.

在第八章的 §8.7 我们已经介绍过复向量丛的陈示性类. 与秩为 r 的复向量丛 $\pi: E\to M$ 相配的标架丛是结构群为 $\mathrm{GL}(r,\mathbb{C})$ 的主丛. 命 $G=\mathrm{GL}(r,\mathbb{C})$，则本节所说的 G 主丛对应于 $\mathrm{Ad}(G)$ 不变的 k 重线性函数 Φ 的示性类就化为前面的陈示性类. 事实上，与复向量丛 $\pi: E\to M$ 相配的标架丛可以约化为 $\mathrm{U}(r)$ 主丛. 根据 Weyl 的经典群的不变量理论，酉群的不变量是由反 Hermite 矩阵 (酉群的李代数的元素) 的特征值的初等对称多项式生成的，而这些初等对称多项式所对应的示性类就是陈示性类.

§10.6　Yang-Mills 场简介

杨振宁和 Mills 在 20 世纪 50 年代开始研究自然界中弱相互作用的非 Abel 规范理论，即现在所称的 Yang-Mills 规范场论. 到 20 世纪的 70 年代，通过与几何学界的沟通，杨振宁认识到规范场论实际上就是主丛上的联络论. 这种认识大大地推动了微分几何在理论物理学中的应用，并且促进了微分几何本身的发展. 现在，规范场论成为微分几何研究的一个重要的课题，并且是研究低维拓扑学的有力工具. 在本节，我们对 Yang-Mills 场论做一个简单的介绍.

10.6.1 主丛与相配向量丛上联络的曲率形式

定义 6.1 设 (B, M, π, G) 是一个主丛, H 是主丛上的一个联络, V 是一个向量空间, $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 是 G 的一个表示. 由 $\varphi \mapsto \mathrm{d}^{\mathrm{h}}\varphi = \mathrm{d}\varphi \circ h$ 给出的微分算子 $\mathrm{d}^{\mathrm{h}} : A^r(B) \otimes V \to A^{r+1}(B) \otimes V$ 称为主丛 $\pi : B \to M$ 上关于联络 H 的 **外协变微分 (算子)**.

因此, 联络 H 的曲率形式可以写成 $\Omega = \mathrm{d}^{\mathrm{h}}\omega$, 而 Bianchi 恒等式 (5.17) 成为

$$\mathrm{d}^{\mathrm{h}}\Omega = 0. \tag{6.1}$$

在定义 5.1 中已经定义了 (ρ, V) 型 r 次张量形式. 设 $\tilde{\pi} : E = B \times_\rho V \to M$ 是与主丛 $\pi : B \to M$ 相配的向量丛, 则 r 次张量形式的意义在于它可以和向量丛 $\bigwedge^r T^*M \otimes E$ 的截面建立起对应关系, 即有如下的定理:

定理 6.1 设 $r \geq 0$. 对于任意的 $\varphi \in A^r(B) \otimes V$, 如果 φ 是相对于联络 H 的 (ρ, V) 型张量形式, 则存在唯一的一个截面 $\tilde{\varphi} \in \Gamma(\bigwedge^r T^*M \otimes E)$, 使得下面的关系式成立:

$$\phi_b(\varphi_b(X_1, \cdots, X_r)) = (\pi^*\tilde{\varphi})_b(X_1, \cdots, X_r)$$
$$(\forall b \in B, \quad \forall X_1, \cdots, X_r \in T_bB), \tag{6.2}$$

其中的映射 $\phi_b : V \to \tilde{\pi}^{-1}(\pi(b))$ 是由 (3.26) 式定义的线性同构. 反之, 每一个截面 $\tilde{\varphi} \in \Gamma(\bigwedge^r T^*M \otimes E)$ 通过 (6.2) 式唯一地确定一个相对于联络 H 的 (ρ, V) 型张量形式 $\varphi \in A^r(B) \otimes V$.

因此, 主丛 B 上的任意一个相对于联络 H 的 (ρ, V) 型 r 次张量形式 φ 都可以和相应的截面 $\tilde{\varphi} \in \Gamma(\bigwedge^r T^*M \otimes E)$ 等同起来.

证明 设 $\varphi \in A^r(B) \otimes V$ 是相对于联络 H 的 (ρ, V) 型张量形式. 对于任意的 $p \in M$, 以及任意的 $\tilde{X}_1, \cdots, \tilde{X}_r \in T_pM$, 取点 $b \in \pi^{-1}(p)$ 和切向量 $X_1, \cdots, X_r \in T_bB$, 使得 $\pi_*(X_i) = \tilde{X}_i$, $i = 1, \cdots, r$. 令

$$\tilde{\varphi}_p(\tilde{X}_1, \cdots, \tilde{X}_r) = \phi_b(\varphi_b(X_1, \cdots, X_r)). \tag{6.3}$$

则不难看出, 上式右端与点 $b \in \pi^{-1}(p)$ 和切向量 $X_1, \cdots, X_r$ 的取法无关. 事实上, 对于任意的 $b_1 = b \cdot g \in \pi^{-1}(p)$, $g \in G$, 以及 $Y_1, \cdots, Y_r \in T_{b_1}B$, 如果 $\pi_*(Y_i) = \tilde{X}_i$, $1 \leq i \leq r$, 则由于对任意的 $v \in V$, $\phi_{b_1}(v) = [(b \cdot g, v)] = [(b, \rho(g)v)] = \phi_b(\rho(g)v)$, 故有

$$\begin{aligned}\phi_{b_1}(\varphi_{b_1}(Y_1, \cdots, Y_r)) &= \phi_b(\rho(g)\varphi_{b \cdot g}(Y_1^{\mathrm{h}}, \cdots, Y_r^{\mathrm{h}})) \\ &= \phi_b((R_{g^{-1}}^*\varphi_b)(Y_1^{\mathrm{h}}, \cdots, Y_r^{\mathrm{h}})) \\ &= \phi_b(\varphi_b((R_{g^{-1}})_*Y_1^{\mathrm{h}}, \cdots, (R_{g^{-1}})_*Y_r^{\mathrm{h}})).\end{aligned}$$

因为 $\pi_* : H(b) \to T_pM$ 是从 B 在点 b 的水平切空间 $H(b)$ 到 T_pM 上的线性同构, 并且

$$\begin{aligned}\pi_*((R_{g^{-1}})_*Y_i^{\mathrm{h}}) &= (\pi \circ R_{g^{-1}})_*(Y_i^{\mathrm{h}}) = \pi_*(Y_i^{\mathrm{h}}) \\ &= \pi_*(Y_i) = \tilde{X}_i = \pi_*(X_i) = \pi_*(X_i^{\mathrm{h}}), \quad 1 \leq i \leq r,\end{aligned}$$

所以 $(R_{g^{-1}})_*Y_i^{\mathrm{h}} = X_i^{\mathrm{h}}$, $1 \leq i \leq r$. 因此

$$\begin{aligned}\phi_{b_1}(\varphi_{b_1}(Y_1, \cdots, Y_r)) &= \phi_b(\varphi_b((R_{g^{-1}})_*Y_1^{\mathrm{h}}, \cdots, (R_{g^{-1}})_*Y_r^{\mathrm{h}})) \\ &= \phi_b(\varphi_b(X_1^{\mathrm{h}}, \cdots, X_r^{\mathrm{h}})) = \phi_b(\varphi_b(X_1, \cdots, X_r)).\end{aligned}$$

由此可见, $\tilde{\varphi}$ 的定义 (6.3) 是合理的, 并且满足关系式 (6.2). 此外, 由 $\tilde{\varphi}$ 的定义容易知道, 对于任意的光滑截面 $\sigma \in \Gamma(B)$, $\tilde{\varphi} = \phi_\sigma(\sigma^*\varphi)$, 其中对于任意的 $p \in M$, $\phi_{\sigma(p)} : V \to \tilde{\pi}^{-1}(p)$ 是线性同构 (参看 (3.28) 式). 由此可见, $\tilde{\varphi}$ 是光滑的.

定理的其余部分是直接的, 留给读者作为练习. 证毕.

例 6.1 设 $\pi : B \to M$ 是一个 G-主丛, $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 是结构群 G 的伴随表示, 则有主丛 (B, M, π, G) 的伴随向量丛 $\tilde{\pi} : \mathrm{Ad}(B) \to M$. 如果 ω 是主丛 (B, M, π, G) 上的一个联络 H 的联络形式, 则由 ω 所满足的条件 (定理 4.3 中的性质 (2)) 和命题 5.3 易知, 相应的曲率形式 Ω 是 $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{g})$ 型 2 次张量形式, 因而根据定理 6.1, Ω 等同于向量丛 $\bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{Ad}(B)$ 的一个截面, 仍然用 Ω 表示.

于是，主丛 (B, M, π, G) 上任意一个联络的曲率形式都可以看作定义在底流形 M 上、并且在伴随丛 $\mathrm{Ad}(B)$ 中取值的 2 次外微分式．这个结论具有实际意义．在物理学中，主丛的底流形往往表示客观存在的现实空间，而丛空间则是用来描述物理对象状态或性质的状态空间．比如，在用主丛 (B, M, π, G) 描述电磁场这一物理现象时，底流形 M 代表电磁场所分布的空间，主丛的纤维 (或丛空间 B) 则用于描述或"记录"电磁场的性态．另一方面，主丛 B 上的联络形式 ω 在电磁场理论中表示场的"势"(它在局部截面 $\sigma: M \to B$ 下的拉回 $\sigma^*\omega$ 称为"局部规范势")，相应的曲率形式 Ω 则是场的强度即场强．作为电磁场的强度，曲率 Ω 理所当然地在电磁场所分布的空间 M 中的每一点处都应该有定义，而不能只是在状态空间 B 上才有意义．由此可见，把联络形式 Ω 看作在底流形 M 上处处有定义的截面 $\Omega: M \to \bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{Ad}(B)$ 更为自然，也更符合实际．

主丛 (B, M, π, G) 上相对于一个联络 H 的 $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{g})$ 型张量形式又称为相对于 H 的 $\mathrm{Ad}(G)$ 型张量形式．

命题 6.2 设 φ 是主丛 (B, M, π, G) 上相对于联络 H 的 $\mathrm{Ad}(G)$ 型 r 次张量形式，ω 是联络 H 的联络形式，则有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}^{\mathrm{h}}\varphi(X_1, \cdots, X_{r+1}) \\
&= \mathrm{d}\varphi(X_1, \cdots, X_{r+1}) \\
&\quad + \sum_{a=1}^{r+1}(-1)^{a+1}[\omega(X_a), \varphi(X_1, \cdots, \widehat{X_a}, \\
&\quad \cdots, X_{r+1})], \quad \forall X_1, \cdots, X_{r+1} \in \mathfrak{X}(B).
\end{aligned} \tag{6.4}
$$

证明 只需要说明 (6.4) 式在任意一点 $p \in B$ 处成立即可．因此，可以设 $X_1, \cdots, X_{r+1} \in T_bB$．依照定理 5.7 的证明方法，把切向量 $X_1, \cdots, X_{r+1}$ 分别取为铅垂切向量和水平切向量．首先，根据外协变微分 d^{h} 和联络形式 ω 的定义，当 $X_1, \cdots, X_{r+1}$ 全部是水平切向量时，(6.4) 式显然成立．其次，如果在 $X_1, \cdots, X_{r+1}$ 中至少有两个是铅垂切向量，则 (6.4) 式的左端为零，并且右端的和式也为零，所以只要证明 $\mathrm{d}\varphi(X_1, \cdots, X_{r+1}) = 0$．将水平切向量扩充成水平切向量场，而把铅垂切向量场扩充成 B 上的基本向量场，但是两个基本向量场的 Poisson 括号积仍然是基本向量场，因而是铅垂切向量场，所以

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\varphi(X_1, \cdots, X_{r+1}) \\
&= \sum_{a=1}^{r+1}(-1)^{a+1}X_a(\varphi(X_1, \cdots, \widehat{X_a}, \cdots, X_{r+1})) \\
&\quad + \sum_{a<b}(-1)^{a+b}\varphi([X_a, X_b], X_1, \cdots, \widehat{X_a}, \cdots, \widehat{X_b}, \cdots, X_{r+1}) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

理由是上式中每个 φ 的各个自变量至少含有一个基本向量场，故它们的值全部为零，于是 (6.4) 式也是成立的．

下面只需要考虑 $X_1, \cdots, X_{r+1}$ 中只有一个是铅垂切向量，其余全是水平切向量的情形．不失一般性，设 $v = X_{r+1}$ 是铅垂切向量，$X_1, \cdots, X_r$ 都是水平切向量．在这种情况下，(6.4) 式的左端等于零；为证明其右端也是零，需要把 $X_1, \cdots, X_r$ 扩充为 B 上的右不变水平切向量场，仍用 $X_1, \cdots, X_r$ 表示．具体做法如下：先把 M 在点 p 的切向量 $\pi_*(X_1), \cdots, \pi_*(X_r)$ 扩充为 M 上的光滑切向量场 $\tilde{X}_1, \cdots, \tilde{X}_r$；再令 $X_1, \cdots, X_r$ 是 $\tilde{X}_1, \cdots, \tilde{X}_r$ 的水平提升即可．设 $g_t = \exp(t\omega(v))$ 是由 $\omega(v)$ 在 G 中所生成的单参数子群，X 是 g_t 在 B 上生成的铅垂切向量场，即对于任意的 $b' \in B$，

$$
X_{b'} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(b' \cdot g_t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} R_{g_t}(b'),
$$

则由参考文献 [3] 中第三章的定理 3.5 以及水平切向量场 X_α 的右不变性得到

$$
[X, X_\alpha]_b = \lim_{t \to 0} \frac{(X_\alpha)_b - (R_{g_t})_*((X_\alpha)_{b \cdot g_{-t}})}{t} = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq r;
$$

于是在点 p 有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\varphi(X_1,\cdots,X_{r+1})+\sum_{\alpha=1}^{r+1}(-1)^{\alpha+1}\left[\omega(X_\alpha),\varphi\left(X_1,\cdots,\widehat{X_\alpha},\cdots,X_{r+1}\right)\right]\\
&=\sum_{\alpha=1}^{r}(-1)^{\alpha+1}X_\alpha\left(\varphi\left(X_1,\cdots,\widehat{X_\alpha},\cdots,X_r,X\right)\right)\\
&\quad+(-1)^r v\left(\varphi(X_1,\cdots,X_r)\right)\\
&\quad+\sum_{1\le\alpha<\beta\le r}(-1)^{\alpha+\beta}\varphi\left([X_\alpha,X_\beta],X_1,\cdots,\widehat{X_\alpha},\cdots,\widehat{X_\beta},\cdots,X_r,v\right)\\
&\quad-\sum_{\alpha=1}^{r}(-1)^{\alpha+r}\varphi\left([X_\alpha,X],X_1,\cdots,\widehat{X_\alpha},\cdots,X_r\right)\\
&\quad+(-1)^r[\omega(v),\varphi(X_1,\cdots,X_r)]\\
&=(-1)^r v(\varphi(X_1,\cdots,X_r))+(-1)^r[\omega(v),\varphi(X_1,\cdots,X_r)].
\end{aligned}\tag{6.5}$$

另一方面，由于 φ 是 $\mathrm{Ad}(G)$ 型 r 次张量形式，根据参考文献 [3] 中第六章的定理 4.6,

$$\begin{aligned}
&[\omega(v),\varphi(X_1,\cdots,X_r)]\\
&=\mathrm{ad}(\omega(v))(\varphi(X_1,\cdots,X_r))\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}(\mathrm{Ad}(g_t)\cdot(\varphi(X_1,\cdots,X_r)))\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\left(R^*_{g_{-t}}(\varphi_{b\cdot g_{-t}})(X_1,\cdots,X_r)\right)\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\varphi_{b\cdot g_{-t}}((R_{g_{-t}})_*(X_1),\cdots,(R_{g_{-t}})_*(X_r))\big|_{t=0}\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\varphi_{b\cdot g_{-t}}((X_1)|_{b\cdot g_{-t}},\cdots,(X_r)|_{b\cdot g_{-t}})\big|_{t=0}\\
&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\varphi_{b\cdot g_t}((X_1)|_{b\cdot g_t},\cdots,(X_r)|_{b\cdot g_t})\big|_{t=0}\\
&=-v(\varphi(X_1,\cdots,X_r)),
\end{aligned}$$

其中倒数第三个等号利用了切向量场 $X_1,\cdots,X_r$ 的右不变性．把上式代入 (6.5) 式便得知，(6.4) 式的右端也是零．证毕.

注记 6.1　联络形式 ω 不是 $\mathrm{Ad}(G)$ 型 1 次张量形式，所以 (6.4) 式不适用于 ω. 实际上，由 (5.16) 式得到

$$\mathrm{d}^{\mathrm{h}}\omega(X,Y)=\mathrm{d}\omega(X,Y)+[\omega(X),\omega(Y)],$$

与 (6.4) 式不相符.

采用类似的方法可以证明如下更一般的外协变微分算子的求值公式 (证明留作练习):

命题 6.3　设 $\rho:G\to\mathrm{GL}(V)$ 是主丛 (B,M,π,G) 的结构群 G 在向量空间 V 上的线性表示，φ 是 (B,M,π,G) 上相对于联络 H 的 (ρ,V) 型 r 次张量形式，ω 是联络 H 的联络形式，则有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}^{\mathrm{h}}\varphi(X_1,\cdots,X_{r+1})\\
&=\mathrm{d}\varphi(X_1,\cdots,X_{r+1})\\
&\quad+\sum_{\alpha=1}^{r+1}(-1)^{\alpha+1}\rho_*(\omega(X_\alpha))(\varphi(X_1,\cdots,\widehat{X_\alpha},\\
&\quad\cdots,X_{r+1})),\quad\forall X_1,\cdots,X_{r+1}\in\mathfrak{X}(B),
\end{aligned}\tag{6.6}$$

其中 $\rho_*:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ 是从结构群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 到线性变换群 $\mathrm{GL}(V)$ 的李代数 $\mathfrak{gl}(V)$ 的李代数同态.

设 D 是主丛 $\pi:B\to M$ 上的联络 H 在相配的向量丛 $\tilde{\pi}:E\to M$ 上的诱导联络，$\{e_\alpha\}$ 是 E 的局部截面，则对于任意的 $\varphi\in\Gamma(\bigwedge^r T^*M\otimes E)$，有

$$\varphi=\varphi^\alpha e_\alpha,\quad\varphi^\alpha\in A^r(M).\tag{6.7}$$

根据定理 6.1，向量丛 $\bigwedge^r T^*M\otimes E$ 的每一个截面均等同于主丛 B 上的一个相对于联络 H 的 (ρ,V) 型 r 次张量形式．因此，$\Gamma(\bigwedge^r T^*M\otimes E)$ 可以视为 $A^r(B)\otimes V$ 的子空间．于是有包含映射 $\mathrm{i}:\Gamma(\bigwedge^r T^*M\otimes E)\to A^r(B)\otimes V$.

命题 6.4　设 $\varphi\in\Gamma(\bigwedge^r T^*M\otimes E)$ 具有表达式 (6.7)．如果把外协变微分算子 d^{h} 看作从 $\Gamma(\bigwedge^r T^*M\otimes E)$ 到 $\Gamma(\bigwedge^{r+1}(M)\otimes E)$ 的映射，

则有如下的计算公式:

$$d^h\varphi = d\varphi^\alpha e_\alpha + (-1)^r\varphi^\alpha \wedge De_\alpha. \tag{6.8}$$

证明 (6.8) 式的右端显然与局部标架场 $\{e_\alpha\}$ 的取法无关. 设 $\{\delta_\alpha\}$ 是向量空间 V 的基底, ω 是主丛联络 H 的联络形式, 令 $\rho_*(\omega)(\delta_\alpha) = \omega_\alpha^\beta\delta_\beta$. 对于主丛 $\pi: B\to M$ 的任意局部截面 $\sigma: U\to B$, 令 $e_\alpha(p) = \phi_{\sigma(p)}(\delta_\alpha)$, 则 $\{e_\alpha\}$ 是向量丛 $\tilde\pi: E\to M$ 在 U 上的一个局部标架场, 并且由命题 4.8, $De_\alpha = (\sigma^*\omega_\alpha^\beta)e_\beta$. 另一方面, 由定理 6.1 可得 $\varphi = \phi_\sigma(\sigma^*(i(\varphi)))$, 其中 $i(\varphi)\in A^r(B)\otimes V$ 是 φ 所对应的 (ρ, V) 型 r 次张量形式. 于是

$$\sigma^*(i(\varphi)) = \phi_\sigma^{-1}\varphi = \varphi^\alpha\phi_\sigma^{-1}(e_\alpha) = \varphi^\alpha\delta_\alpha. \tag{6.9}$$

由命题 6.3, 对于任意的 $X_1,\cdot,X_{r+1}\in\mathfrak{X}(B)$, 有

$$\begin{aligned}
\sigma^*\left(d^h(i\varphi)\right)(X_1,\cdots,X_{r+1}) &= d^h(i\varphi)(\sigma_*(X_1),\cdots,\sigma_*(X_{r+1}))\\
&= d(i\varphi)(\sigma_*(X_1),\cdots,\sigma_*(X_{r+1}))\\
&\quad + \sum_a(-1)^{a+1}\rho_*(\omega(\sigma_*(X_a)))((i\varphi)(\sigma_*(X_1),\\
&\qquad\qquad \cdots,\widehat{\sigma_*(X_a)},\cdots,\sigma_*(X_{r+1})))\\
&= \sigma^*(d(i\varphi))(X_1,\cdots,X_{r+1})\\
&\quad + \sum_a(-1)^{a+1}\rho_*(\sigma^*\omega(X_a))\left(\sigma^*(i\varphi)\left(X_1,\cdots,\widehat{X_a},\cdots,X_{r+1}\right)\right)\\
&= d(\sigma^*(i\varphi))(X_1,\cdots,X_{r+1})\\
&\quad + \sum_a(-1)^{a+1}\rho_*(\sigma^*\omega(X_a))\left(\varphi^\alpha\left(X_1,\cdots,\widehat{X_a},\cdots,X_{r+1}\right)\delta_\alpha\right)\\
&= d(\varphi^\alpha\delta_\alpha)(X_1,\cdots,X_{r+1})\\
&\quad + \sum_a(-1)^{a+1}\varphi^\alpha\left(X_1,\cdots,\widehat{X_a},\cdots,X_{r+1}\right)\sigma^*\omega_\alpha^\beta(X_a)\delta_\beta\\
&= (d\varphi^\alpha\delta_\alpha)(X_1,\cdots,X_{r+1})\\
&\quad + \sum_a(-1)^{a+1}\sigma^*\omega_\alpha^\beta(X_a)\varphi^\alpha\left(X_1,\cdots,\widehat{X_a},\cdots,X_{r+1}\right)\delta_\beta
\end{aligned}$$

$$= (d\varphi^\alpha\delta_\alpha\sigma^*\omega_\alpha^\beta\wedge\varphi^\alpha\delta_\beta)(X_1,\cdots,X_{r+1}).$$

因此

$$\sigma^*(d^h(i\varphi)) = d\varphi^\alpha\delta_\alpha + \sigma^*\omega_\alpha^\beta\wedge\varphi^\alpha\delta_\beta.$$

于是根据定理 6.1

$$\begin{aligned}
d^h\varphi &= \phi_\sigma(\sigma^*(d^h(i\varphi)))\\
&= d\varphi^\alpha\phi_\sigma(\delta_\alpha) + (-1)^r\varphi^\alpha\wedge\sigma^*\omega_\alpha^\beta\phi_\sigma(\delta_\alpha)\\
&= d\varphi^\alpha e_\alpha + (-1)^r\varphi^\alpha\wedge\sigma^*\omega_\alpha^\beta e_\beta\\
&= d\varphi^\alpha e_\alpha + (-1)^r\varphi^\alpha\wedge De_\alpha.
\end{aligned}$$

证毕.

下面的定理给出了主丛联络的曲率和相配向量丛上诱导联络的曲率之间的关系.

定理 6.5 设 (B,M,π,G) 是光滑流形 M 上的主丛, V 是 q 维向量空间, $\rho: G\to GL(V)$ 是结构群 G 在 V 上的线性表示. 如果 H 是主丛 (B,M,π,G) 上的联络, D 是 H 在相配向量丛 $\tilde\pi: E = B\times_\rho V\to M$ 上的诱导联络, Ω 和 $\tilde\Omega$ 分别是联络 H 和诱导联络 D 的曲率形式, 则对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ 和任意的 $\xi\in\Gamma(E)$, 有

$$(\tilde\Omega(X,Y)\xi)|_p = \phi_b\left(\rho_*(\Omega(\overline{X},\overline{Y}))f_\xi(b)\right),\quad b\in\pi^{-1}(p);\quad \forall p\in M, \tag{6.10}$$

其中 $\phi_b: V\to\tilde\pi^{-1}(p)$ 是由 (3.26) 式定义的线性同构, f_ξ 是截面 ξ 在 B 上对应的 (ρ, V) 型 0 次张量形式 (参看 (6.2) 式), 即对于任意的 $b\in B$, $f_\xi(b) = \phi_b^{-1}(\xi(\pi(b)))$; $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 分别是 X 和 Y 在点 b 处的水平提升.

证明 对于任意的点 $p\in M$, 设 $\gamma(t)$ 是在 M 上满足条件 $\gamma(0) = p$, $\gamma'(t) = Y_{\gamma(t)}$ 的光滑曲线, 它在任意点 $b\in\pi^{-1}(p)$ 的水平提升记为 $\tilde\gamma(t)$, $b = \tilde\gamma(0)$. 则 $\xi(\gamma(t)) = [(\tilde\gamma(t), f_\xi(\tilde\gamma(t)))]$, 因而由联络 D 的定义式 (4.40),

$$(D_Y\xi)_p = \phi_b\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(f_\xi(\tilde\gamma(t)))\right) = \phi_b(\overline{Y}_b(f_\xi)).$$

由点 $p\in M$ 和 $b\in\pi^{-1}(p)$ 的任意性，又有

$$\mathrm{D}_X\mathrm{D}_Y\xi=\phi_b(\overline{X}(\overline{Y}f_\xi)).$$

根据参考文献 [3] 中第三章的定理 2.6,

$$\pi_*([\overline{X},\overline{Y}]^{\mathrm{h}})=\pi_*([\overline{X},\overline{Y}])=[X,Y]=\pi_*(\overline{[X,Y]}).$$

因为 π_* 是从水平切空间 H_b 到 $T_{\pi(b)}M$ 的线性同构，所以 $\overline{[X,Y]}=[\overline{X},\overline{Y}]^{\mathrm{h}}$. 于是

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}(X,Y)\xi=&\phi_b((\overline{X}\circ\overline{Y}-\overline{Y}\circ\overline{X}-\overline{[X,Y]})f_\xi)\\=&\phi_b(([\overline{X},\overline{Y}]-[\overline{X},\overline{Y}]^{\mathrm{h}})f_\xi)\\=&\phi_b([\overline{X},\overline{Y}]^{\mathrm{v}}f_\xi).\end{aligned}\tag{6.11}$$

另一方面，设 ω 是联络 H 的曲率形式，则对于任意的 $b\in B$ 和任意的 $\tilde{X}\in T_bB$, 有 $\omega(\tilde{X})\in\mathfrak{g}$, 并且

$$\tilde{X}^{\mathrm{v}}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}b\cdot\exp(t\omega(\tilde{X})).$$

因为 f_ξ 是 (ρ,V) 型 0 次张量形式，所以对于任意的 $g\in G$, $f_\xi(b\cdot g)=\rho(g^{-1})f_\xi(b)$, 故有

$$\begin{aligned}\tilde{X}^{\mathrm{v}}(f_\xi)=&\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\Big(f_\xi(b\cdot\exp(t\omega(\tilde{X})))\Big)\\=&\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\Big(\rho(\exp(-t\omega(\tilde{X})))f_\xi(b)\Big)\\=&-\rho_*(\omega(\tilde{X}))f_\xi(b).\end{aligned}$$

所以，(6.11) 式可以写为

$$\tilde{\Omega}(X,Y)\xi=-\phi_b(\rho_*(\omega([\overline{X},\overline{Y}]))f_\xi(b)).$$

但是，由 (5.16) 式,

$$\begin{aligned}\Omega(\overline{X},\overline{Y})=&\mathrm{d}\omega(\overline{X},\overline{Y})+[\omega(\overline{X}),\omega(\overline{Y})]\\=&\overline{X}(\omega(\overline{Y}))-\overline{Y}(\omega(\overline{X}))-\omega([\overline{X},\overline{Y}])\\=&-\omega([\overline{X},\overline{Y}]),\end{aligned}$$

故上式成为

$$\tilde{\Omega}(X,Y)\xi=\phi_b(\rho_*(\Omega(\overline{X},\overline{Y}))f_\xi(b)).$$

证毕.

在很多情况下，需要对主丛上的张量形式求协变导数或协变微分．此时需要 M 上具有给定的联络.

设 (M,D^0) 是仿射联络空间， $\tilde{\pi}:E=B\times_\rho V\to M$ 是和主丛 (B,M,π,G) 相配的向量丛， H 是主丛 (B,M,π,G) 上的联络，它在向量丛 E 上的诱导联络记为 D. 对于任意的 $\varphi\in\Gamma(\bigwedge^r T^*M\otimes E)$, 即 φ 是主丛 (B,M,π,G) 上相对于联络 H 的 (ρ,V) 型 r 次张量形式， φ 沿切向量场 $X\in\mathfrak{X}(M)$ 的协变导数 $\mathrm{D}_X\varphi$ 定义如下：

$$\begin{aligned}&(\mathrm{D}_X\varphi)(X_1,\cdots,X_r)\\&=\mathrm{D}_X(\varphi(X_1,\cdots,X_r))-\sum_{\alpha=1}^r\varphi(X_1,\cdots,\mathrm{D}^0_XX_\alpha,\cdots,X_r).\end{aligned}\tag{6.12}$$

易知， $\mathrm{D}_X\varphi\in\Gamma(\bigwedge^r T^*M\otimes E)$.

设 $\{e_i\}$ 是底流形 M 上的局部切标架场，和它对偶的余切标架场记为 $\{\omega^i\}$, 则 φ 的协变微分是 $\mathrm{D}\varphi=\mathrm{D}_{e_i}\varphi\otimes\omega^i$, 因而 $\mathrm{D}\varphi\in\Gamma(\bigwedge^r T^*M\otimes T^*M\otimes E)$. 假设 φ 和 $\mathrm{D}_{e_j}\varphi$ 的局部表示分别是

$$\varphi=\frac{1}{r!}\varphi_{i_1\cdots i_r}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r},\quad\varphi_{i_1\cdots i_r}\in\Gamma(E),\tag{6.13}$$

$$\mathrm{D}_{e_j}\varphi=\frac{1}{r!}\varphi_{i_1\cdots i_r,j}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r},\tag{6.14}$$

则有

$$\varphi_{i_1\cdots i_r,j}=\mathrm{D}_{e_j}\varphi_{i_1\cdots i_r}-\sum_\alpha\varphi_{i_1\cdots i_{\alpha-1}k\,i_{\alpha+1}\cdots i_r}\Gamma^k_{i_\alpha j},\tag{6.15}$$

其中的局部光滑函数 Γ_{ij}^i 是联络 D^0 关于标架场 $\{e_i\}$ 的联络系数.

命题 6.6(Ricci 恒等式) 设联络 D^0 是无挠联络，$\varphi \in \Gamma(\bigwedge^r T^*M \otimes E)$. 如果 φ 具有局部表示 (6.13), 并且设

$$D^2\varphi = \frac{1}{r!}\varphi_{i_1\cdots i_r,jk}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}\otimes\omega^j\otimes\omega^k, \tag{6.16}$$

则有如下的指标交换公式

$$\begin{aligned}\varphi_{i_1\cdots i_r,jk} &= \varphi_{i_1\cdots i_r,kj} - \phi_b\left(\rho_*\left(\Omega(\overline{e_j},\overline{e_k})\right)\phi_b^{-1}(\varphi_{i_1\cdots i_r})\right)\\ &\quad + \sum_\alpha \varphi_{i_1\cdots i_{\alpha-1}l\, i_{\alpha+1}\cdots i_r}R^l_{i_\alpha jk},\end{aligned} \tag{6.17}$$

其中 $\overline{e_i}$ 是切向量 e_i 在点 $b\in B$ 的水平提升，R^l_{ijk} 是底流形 M 上联络 D^0 的曲率张量.

证明 按照求协变导数的定义式 (6.12) 直接计算得

$$\begin{aligned}\varphi_{i_1\cdots i_r,jk} &= (D^2\varphi)(e_{i_1},\cdots,e_{i_r},e_j,e_k)\\ &= D_{e_k}D_{e_j}\varphi_{i_1\cdots i_r} - \sum_{\alpha=1}^r D_{e_k}\left(\varphi\left(e_{i_1},\cdots,D^0_{e_j}e_{i_\alpha},\cdots,e_{i_r}\right)\right)\\ &\quad - \sum_{\beta=1}^r D_{e_j}\left(\varphi\left(e_{i_1},\cdots,D^0_{e_k}e_{i_\beta},\cdots,e_{i_r}\right)\right)\\ &\quad + \sum_{\alpha<\beta}\varphi\left(e_{i_1},\cdots,D^0_{e_j}e_{i_\alpha},\cdots,D^0_{e_k}e_{i_\beta},\cdots,e_{i_r}\right)\\ &\quad + \sum_{\beta=1}^r \varphi\left(e_{i_1},\cdots,D^0_{e_j}D^0_{e_k}e_{i_\beta},\cdots,e_{i_r}\right)\\ &\quad + \sum_{\alpha>\beta}\varphi\left(e_{i_1},\cdots,D^0_{e_k}e_{i_\beta},\cdots,D^0_{e_j}e_{i_\alpha},\cdots,e_{i_r}\right)\\ &\quad - \left(D_{D^0_{e_k}e_j}(\varphi(e_{i_1},\cdots,e_{i_r}))\right)\\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^r \varphi\left(e_{i_1},\cdots,D^0_{D^0_{e_k}e_j}e_{i_\alpha},\cdots,e_{i_r}\right).\end{aligned}$$

于是由定理 6.5 得到

$$\begin{aligned}&\varphi_{i_1\cdots i_r,jk} - \varphi_{i_1\cdots i_r,kj}\\ &= \left(D_{e_k}D_{e_j} - D_{e_j}D_{e_k} - D_{[e_k,e_j]}\right)\varphi_{i_1\cdots i_r}\\ &\quad + \sum_{\beta=1}^r \varphi\left(e_{i_1},\cdots,\left(D^0_{e_j}D^0_{e_k} - D^0_{e_k}D^0_{e_j} - D^0_{[e_j,e_k]}\right)e_{i_\beta},\cdots,e_{i_r}\right)\\ &= -\tilde{\Omega}(e_j,e_k)\varphi_{i_1\cdots i_r} + \sum_{\alpha=1}^r \varphi\left(e_{i_1},\cdots,R(e_j,e_k)e_{i_\alpha},\cdots,e_{i_r}\right)\\ &= -\phi_b\left(\rho_*(\Omega(\overline{e_j},\overline{e_k}))\phi_b^{-1}(\varphi_{i_1\cdots i_r})\right)\\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^r \varphi\left(e_{i_1},\cdots,R(e_j,e_k)e_{i_\alpha},\cdots,e_{i_r}\right).\end{aligned}$$

证毕.

推论 6.7 假设同命题 6.6. 如果

$$\tilde{\pi}: \mathrm{Ad}(B)\to B$$

是主丛 (B,M,π,G) 的伴随向量丛，则 Ricci 恒等式 (6.17) 化为

$$\begin{aligned}\varphi_{i_1\cdots i_r,jk} &= \varphi_{i_1\cdots i_r,kj} - \phi_b\left([\Omega(\overline{e_j},\overline{e_k}),\phi_b^{-1}(\varphi_{i_1\cdots i_r})]\right)\\ &\quad + \sum_\alpha \varphi_{i_1\cdots i_{\alpha-1}l\, i_{\alpha+1}\cdots i_r}R^l_{i_\alpha jk}.\end{aligned} \tag{6.18}$$

此外，如果把 Ω 看作 $\bigwedge^2 T^*M\otimes \mathrm{Ad}(B)$ 的截面，因而可设

$$\Omega = \frac{1}{2}\Omega_{ij}\omega^i\wedge\omega^j,\quad \Omega_{ij}\in\Gamma(\mathrm{Ad}(B)), \tag{6.19}$$

则 Ricci 恒等式 (6.18) 可以写成

$$\begin{aligned}\varphi_{i_1\cdots i_r,jk} &= \varphi_{i_1\cdots i_r,kj} - ([\Omega_{jk},\varphi_{i_1\cdots i_r}])\\ &\quad + \sum_\alpha \varphi_{i_1\cdots i_{\alpha-1}l\, i_{\alpha+1}\cdots i_r}R^l_{i_\alpha jk},\end{aligned} \tag{6.20}$$

其中 $[\cdot,\cdot]$ 是在伴随丛 $\mathrm{Ad}(b)$ 的纤维上诱导的李氏括号积.

10.6.2 Yang-Mills 场

在物理学的有关文献中，主丛上的联络称为 **规范势**; 相应的曲率称为 **规范场**. 下面对规范场理论中的 Yang-Mills 场作一个简要的介绍.

设 (B, M, π, G) 是紧致黎曼流形 (M, g) 上的主纤维丛，$\tilde{\pi}: \mathrm{Ad}(B) \to M$ 是它的伴随丛，$\mathfrak{g}$ 是结构群 G 的李代数. 在 $\mathfrak{g}$ 上取定一个 $\mathrm{Ad}(G)$-不变内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$, 则有向量丛 $\bigwedge^r T^*M \otimes \mathrm{Ad}(B) (r \geq 0)$ 上的黎曼结构 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, 使得对于任意的 $p \in M$ 以及任意的 $\alpha, \beta \in \bigwedge^r(T_p^*M) \otimes \tilde{\pi}^{-1}(p)$,

$$\langle\alpha,\beta\rangle_p = \frac{1}{r!}\sum_{i_1,\cdots,i_r}\langle\phi_b^{-1}(\alpha(e_{i_1},\cdots,e_{i_r})), \phi_b^{-1}(\beta(e_{i_1},\cdots,e_{i_r}))\rangle_{\mathfrak{g}}, \tag{6.21}$$

其中 $\{e_i\}$ 是 M 上的单位正交标架场，$b \in \pi^{-1}(p)$. 事实上，由于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ 是 $\mathrm{Ad}(G)$ 不变的，(6.21) 式右端与 $b \in \pi^{-1}(p)$ 的取法无关. 于是，对于任意的 $\varphi, \psi \in \Gamma(\bigwedge^r T^*M \otimes \mathrm{Ad}(B))$, 它们的 (整体) 内积可以定义如下：

$$(\varphi, \psi) = \int_M \langle\varphi, \psi\rangle \mathrm{d}V_M. \tag{6.22}$$

同时，如果令 $\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi)$, 则有 $\|\varphi\|^2 \in C^\infty(M)$.

现设 $\mathcal{C}(B)$ 是由主丛 $\pi: B \to M$ 上的所有联络构成的空间，$H \in \mathcal{C}(B)$, Ω 是联络 H 的曲率形式，则 Ω 是主丛 (B, M, π, G) 上的 $\mathrm{Ad}(G)$ 型 2 次张量形式，因而可以视为向量丛 $\bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{Ad}(B)$ 的光滑截面. 定义 $\mathcal{J}(H) = \frac{1}{2}\|\Omega\|^2$, 则由 $H \mapsto \mathcal{J}(H)$ 确定了一个映射 $\mathcal{J}: \mathcal{C}(B) \to \mathbb{R}$, 称为 **Yang-Mills 泛函**.

给定 $H \in \mathcal{C}(B)$, 并设映射 $\Phi: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{C}(B)$ $(\varepsilon > 0)$ 给出了主丛 $\pi: B \to M$ 上依赖参数 t 的一族联络 $H_t = \Phi(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. 对于任意的 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, 用 ω_t 表示联络 H_t 的联络形式. 则由 $(b, t) \mapsto \omega_t(b)$ 定义了一个映射 $\tilde{\Phi}: B \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to T^*B \otimes \mathfrak{g}$.

定义 6.2 如果映射 $\Phi: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{C}(B)$ 满足下列条件，则称 Φ 是联络 H 的一个光滑变分：

(1) $H_0 = \Phi(0) = H$;

(2) $\eta = \left.\dfrac{\partial\omega_t}{\partial t}\right|_{t=0}$ 是主丛 (B, π, M, G) 上的 $\mathrm{Ad}(G)$ 型 1 次张量形式，即 $\eta \in \Gamma(T^*M \otimes \mathrm{Ad}(B))$;

(3) 由 Φ 给出的映射 $\tilde{\Phi}: B \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to T^*B \otimes \mathfrak{g}$ 是光滑映射.

定义 6.3 对于给定的联络 $H \in \mathcal{C}(B)$, 如果对于 H 的任意一个光滑变分 $\Phi: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{C}(B)$ 都有 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathcal{J}(\Phi(t)) = 0$, 即 H 是 Yang-Mills 泛函 $\mathcal{J}$ 的临界点，则称 H 是主丛 $\pi: B \to M$ 上的 **Yang-Mills 联络**; 此时，H 的曲率 (形式) 称为黎曼流形 (M, g) 上的一个 **Yang-Mills 场**. 另外，Yang-Mills 泛函 $\mathcal{J}$ 所对应的 Euler-Laglange 方程 (即 Yang-Mills 场所满足的方程) 叫做 **Yang-Mills 方程**.

定理 6.8 主丛 $\pi: B \to M$ 上的联络 H 是 Yang-Mills 联络当且仅当它的曲率形式 Ω 满足 $\mathrm{d}^{h*}\Omega = 0$, 这里 d^{h*} 是外协变微分算子 d^h 关于内积 $(\cdot,\cdot)$ 的共轭算子.

证明 设 $\Phi: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{C}(B)$ 是联络 H 的任意一个光滑变分，ω_t 和 Ω_t $(t \in (-\varepsilon, \varepsilon))$ 分别是联络 $H_t = \Phi(t)$ 的联络形式和曲率形式，$H_0 = H$, $\omega_0 = \omega$, $\eta = \left.\dfrac{\partial\omega_t}{\partial t}\right|_{t=0}$. 取定李代数 $\mathfrak{g}$ 的基底 $\{E_\lambda\}$, 并且令

$$\omega_t = \omega_t^\lambda E_\lambda, \quad \Omega_t = \Omega_t^\lambda E_\lambda, \quad \eta = \eta^\lambda E_\lambda,$$

则 $\omega^\lambda, \eta^\lambda \in A^1(B)$, $\Omega^\lambda \in A^2(B)$. 利用 (5.24) 式有

$$\left.\frac{\partial\Omega_t^\lambda}{\partial t}\right|_{t=0} = \mathrm{d}\eta^\lambda + C_{\mu\nu}^\lambda \eta^\mu \wedge \omega^\nu,$$

或

$$\left.\frac{\partial\Omega_t}{\partial t}\right|_{t=0} = \mathrm{d}\eta + [\eta \wedge \omega],$$

从而由命题 6.2 以及 (5.14) 式得到

$$\left.\frac{\partial\Omega_t}{\partial t}\right|_{t=0} = \mathrm{d}^{\mathrm{h}}\eta.$$

再利用 Yang-Mills 泛函和内积 $(\cdot,\cdot)$ 的定义易知

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathcal{J}(\Phi(t)) = \left(\Omega, \left.\frac{\partial\Omega_t}{\partial t}\right|_{t=0}\right) = (\Omega, \mathrm{d}^{\mathrm{h}}\eta) = (\mathrm{d}^{\mathrm{h}*}\Omega, \eta). \tag{6.23}$$

由变分 Φ 的任意性，上式应该对于任意的 $\mathrm{Ad}(G)$ 型 1 次张量形式 η 成立，因此 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathcal{J}(\Phi(t)) = 0$ 当且仅当 $\mathrm{d}^{\mathrm{h}*}\Omega = 0$. 定理证毕.

(6.23) 式是 **Yang-Mills 泛函的第一变分公式**，因此 $\mathrm{d}^{\mathrm{h}*}\Omega = 0$ 是 Yang-Mills 方程.

把 $\Gamma(\bigwedge^r T^*M \otimes \mathrm{Ad}(B))$ 和 B 上由 $\mathrm{Ad}(G)$ 型 r 次张量形式构成的集合等同起来，并且定义

$$\Delta = \mathrm{d}^{\mathrm{h}} \circ \mathrm{d}^{\mathrm{h}*} + \mathrm{d}^{\mathrm{h}*} \circ \mathrm{d}^{\mathrm{h}},$$

则 Δ 称为作用在光滑截面空间 $\Gamma(\bigwedge^r T^*M \otimes \mathrm{Ad}(B))$ 上的 **Hodge-Laplace 算子**. 对于任意的 $\varphi \in \Gamma(\bigwedge^r T^*M \otimes \mathrm{Ad}(B))$，如果 $\Delta\varphi \equiv 0$，则称 φ 是调和的. 根据 Bianchi 恒等式 (6.1)，定理 6.8 有如下的推论：

推论 6.9 主丛 $\pi: B \to M$ 上的联络 H 是 Yang-Mills 联络，当且仅当它的曲率形式 Ω 是向量丛 $\bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{Ad}(B)$ 的调和截面.

证明 利用等式 $(\Delta\Omega, \Omega) = (\mathrm{d}^{\mathrm{h}}\Omega, \mathrm{d}^{\mathrm{h}}\Omega) + (\mathrm{d}^{\mathrm{h}*}\Omega, \mathrm{d}^{\mathrm{h}*}\Omega)$.

为了方便应用，需要给出共轭算子 $\mathrm{d}^{\mathrm{h}*}$ 的局部表示.

设 $\{e_\lambda\}$ 是伴随向量丛 $\mathrm{Ad}(B)$ 的局部标架场. 对于任意的 $\varphi \in \Gamma(\bigwedge^r T^*M) \otimes \mathrm{Ad}(B)$，它可以表示为

$$\varphi = \varphi^\lambda e_\lambda; \quad \varphi^\lambda \in A^r(M).$$

因此可以定义 Hodge 星算子

$$*: \Gamma\left(\bigwedge^r T^*M \otimes \mathrm{Ad}(B)\right) \to \Gamma\left(\bigwedge^{m-r} T^*M \otimes \mathrm{Ad}(B)\right),$$

其中 $m = \dim M$，使得

$$*\varphi = (*\varphi^\alpha)e_\alpha, \tag{6.24}$$

上式右端的星算子 $*: A^r(M) \to A^{m-r}(M)$ 由第二章 (5.24) 式定义. 不难知道，(6.24) 式的右端与局部标架场 $\{e_\lambda\}$ 的取法无关. 证毕.

命题 6.10 外协变微分算子 d^{h} 关于内积 $(\cdot,\cdot)$ 的共轭算子 $\mathrm{d}^{\mathrm{h}*}$ 具有如下的局部表示：

$$\mathrm{d}^{\mathrm{h}*}\varphi = (-1)^{rm+1} * \circ\, \mathrm{d}^{\mathrm{h}} \circ *. \tag{6.25}$$

证明 对于任意的 $\varphi, \eta \in \Gamma(\bigwedge^r T^*M \otimes \mathrm{Ad}(B))$，$\eta \in \Gamma(\bigwedge^s T^*M \otimes \mathrm{Ad}(B))$，设

$$\varphi = \varphi^\lambda e_\lambda, \quad \eta = \eta^\mu e_\mu,$$

其中 $\varphi^\lambda \in A^r(M)$，$\eta_\mu \in A^s(M)$. 定义

$$(\varphi \wedge \eta)_p = \varphi^\lambda_p \wedge \eta^\mu_p \langle e_\lambda, e_\mu \rangle_p, \quad \forall p \in M, \tag{6.26}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 上的不变内积在纤维 $\tilde{\pi}^{-1}(p)$ 上的诱导内积 (参看 §10.4 的注记 4.1). 显然，(6.26) 式的右端与局部标架场 $\{e_\lambda\}$ 的取法无关. 因此，我们可以取 $\mathfrak{g}$ 的一个单位正交基底 $\{E_\lambda\}$，并且令 $e_\lambda(p) = \phi_{\sigma(p)}(E_\lambda)$ $(\forall p)$，则 $\{e_\lambda\}$ 是伴随向量丛 $\mathrm{Ad}(B)$ 的单位正交标架场. 此时 (6.26) 式化为

$$\varphi \wedge \eta = \sum_\lambda \varphi^\lambda \wedge \eta^\lambda. \tag{6.27}$$

现在设 $s = r + 1$，即 $\eta \in \Gamma(\bigwedge^{r+1} T^*M \otimes \mathrm{Ad}(B))$，则由命题 4.8，命题 4.9 和第二章的命题 5.6，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\varphi \wedge * \eta) &= \mathrm{d}\left(\sum_\lambda \varphi^\lambda \wedge *\eta^\lambda\right) \\ &= \sum_\lambda (\mathrm{d}\varphi^\lambda \wedge *\eta^\lambda + (-1)^r \varphi^\lambda \wedge \mathrm{d} * \eta^\lambda)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_\lambda (\mathrm{d}^{\mathrm{h}}\varphi)^\lambda \wedge (*\eta)^\lambda + (-1)^r \sum_\lambda \varphi^\lambda \wedge (\mathrm{d}^{\mathrm{h}} * \eta)^\lambda \\
&= \sum_\lambda (\mathrm{d}^{\mathrm{h}}\varphi)^\lambda \wedge *\eta^\lambda - \sum_\lambda \varphi^\lambda \wedge *((-1)^{rm+1} * \mathrm{d}^{\mathrm{h}} * \eta)^\lambda \\
&= \sum_\lambda \langle (\mathrm{d}^{\mathrm{h}}\varphi)^\lambda, \eta^\lambda \rangle \mathrm{d}V_M - \sum_\lambda \langle \varphi^\lambda, ((-1)^{rm+1} * \mathrm{d}^{\mathrm{h}} * \eta)^\lambda \rangle \mathrm{d}V_M \\
&= \sum_\lambda \langle (\mathrm{d}^{\mathrm{h}}\varphi)^\lambda, \eta^\lambda \rangle \mathrm{d}V_M - \sum_\lambda \langle \varphi^\lambda, ((-1)^{rm+1} * \mathrm{d}^{\mathrm{h}} * \eta)^\lambda \rangle \mathrm{d}V_M \\
&= \langle \mathrm{d}^{\mathrm{h}}\varphi, \eta \rangle \mathrm{d}V_M - \langle \varphi, (-1)^{rm+1} * \mathrm{d}^{\mathrm{h}} * \eta \rangle \mathrm{d}V_M.
\end{aligned}
$$

两边在 M 上积分并利用 Stokes 定理得

$$(\varphi, \mathrm{d}^{\mathrm{h}*}\eta) = (\mathrm{d}^{\mathrm{h}}\varphi, \eta) = (\varphi, (-1)^{rm+1} * \mathrm{d}^{\mathrm{h}} * \eta).$$

由 φ, η 的任意性得知 $\mathrm{d}^{\mathrm{h}*} = (-1)^{rm+1} * \circ \mathrm{d}^{\mathrm{h}} \circ *$. 证毕.

例 6.2　设 $(S^3, S^2, \pi, \mathrm{U}(1))$ 是例 3.3 给出的 U(1)-主丛. 李群 U(1) 的李代数 $\mathfrak{u}(1)$ 是由纯虚数构成的一维实向量空间 $\sqrt{-1}\mathbb{R}$. 把 $\mathbb{R}^4$ 等同于 $\mathbb{C}^2$, 则有

$$S^3 = \left\{ (z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2;\ |z^1|^2 + |z^2|^2 = 1 \right\}.$$

对于任意的 $z = (z^1, z^2) \in S^3$, 令 $\omega(z) = \sqrt{-1}\,\mathrm{Im}(\overline{z^1}\mathrm{d}z^1 + \overline{z^2}\mathrm{d}z^2)$. 可以直接验证 (参看本章习题第 19 题), ω 是主丛 $\pi : S^3 \to S^2$ 上的一个联络 H 的联络形式; H 称为主丛 $\pi : S^3 \to S^2$ 上的**自然联络**. 取 S^2 的一个局部坐标系 $(U; \varphi, \theta)$, 其中

$$U = \{(\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi);\ 0 < \varphi < \pi,\ 0 < \theta < 2\pi\}.$$

定义主丛 $(S^3, S^2, \pi, \mathrm{U}(1))$ 的局部截面 $\sigma : U \to S^3$, 使得

$$\sigma(\varphi, \theta) = \left(\cos\frac{1}{2}\varphi, 0, \sin\frac{1}{2}\varphi\cos\theta, -\sin\frac{1}{2}\varphi\sin\theta \right).$$

则有 (证明留作练习)

$$\sigma^*\omega = -\frac{1}{2}\sqrt{-1}(1 - \cos\varphi)\mathrm{d}\theta, \quad \sigma^*\Omega = -\frac{1}{2}\sqrt{-1}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}\theta.$$

注意到群 U(1) 的伴随表示 $\mathrm{Ad} : \mathrm{U}(1) \to \mathfrak{u}(1)$ 是平凡表示, 即对于任意的 $g \in \mathrm{U}(1)$, $\mathrm{Ad}(g)$ 是 $\mathfrak{u}(1)$ 上的恒同映射, 因而由命题 6.10 易知 $\mathrm{d}^{\mathrm{h}*}\Omega = 0$. 所以自然联络 H 是主丛 $\pi : S^3 \to S^2$ 上的 Yang-Mills 联络. 此外, 根据 Bianchi 恒等式 (参看 (6.1) 式), $\mathrm{d}^{\mathrm{h}}\Omega = 0$.

在物理文献中, 主丛 $\pi : S^3 \to S^2$ 上的自然联络 H 被用于描述磁单极所产生的物理场, 称为场的 "向量势", 该物理场的强度由 Ω 来刻画. 此时所对应的场方程就是 $\mathrm{d}^{\mathrm{h}}\Omega = 0$, $\mathrm{d}^{\mathrm{h}*}\Omega = 0$.

作为本节的结束, 引入 Yang-Mills 场的稳定性及相关概念.

定义 6.4　主丛 $\pi : B \to M$ 上的 Yang-Mills 联络 H 称为 **(弱) 稳定的**, 如果对于它的任意一个光滑变分 $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{C}(B)$, 都有

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathcal{J}(\Phi(t))\right|_{t=0} \geq 0.$$

此时, 联络 H 的曲率 (形式) 称为 (弱) **稳定的 Yang-Mills 场**. 如果对于 M 上的每一个主纤维丛 $\pi : B \to M$, 在 B 上均不存在非平坦的弱稳定 Yang-Mills 联络, 则称 M 是 **Yang-Mills 不稳定的黎曼流形**.

习　题　十

1. 设 $\pi : E \to M$ 是秩为 r 的向量丛. 对于任意的 $p \in M$, 用 F_p 表示向量空间 $\pi^{-1}(p)$ 的全部基底构成的集合. 令 $F(E) = \bigcup_{p \in M} F_p$. 证明 F 上存在拓扑结构和光滑结构, 使得对于每一个 α, 由 (2.10) 式定义的映射 $\varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathrm{GL}(r) \to \tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$ 是光滑同胚, 并且自然投影 $\tilde{\pi}$ 是光滑映射.

2. 证明定理 3.1.

3. 设 M 是 m 维光滑流形. 对于任意的点 $p \in M$, 令

$$
\begin{aligned}
F_p(M) &= \{M \text{ 在点 } p \text{ 处的全体切标架}\}, \\
F_p^*(M) &= \{M \text{ 在点 } p \text{ 处的全体余切标架}\}.
\end{aligned}
$$

定义

$$F(M) = \bigcup_{p\in M} F_p(M), \quad F^*(M) = \bigcup_{p\in M} F_p^*(M).$$

由一般向量丛的标架丛的定义，$F(M)$ 和 $F^*(M)$ 分别是切丛 TM 和余切丛 T^*M 的标架丛. 直接证明：$F(M)$ 和 $F^*(M)$ 分别与 TM 和 T^*M 共享一个转移函数，因而是与 TM 和 T^*M 相配的主纤维丛. $F(M)$ 和 $F^*(M)$ 分别称为光滑流形 M 的 **切标架丛** 和 **余切标架丛**.

4. 设 M 是 m 维黎曼流形，$\mathrm{O}(m,\mathbb{R})$ 是 m 阶正交群. 对于任意的点 $p\in M$，令

$$O_p(M) = \{M \text{ 在点 } p \text{ 处的全体单位正交切标架}\},$$

定义 $O(M) = \bigcup_{p\in M} O_p(M)$. 证明：$O(M)$ 是 M 上的 $\mathrm{O}(m,\mathbb{R})$-主丛，称为 **黎曼流形M的正交标架丛**.

5. 设 M 是 m 维有向光滑流形，$\mathrm{GL}_0(m,\mathbb{R})$ 是一般线性群 $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ 的单位元连通分支. 对于任意的点 $p\in M$，令

$$F_p^0(M) = \{M \text{ 在点 } p \text{ 处的全体与定向相符的切标架}\}.$$

定义 $F^0(M) = \bigcup_{p\in M} F_p^0(M)$. 证明：$F^0(M)$ 是 M 上的 $\mathrm{GL}_0(m,\mathbb{R})$-主丛.

6. 设 M 是 m 维有向黎曼流形，$\mathrm{SO}(m,\mathbb{R})$ 是 m 阶特殊正交群. 对于任意的点 $p\in M$，令

$$SO_p(M) = \{M \text{ 在点 } p \text{ 处与定向相符的单位正交切标架}\},$$

定义 $SO(M) = \bigcup_{p\in M} SO_p(M)$. 证明：$SO(M)$ 是 M 上的 $\mathrm{SO}(m,\mathbb{R})$-主丛.

7. 设 (B,M,π,G) 是光滑流形 M 上的一个 G-主丛，$\mathfrak{g}$ 是结构群 G 的李代数. 对于 $\tilde{X}\in\mathfrak{X}(B)$，如果存在 $X\in\mathfrak{g}$，使得

$$\tilde{X}_b = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(b\cdot\exp tX), \quad \forall b\in B,$$

则称 $\tilde{X}$ 是丛空间 B 上对应于 $X\in\mathfrak{g}$ 的 **基本向量场**，并且记为 X^*. 用 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 表示在丛空间 B 上的基本向量场所构成的集合. 证明：$\tilde{\mathfrak{g}}$ 关于光滑切向量场的 Poisson 括号积构成一个李代数，并且由 $X\mapsto\varpi(X)=X^*$ 给出的映射 $\varpi:\mathfrak{g}\to\tilde{\mathfrak{g}}$ 是李代数同构.

8. 设 $\pi: S^n\to\mathbb{R}P^n$ 是单位球面 S^n 到实射影空间 $\mathbb{R}P^n$ 的自然投影. 证明：$(S^n,\mathbb{R}P^n,\pi,\mathbb{Z}_2)$ 是一个主丛，其中的结构群 $\mathbb{Z}_2=\{1,-1\}$. 主丛 $(S^n,\mathbb{R}P^n,\pi,\mathbb{Z}_2)$ 称为 **实 Hopf 丛**.

9. 设 M 是 m 维光滑流形. 证明：M 是可定向的，当且仅当 M 的切标架丛 $F(M)$ 的结构群 $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ 可以约化为它的单位元连通分支 $\mathrm{GL}_0(m,\mathbb{R})$.

10. 设 M 是 m 维光滑流形. 证明：M 上具有黎曼度量的充分必要条件是，M 的切标架丛 $F(M)$ 的结构群 $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ 可以约化为 m 阶正交群 $\mathrm{O}(m,\mathbb{R})$.

11. 设 M 是可定向的 m 维光滑流形. 证明：M 上具有黎曼度量的充分必要条件是，M 的切标架丛 $F(M)$ 的结构群 $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ 可以约化为 m 阶特殊正交群 $\mathrm{SO}(m,\mathbb{R})$.

12. 证明推论 3.6.

13. 设 $(S^n,\mathbb{R}P^n,\pi,\mathbb{Z}_2)$ 是第 8 题中的 $\mathbb{Z}_2$-主丛. 试在这一个主丛上定义一个联络 H，并且说明 H 是该主丛上唯一的一个联络.

14. 设 M 是连通的光滑流形，$\pi:\tilde{M}\to M$ 是 M 的通用覆叠映射，$\pi_1(M)$ 是 M 的基本群，它可以看作离散的李子群 (即具有零维光滑流形结构). 证明：$(\tilde{M},M,\pi,\pi_1(M))$ 是 $\pi_1(M)$-主丛. 试问：第 13 题中的结论是否可以推广到主丛 $(\tilde{M},M,\pi,\pi_1(M))$ 上？

15. 设 M 是光滑流形，G 是李群，$\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数，

$$\pi: M\times G\to G$$

是从平凡主丛 $M\times G$ 到 G 上的自然投影. 如果 $\bar{\omega}$ 是在李代数 $\mathfrak{g}$ 中取值的 **Maurer-Cartan 形式**，即 $\bar{\omega}$ 是 G 上满足下列条件的 $\mathfrak{g}$-值 1 形

式:

$$\tilde{\omega}_g(v) = (L_{g^{-1}})_*(v), \quad \forall v \in T_gG;\ \forall g \in G.$$

证明:

(1) $\omega = \pi^*\tilde{\omega}$ 是主丛 $M \times G$ 上的一个联络 H 的联络形式.

(2) 对于任意的 $(p,g) \in M \times G$, 联络 H 在点 (p,g) 的水平切空间是 $H_{(p,g)} = T_{(p,g)}M_g$, 其中 $M_g = \{(q,g);\ \forall q \in M\} = M \times \{g\}$.

(3) 联络 H 的曲率形式是 $\Omega = 0$. 联络 H 称为平凡主丛 $M \times G$ 上的 **典型平坦联络**.

16. 设 K 是李群 G 的一个闭 (李) 子群, $\pi : G \to G/K$ 是例 3.1 中的 K-主丛, $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{k}$ 分别是 G 和 K 的李代数, $\tilde{\omega}$ 是 G 上 Maurer-Cartan 形式 (参看本章习题第 15 题). 如果存在 $\mathfrak{g}$ 的 $\mathrm{Ad}(K)$-不变子空间 $\mathfrak{m}$, 使得 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$, 令 $\pi^{\mathfrak{k}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{k}$ 是自然投影, 证明:

(1) $\omega = \pi^{\mathfrak{k}} \circ \tilde{\omega}$ 是主丛 $\pi : G \to G/K$ 上的一个联络 H 的联络形式.

(2) ω 是左不变的, 即对于任意的 $g \in G$, $L_g^*\omega = \omega$.

(3) 如果把 $\mathfrak{g}$ 视为 G 上的所有左不变向量场构成的李代数, 则联络 H 的曲率形式是

$$\Omega = -\pi^{\mathfrak{k}}([X,Y]), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

第 16 题的结论可以用于黎曼对称空间.

17. 设 K 是李群 G 的李子群, $(\tilde{P}, M, \tilde{\pi}, K)$ 是主丛 (P, M, π, G) 的一个约化丛, 相应的主丛同态是包含映射 $\tilde{P} \subset P$. 又设 $\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{g}$ 分别是李群 K 和 G 的李代数, ω 是主丛 $\pi : P \to M$ 上的联络 H 的联络形式. 证明: 如果存在 $\mathfrak{g}$ 的 $\mathrm{Ad}(K)$-不变子空间 $\mathfrak{m}$, 使得 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$, $\pi^{\mathfrak{k}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{k}$ 是相应的自然投影, 则 $\tilde{\omega} = \pi^{\mathfrak{k}} \circ \omega|_{\tilde{P}}$ 是主丛 $\tilde{\pi} : \tilde{P} \to M$ 上的一个联络的联络形式.

18. 证明: 如果 $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ 是自然投影 (参看第一章习题第 6 题的 (2)), 则 $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ 是 $\mathbb{C}P^n$ 上的主丛, 它的结构群是 $\mathrm{U}(1)$. 特别地, 当 $n = 1$ 时, 相应的主丛 $\pi : S^3 \to \mathbb{C}P^1 = S^2$ 就是例 3.3 中定义的 $\mathrm{U}(1)$-主丛, 称为 S^3 的 **Hopf 纤维化** 或 **复 Hopf 丛**.

19. 设 $\pi : S^3 \to \mathbb{C}P^1 = S^2$ 是复 Hopf 丛 (参看本章习题第 18 题), $e = 1$ 是 $\mathrm{U}(1)$ 的单位元素. 对于任意的 $z = (z^1, z^2) \in S^3$, 令

$$\omega_z = \sqrt{-1}\,\mathrm{Im}(\bar{z}^1 \mathrm{d}z^1 + \bar{z}^2 \mathrm{d}z^2).$$

证明:

(1) 如果把 $\mathrm{U}(1)$ 的李代数 $\mathfrak{u}(1)$ 等同于 $T_e\mathrm{U}(1)$, 则 $\mathfrak{u}(1) = \sqrt{-1}\,\mathbb{R}$.

(2) 在 (1) 的意义下, ω 是主丛 $\pi : S^3 \to S^2$ 上的一个联络 H 的联络形式. 联络 H 称为 **复 Hopf 丛上的自然联络**.

20. 设 (P, G, M, π) 是主丛, V 是向量空间, $\tilde{\pi} : E = P \times_\rho V \to M$ 是与 (P, G, M, π) 相配的向量丛, 其中 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 是李群 G 在 V 上的表示. 证明: 在 $\tilde{\pi} : E \to M$ 的纤维上可以引入线性结构, 使得对于任意的 $p \in M$ 和任意的 $b \in \pi^{-1}(p)$, 由 $v \mapsto \phi_b(v) = [(b, v)]$ 确定的映射 $\phi_b : V \to \tilde{\pi}^{-1}(p)$ 都是线性同构.

21. 设 (P, M, π, G) 是主丛, V 是向量空间, $\tilde{\pi} : E = P \times_\rho V \to M$ 是一个与 (P, M, π, G) 相配的向量丛, 其中 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 是李群 G 在 V 上的表示. 证明: 如果 $\pi_1 : F(E) \to M$ 是向量丛 E 的标架丛, 则存在从 (P, M, π, G) 到标架丛 $F(E)$ 的主丛同态 $\Phi : P \to F(P \times_\rho V)$. 因此, 对于任意的 $b \in P$, $\Phi(b)$ 都可以看作是向量丛 $E = P \times_\rho V$ 在点 $p = \pi(b)$ 的纤维 $\tilde{\pi}^{-1}(p)$ 的基.

22. 设 K 是李群 G 的闭子群, $\pi : P \to M$ 是光滑流形 M 上的 G-主丛. 作为结构群 G 的子群, K 自然地右作用在丛空间 P 上, 相应的轨道空间 (即群作用的商空间) 记为 P/K, 设 $\pi_1 : P \to P/K$ 是自然投影.

(1) 群 G 自然地左作用在光滑流形 G/K 上, 因而有相配丛 $\tilde{\pi} : B = P \times_G (G/K) \to M$. 对于任意的 $(u, gK) \in P \times (G/K) (g \in G)$, 令 $\Phi([(u, gK)]) = \pi_1(ug)$. 证明: $\Phi([(u, gK)])$ 的定义与代表元 (u, gK) 的取法无关, 因而映射 $\Phi : B \to P/K$ 是完全有定义的; 由此进一步证

明： $\Phi: B \to P/K$ 是光滑同胚. 因此， B 可以和 P/K 等同起来.

(2) 定义自然投影 $\tilde{\pi}_1 = \Phi^{-1} \circ \pi_1 : P \to B$, 证明：$(P, B, \tilde{\pi}_1, K)$ 是一个 K-主丛；由此进而说明 $\pi_1 : P \to P/K$ 是与 $(P, B, \tilde{\pi}_1, K)$ 同构的 K-主丛.

(3) 证明：主丛 $\pi : P \to M$ 的结构群 G 可以约化为李子群 K 的充分必要条件是，相配丛 $\tilde{\pi} : B \to M$ 具有整体定义的截面.

23. 设 $\Phi : (P, M, \pi, G) \to (\tilde{P}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \tilde{G})$ 是主丛同态， $\phi : G \to \tilde{G}$ 是相应的李群同态， $\Phi^\flat : M \to \tilde{M}$ 是由 Φ 诱导的光滑映射.

(1) 设 H 是主丛 (P, M, π, G) 上的联络. 证明：如果诱导映射 $\Phi^\flat : M \to \tilde{M}$ 是光滑同胚，则在主丛 $(\tilde{P}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \tilde{G})$ 上存在唯一的一个联络 $\tilde{H}$, 使得切映射 Φ_* 把联络 H 的任意一个水平切向量映射为联络 $\tilde{H}$ 的水平切向量.

(2) 在 (1) 的条件下证明：联络 H 和 $\tilde{H}$ 的联络形式 $\omega, \tilde{\omega}$ 以及它们的曲率形式 $\Omega, \tilde{\Omega}$ 满足如下的关系式：

$$\phi_* \cdot \omega = \Phi^* \tilde{\omega}, \quad \phi_* \cdot \Omega = \Phi^* \tilde{\Omega},$$

这里 $\phi_* : \mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ 是诱导的李代数同态.

24. 设 H 是主丛 (P, M, π, G) 上的联络. 证明： H 是平坦联络的充分必要条件，是对于任意的点 $p \in M$, 存在点 p 的开邻域 $U \subset M$, 使得 H 在限制丛 $P|_U = \pi^{-1}(U)$ 上的诱导联络和平凡丛 $U \times G$ 上的典型平坦联络 $\tilde{H}$ 同构 (参看本章习题第 15 题), 即存在主丛同构 $\psi : U \times G \to B|_U$, 使得

$$\psi_*(\tilde{H}_{(p',g)}) = H_{\psi(p',g)}, \quad \forall (p', g) \in U \times G.$$

25. 设 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是 n 维单位球面，具有自然诱导的定向；由它的全体与其定向相符的单位正交标架所构成的主丛记为 $SO(S^n)$. 令

$$G = \mathrm{SO}(n+1), \quad K = \mathrm{SO}(n) \times \mathrm{SO}(1) \subset \mathrm{SO}(n+1),$$

定义李代数 $\mathfrak{g}$ 的子空间

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \xi^t \\ -\xi & 0 \end{pmatrix} ; \ \xi \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

证明：

(1) $\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 $\mathrm{Ad}(K)$-不变子空间，且有 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$, 从而由本章习题第 16 题可以得到主丛 $\pi : \mathrm{SO}(n+1) \to S^n$ 上的一个联络.

(2) 存在从 $\pi : G \to G/K$ 到 $SO(S^n)$ 上的主丛同构

$$\Phi : G \to SO(S^n),$$

使得相应的光滑映射 $\Phi^\flat : G/K \to S^n$ 就是第九章例 4.2 中的等同映射

$$\varphi : \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n) \times \mathrm{SO}(1) \to S^n.$$

(3) 如果主丛 $\pi : G \to G/K$ 上存在平坦联络，则 S^n 是可平行的，即 S^n 上存在大范围定义的光滑标架场.

26. 证明命题 5.4.

27. 证明命题 5.6.

28. 设 G 是 r 维李群， $\mathfrak{g} = T_eG$ 是由李群 G 上的左不变向量场定义的李代数， ω 是定义在 G 上、并且在 $\mathfrak{g}$ 中取值的左不变微分式 (Maurer-Cartan 微分式). 证明：

$$\mathrm{d}\omega = -\frac{1}{2}[\omega \wedge \omega].$$

29. 设 ω 和 Ω 分别是复 Hopf 丛 $(S^3, S^2, \pi, \mathrm{U}(1))$ 上的自然联络 (参看本章习题第 19 题) 的联络形式和曲率形式. 取 S^2 的一个局部坐标系 $(U; \varphi, \theta)$, 其中

$$U = \{(\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi);\ 0 < \varphi < \pi,\ 0 < \theta < 2\pi\}.$$

定义复 Hopf 丛 $(S^3, S^2, \pi, \mathrm{U}(1))$ 的局部截面 $\sigma_1, \sigma_2 : U \to S^3$, 使得

$$(z^1, z^2) = \sigma_1(\varphi, \theta) = \left(\cos\frac{1}{2}\varphi, \sin\frac{1}{2}\varphi\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\frac{1}{2}\varphi\sin\theta \right),$$

$$(z^1, z^2) = \sigma_2(\varphi, \theta) = \left(\cos\frac{1}{2}\varphi\cos\theta + \sqrt{-1}\cos\frac{1}{2}\varphi\sin\theta, \sin\frac{1}{2}\varphi\right).$$

证明：

$$\sigma_1^*\omega = -\frac{1}{2}\sqrt{-1}(1-\cos\varphi)\mathrm{d}\theta, \quad \sigma_2^*\omega = \frac{1}{2}\sqrt{-1}(1+\cos\varphi)\mathrm{d}\theta;$$
$$\sigma_1^*\Omega = \sigma_2^*\Omega = -\frac{1}{2}\sqrt{-1}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta.$$

30. 设 $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ 是 $\mathbb{R}^4$ 上的标准基，令

$$\delta_0\cdot x = x\cdot\delta_0 = x, \quad \forall x\in\mathbb{R}^4,$$
$$\delta_1\cdot\delta_1 = \delta_2\cdot\delta_2 = \delta_3\cdot\delta_3 = -\delta_0, \quad \delta_1\cdot\delta_2 = -\delta_2\cdot\delta_1 = \delta_3,$$
$$\delta_2\cdot\delta_3 = -\delta_3\cdot\delta_2 = \delta_1, \quad \delta_3\cdot\delta_1 = -\delta_1\cdot\delta_3 = \delta_2.$$

经过线性扩充，乘法 "·" 对于 $\mathbb{R}^4$ 上的任意两个元素有定义.

(1) 证明：$\mathbb{H} = (\mathbb{R}^4, \cdot)$ 是一个四维实代数，它以 δ_0 为单位元，是一个除环，但不是域. 通常把 $\mathbb{H}$ 叫做**四元数代数**或**四元数环**，其中的元素称为**四元数**. 并且为了方便，把标准基 $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ 分别记作 $\boldsymbol{1}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. 于是 $\mathbb{H}$ 又可以表示成

$$\mathbb{H} = \boldsymbol{1}\mathbb{R}\oplus\boldsymbol{i}\mathbb{R}\oplus\boldsymbol{j}\mathbb{R}\oplus\boldsymbol{k}\mathbb{R},$$

其中 $\mathrm{Re}(\mathbb{H}) = \boldsymbol{1}\mathbb{R}\cong\mathbb{R}$ 和 $\mathrm{Im}(\mathbb{H}) = \boldsymbol{i}\mathbb{R}\oplus\boldsymbol{j}\mathbb{R}\oplus\boldsymbol{k}\mathbb{R}$ 分别称为 $\mathbb{H}$ 的**实部**和**虚部**; 对于任意的 $x = x^0\boldsymbol{1} + x^1\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + x^3\boldsymbol{k}\in\mathbb{H}$, 它的 (四元数) 共轭 $\bar{x}$ 和模长 $|x|$ 分别定义为：

$$\bar{x} = x^0\boldsymbol{1} - x^1\boldsymbol{i} - x^2\boldsymbol{j} - x^3\boldsymbol{k}, \quad |x| = \sqrt{x\cdot\bar{x}}.$$

显然有

$$|x|^2 = (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2.$$

(2) 对于任意 $x, y\in\mathbb{H}$, 定义 $[x,y]_0 = x\cdot y - y\cdot x$. 证明：$\mathbb{H}$ 关于乘积 $[\cdot,\cdot]_0$ 构成一个李代数，并且 $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ 是它的一个李子代数.

(3) 令

$$\mathrm{M}(m,\mathbb{C}) = \{(c_{ij})_{m\times m};\ c_{ij}\in\mathbb{C},\ 1\le i,j\le m\};$$
$$\mathrm{M}(n,\mathbb{H}) = \{(q_{ij})_{n\times n};\ q_{ij}\in\mathbb{H},\ 1\le i,j\le n\}.$$

如果把 $\boldsymbol{1}$ 和 $\boldsymbol{i}$ 分别等同于 1 和 $\sqrt{-1}$, 便有

$$\boldsymbol{1}\mathbb{R}\oplus\boldsymbol{i}\mathbb{R}\equiv\mathbb{C}.$$

在此意义下，对于任意的 $Q\in\mathrm{M}(n,\mathbb{H})$, 存在唯一的一对 n 阶复矩阵 $A, B\in\mathrm{M}(n,\mathbb{C})$, 使得 $Q = A + B\boldsymbol{j}$, 令

$$\varphi(Q) = \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A}\end{pmatrix}\in\mathrm{M}(2n,\mathbb{C}).$$

证明：映射 $\varphi: \mathrm{M}(n,\mathbb{H})\to\mathrm{M}(2n,\mathbb{C})$ 关于矩阵的乘法是代数单同态 (因而是从矩阵代数 $\mathrm{M}(n,\mathbb{H})$ 到子代数 $\varphi(\mathrm{M}(n,\mathbb{H}))\subset\mathrm{M}(2n,\mathbb{C})$ 的代数同构), 并且保持共轭转置不变，即

$$\varphi(\overline{Q^t}) = \overline{(\varphi(Q))^t};$$

特别地，对于任意的 $x, y\in\mathbb{H}$, $\overline{x\cdot y} = \bar{y}\cdot\bar{x}$.

(4) 通过 (3) 中的映射 φ 可以把 $\mathrm{M}(n,\mathbb{H})$ 和子代数 $\varphi(\mathrm{M}(n,\mathbb{H}))\subset\mathrm{M}(2n,\mathbb{C})$ 等同起来；特别地，四元数环 $\mathbb{H} = \mathrm{M}(1,\mathbb{H})$ 可以等同于

$$\varphi(\mathrm{M}(1,\mathbb{H})) = \left\{\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z}\end{pmatrix};\ z, w\in\mathbb{C}\right\}.$$

证明在此意义下，$\boldsymbol{1}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 依次等同于如下的 2 阶复数矩阵：

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\sqrt{-1} & 0\\ 0 & -\sqrt{-1}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & \sqrt{-1}\\ \sqrt{-1} & 0\end{pmatrix}.$$

(5) 显然，$\mathbb{H}^n$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 $4n$ 维向量空间，并且关于四元数的右乘构成一个 $\mathbb{H}$-右模. $\mathbb{H}^n$ 上的一个实线性变换 Q 称为是 $\mathbb{H}$-线性的，如果它满足

$$Q(q\cdot\lambda) = Q(q)\cdot\lambda, \quad \forall q\in\mathbb{H}^n,\ \lambda\in\mathbb{H}.$$

证明：$\mathbb{H}^n$ 上的全体 $\mathbb{H}$-线性变换关于复合运算构成一个代数 $\mathscr{L}(\mathbb{H}^n)$，它与矩阵乘积代数 $\mathrm{M}(n,\mathbb{H})$ 同构．一个以四元数为元素的 $n\times n$ 矩阵 $Q\in\mathrm{M}(n,\mathbb{H})$ 称为是可逆的，如果它所对应的 $\mathbb{H}$-线性变换

$$Q:\mathbb{H}^n\to\mathbb{H}^n$$

是可逆的；此时，Q 的逆矩阵 Q^{-1} 就定义为 Q^{-1} 所对应的矩阵．

(6) 定义映射 $\tilde{\varphi}:\mathrm{M}(n,\mathbb{H})\to\mathrm{M}(4n;\mathbb{R})$ 如下：对于任意的

$$Q=(q_{ij})\in\mathrm{M}(n,\mathbb{H}),$$

设

$$q_{ij}=a_{ij}^0+a_{ij}^1 i+a_{ij}^2 j+a_{ij}^3 k,\quad 1\le i,j\le n,$$

并且令

$$A_{ij}=\begin{pmatrix}a_{ij}^0 & -a_{ij}^1 & -a_{ij}^2 & -a_{ij}^3\\ a_{ij}^1 & a_{ij}^0 & -a_{ij}^3 & a_{ij}^2\\ a_{ij}^2 & a_{ij}^3 & a_{ij}^0 & -a_{ij}^1\\ a_{ij}^3 & -a_{ij}^2 & a_{ij}^1 & a_{ij}^0\end{pmatrix},\tilde{\varphi}(Q)=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}.$$

证明：$\tilde{\varphi}:\mathrm{M}(n,\mathbb{H})\to\mathrm{M}(4n,\mathbb{R})$ 关于矩阵的乘法是代数单同态，并且 Q 是可逆的当且仅当 $4n$ 阶实方阵 $\tilde{\varphi}(Q)$ 是可逆的，即 $\det(\tilde{\varphi}(Q))\neq 0$．

(7) 定义 $\mathrm{M}(n,\mathbb{H})$ 的如下子集：

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})=\{Q\in\mathrm{M}(n,\mathbb{H});\ Q\text{ 是可逆的}\},$$

即 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$ 由 $\mathbb{H}^n$ 上的全体 $\mathbb{H}$-线性可逆变换所对应的 n 阶四元数方阵构成．证明：$\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$ 是一个 $4n^2$ 维实李群，它的李代数可以等同于 n 阶四元数矩阵李代数，即 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{H})=\mathrm{M}(n,\mathbb{H})$．

(8) 定义 n 阶四元数酉群 $\mathrm{U}(n,\mathbb{H})=\{Q\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{H});\ Q^{-1}=\overline{Q}^{t}\}$，证明：$\mathrm{U}(n,\mathbb{H})$ 是四元数一般线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$ 的李子群．通常把李群 $\mathrm{U}(n,\mathbb{H})$ 叫做 n 阶 **辛群**，并且记为 $\mathrm{Sp}(n)$．

(9) 设 $J=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{pmatrix}$．利用 (4) 中的代数同构 φ 可以把 $\mathrm{M}(n,\mathbb{H})$ 和 $\varphi(\mathrm{M}(n,\mathbb{H}))\subset\mathrm{M}(2n,\mathbb{C})$ 等同起来．在此意义下证明：

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})=\{M\in\mathrm{GL}(2n,\mathbb{C});\ JMJ^{-1}=\overline{M}\},$$

$$\mathrm{Sp}(n)=\{M\in\mathrm{U}(2n);\ M^tJM=J\};\quad \mathrm{Sp}(1)=\mathrm{SU}(2),$$

其中 $\mathrm{SU}(2)$ 是 2 阶特殊酉群 (参看第八章的习题第 16 题)．

(10) 证明：1 阶辛群 $\mathrm{Sp}(1)$(或 2 阶特殊酉群 $\mathrm{SU}(2)$) 可以等同于三维球面 S^3，它的李代数可以和 $(\mathbb{H},[\cdot,\cdot]_0)$ 的李子代数 $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ 等同起来．

(11) 依照实射影空间 $\mathbb{R}P^n$ 或复射影空间 $\mathbb{C}P^n$ 的构造，定义 **四元数射影空间** $\mathbb{H}P^n$，以及相应的自然投影 $\pi:\mathbb{H}_*^{n+1}\to\mathbb{H}P^n$，其中 $\mathbb{H}_*=\mathbb{H}^{n+1}\setminus\{0\}$；然后证明：$\mathbb{H}P^1$ 和四维球面 S^4 光滑同胚．

(12) 把 (8) 中定义的自然投影 $\pi:\mathbb{H}_*^{n+1}\to\mathbb{H}P^n$ 限制到 $4n+3$ 维单位球面 $S^{4n+3}\subset\mathbb{R}^{4n+4}=\mathbb{H}^{n+1}$ 上可以得到自然投影

$$\pi:S^{4n+3}\to\mathbb{H}P^n.$$

证明：$\pi:S^{4n+3}\to\mathbb{H}P^n$ 是四元数射影空间 $\mathbb{H}P^n$ 上的主丛，它的结构群是 1 阶辛群 $\mathrm{Sp}(1)$(或 2 阶特殊酉群 $\mathrm{SU}(2)$)．特别地，$n=1$ 所对应的主丛 $(S^7,\mathbb{H}P^1=S^4,\pi,\mathrm{Sp}(1)=\mathrm{SU}(2))$ 称为球面 S^7 的 **Hopf 纤维化** 或 **四元数 Hopf 丛**．

(13) 在 $S^7\subset\mathbb{H}^2$ 上定义 $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$-值 1 形式 ω，使得

$$\omega_q=\mathrm{Im}(\overline{q}^1\mathrm{d}q^1+\overline{q}^2\mathrm{d}q^2),\ \forall q=(q^1,q^2)\in S^7.$$

证明：ω 是主丛 $\pi:S^7\to S^4=\mathbb{H}P^1$ 上的一个联络 H 的联络形式．联络 H 称为 **四元数 Hopf 丛上的自然联络**．

(14) 设

$$U=\{[(q_1,q_2)]\in\mathbb{H}P^1;\ q_2\neq 0\},$$

$\mathbb{H}P^1$ 在 U 上有局部坐标映射 $\varphi: U \to \mathbb{H} \equiv \mathbb{R}^4$，其定义是

$$\varphi([(q_1,q_2)]) = q_1 q_2^{-1}, \quad \forall [(q_1,q_2)] \in U.$$

于是，存在四元数 Hopf 丛 $\pi: S^7 \to S^4$ 在 U 上的截面 $s: U \to S^7$，使得

$$s \circ \varphi^{-1}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+|\xi|^2}}(\xi,1), \quad \forall \xi \in \mathbb{H}.$$

用 ω 和 Ω 分别表示四元数 Hopf 丛上的自然联络 H 的联络形式和曲率形式，并且记 $\tilde{s} = s \circ \varphi^{-1}$，试求 $\tilde{s}^*\omega$ 和 $\tilde{s}^*\Omega$ 的局部坐标表达式.

31. 设 ω 是四元数 Hopf 丛上的自然联络的联络形式. 对于任意的 $\lambda > 0$ 和 $h \in \mathbb{H}$，定义映射 $\Phi_{\lambda,h}: S^7 \to S^7$，使得

$$\Phi_{\lambda,h}(q) = (|q^1 - hq^2|^2 + \lambda^2|q^2|^2)^{-\frac{1}{2}}(q^1 - h\cdot q^2, \lambda q^2),$$
$$\forall q = (q^1,q^2) \in S^7 \subset \mathbb{H}^2.$$

(1) 证明： $\Phi_{\lambda,h}: S^7 \to S^7$ 是四元数 Hopf 丛 $\pi: S^7 \to \mathbb{H}P^1 = S^4$ 上的自同构，因而由本章习题第 23 题，对于任意的 $\lambda > 0$ 和 $h \in \mathbb{H}$，$\omega_{\lambda,h} = \Phi^*_{\lambda,h}\omega$ 是主丛的某个联络 $H^{\lambda,h}$ 的联络形式.

(2) 设映射 $\tilde{s}: \mathbb{H} \to S^7$ 由本章习题第 30 题的 (12) 定义，$\Omega_{\lambda,h}$ 是联络 $H^{\lambda,h}$ 的曲率形式. 求 $\tilde{s}^*\omega_{\lambda,h}$ 和 $\tilde{s}^*\Omega_{\lambda,h}$ 的具体表达式.

联络 $H^{\lambda,h}$ 在物理学中称为以 h 为中心、λ 为标尺的 BPST 联络，在规范场理论中有重要意义 (参阅参考文献 [27] 和 [28]).

习题解答和提示

习 题 八

1. (1) 按定义直接验证.

(2) Φ 显然是一一的实线性映射. 验证

$$\Phi \circ J = \tilde{J} \circ \Phi, \text{ 或 } \Phi(\sqrt{-1}X) = \sqrt{-1}\Phi(X).$$

2. 利用表达式 $(V^*)^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes V^*$.

3. (1) 验证映射 $\tilde{h}$ 满足 Hermite 内积的定义.

(2) 利用黎曼度量 g 的 J-不变性，验证：对于任意的 $X, Y \in V$ 有

$$\tilde{h}(\Phi(X),\Phi(Y)) = \frac{1}{2}h(\Phi(X),\Phi(Y)).$$

4. (1) 证明方法同第一章引理 4.1.

(2) 按照复向量空间的定义直接验证.

(3) 利用 (1) 证明：

$$X = \sum X(z^i)\left.\frac{\partial}{\partial z^i}\right|_p, \quad \forall X \in T_p^h M.$$

5. 设 $(U;z^i)$ 和 $(V;w^\alpha)$ 分别是 M 和 N 上的复坐标系，$f(U) \subset V$. 令 $z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$, $w^\alpha = u^\alpha + \sqrt{-1}v^\alpha$，则 $(U;x^i,y^i)$ 和 $(V;u^\alpha,v^\alpha)$ 是 M 和 N 上的局部实坐标系，并且有

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^i},$$
$$\tilde{J}\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial v^\alpha}, \quad \tilde{J}\left(\frac{\partial}{\partial v^\alpha}\right) = -\frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

设映射 f 在局部复坐标系 $(U;z^i)$, $(V;w^\alpha)$ 下的局部表示是

$$\tilde{f} = (f^\alpha), \quad \text{其中 } f^\alpha = g^\alpha + \sqrt{-1}h^\alpha,$$

再利用全纯映射的条件.

7. 设 $\{(U_\alpha; z_\alpha^i)\}$ 是复流形 M 的一族复坐标系，并且 $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$. 对于任意的 α, 利用局部标架场 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial z_\alpha^i}\right\}$ 可以分别得到 $T^h M$ 和 $T^{(1,0)}M$ 在 U_α 上的局部平凡化结构. 由此可以证明 $T^h M$ 和 $T^{(1,0)}M$ 都是 M 上的秩为 $n = \dim M$ 的复向量丛，并且 $T^h M$ 和 $T^{(1,0)}M$ 在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上的转移函数是 $\left(\dfrac{\partial z_\beta^j}{\partial z_\alpha^i}\right)$.

8. 给出 T^*M 的局部平凡化结构，并证明相应的转移函数是 $g_{\beta\alpha}(q) = \dfrac{\partial z_\alpha^i}{\partial z_\beta^j}$.

9. (1) 取局部复坐标覆盖 $\{(U_\alpha; z_\alpha^i)\}$. 对任意的 $p \in M$, $T_p^{*(1,0)}M$, $T_p^{*(0,1)}M$, $(T_p^*M)^{\mathbb{C}}$ 作为复向量空间的基底分别是

$$\{\mathrm{d}z_\alpha^i|_p\}, \quad \{\mathrm{d}\overline{z}_\alpha^i|_p\}, \quad \{\mathrm{d}z_\alpha^i|_p, \mathrm{d}\overline{z}_\alpha^i|_p\}.$$

由此仿照上题的作法即可建立 $T^{*(1,0)}M$, $T^{*(0,1)}M$ 和 $(T^*M)^{\mathbb{C}}$ 的局部平凡化. 再验证复向量丛定义中的各个条件.

(2) 对于任意的 α, β, 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时，说明 $T^{*(1,0)}M$ 在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上的转移函数是

$$g_{\beta\alpha} = \left(\frac{\partial z_\alpha^i}{\partial z_\beta^j}\right).$$

显然，每一个 $g_{\alpha\beta}$ 都是全纯的.

11. 利用关系式 $\mathrm{D} \circ J = J \circ \mathrm{D}$ 以及 $h(\xi, \eta) = g(\xi, \eta) + \sqrt{-1}g(\xi, J\eta)$.

12. 按照定义直接验证并且利用 (2.46) 式.

13. (1) 首先证明：对于任意的 $a \in G$, 映射 $L_a, R_a : G \to G$ 是全纯映射；然后利用命题 2.2 的结论.

(2) 根据定义进行验证.

14. 先把第一章习题第 27 题和第 28 题的结论推广到复流形及全纯映射的情形，再仿照该章习题第 46 题的做法.

15. 对于任意的 $X = A + \sqrt{-1}B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, 其中 A, B 是 $n \times n$ 实矩阵，令

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix},$$

则容易验证 $\Phi(X) \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$. 证明由 $X \mapsto \Phi(X)$ 给出的映射

$$\Phi : \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$$

是嵌入并且满足

$$\Phi(X \cdot Y) = \Phi(X) \cdot \Phi(Y), \quad \forall X, Y \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}).$$

于是 $\Phi(\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}))$ 是 $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ 的 $2n^2$ 维嵌入子流形. 再把 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 和 $\Phi(\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})) \subset \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ 等同起来，并且利用第一章习题第 27 题的结论，说明 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 是 $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ 的实子群.

16. 首先说明，对于 $X = A + \sqrt{-1}B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, 其中 A, B 是 $n \times n$ 矩阵，$X \in \mathrm{U}(n)$ 的充分必要条件是 $X\overline{X}^{t} = I_n$, 即

$$AA^t + BB^t = I_n, \quad AB^t - BA^t = 0.$$

根据第一章习题第 28 题可以证明，$\mathrm{U}(n)$ 是 $2n^2$ 维光滑流形 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 的 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 维嵌入子流形，因而根据本章习题第 15 题的证明，$\mathrm{U}(n)$ 也是 $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ 的 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 维嵌入子流形. 定义映射 $F : \mathrm{U}(n) \to \mathbb{C}$, 使得对于任意的 $X \in \mathrm{U}(n)$, 有 $F(X) = \det(X)$. 则映射 F 是秩为 1 的光滑映射，因而根据第一章习题第 28 题，$\mathrm{SU}(n) = F^{-1}(1)$ 是 $\mathrm{U}(n)$ 的 $\frac{1}{2}n(n+1) - 1$ 维嵌入子流形. 再利用第一章习题第 27 题的结论.

17. 设 $(U; z^i)$ 是 Kähler 流形 M 的任意一个局部复坐标系，

$$h_{i\bar{j}} = h\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \overline{z^j}}\right)$$

是 Hermite 度量的系数，ω_i^j 是相应的 Hermite 联络形式. 根据引理 5.2 和 (5.11) 式以及定理 5.4 的证明，容易知道 (参看推论 5.5), 如果对于任意的点 $p \in M$, M 在点 p 的全纯截面曲率与全纯截面的取法无关，则存在 M 上的实值光滑函数 λ, 使得 M 在坐标系 $(U; z^i)$ 下的曲率形式 Ω_i^j 具有如下的表达式

$$\Omega_i^j = \frac{\lambda}{4}(\delta_i^j h_{k\bar{l}} + \delta_k^j h_{i\bar{l}})\mathrm{d}z^k \wedge \mathrm{d}\overline{z^l}.$$

先证明 M 的 Ricci 曲率张量 Ric 与黎曼度量 g 成比例，$\mathrm{Ric} = \frac{n+1}{2}\lambda g$. 再求协变导数并利用第二 Bianchi 恒等式证明 λ 是常数.

19. 设 M 具有常全纯曲率 c; $p\in M$, X,Y 是 M 在点 p 的任意两个互相垂直的单位向量. 则由 (5.13) 式, M 在点 p 沿截面 $[X\wedge Y]$ 的截面曲率是

$$K(X,Y)=\frac{1}{4}c(1+3\cos^2\alpha),\quad 其中\ \alpha=\angle(X,JY).$$

如果 M 的截面曲率也是常数, 然后分别取 $Y=JX$ 和 $Y\perp X,JX$, 求解 c,c' 之间的关系.

21. 利用 (4.30) 式和推论 5.6.

22. 如果把 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的复线性变换等同于 $n+1$ 阶复方阵, 则有

$$\mathrm{U}(n+1,1)=\{A\in\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C});\ A\varepsilon\overline{A}^{\mathrm{t}}=\varepsilon\},$$
$$其中\ \varepsilon=\begin{pmatrix}I_n & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

利用第一章习题第 28 题证明 $\mathrm{U}(n+1,1)$ 是 $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})$ 的嵌入子流形, 再利用第一章习题第 27 题说明 $\mathrm{U}(n+1,1)$ 中的乘法运算和求逆运算是光滑的.

23. 由商拓扑的定义, 自然投影 $\pi:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}T^n$ 是连续的. 令

$$S=\left\{z=\sum_\alpha\lambda^\alpha v_\alpha;\ 0\le\lambda^\alpha\le 1,\ 1\le\alpha\le 2n\right\},$$

则 S 是 $\mathbb{R}^{2n}=\mathbb{C}^n$ 的紧子集, 因而 $\mathbb{C}T^n=\pi(S)$ 是紧致的. 由于 Γ 是 $\mathbb{C}^n$ 的正规 (加法) 闭子群, 故 $\mathbb{C}T^n$ 是一个 (加法) 商群, 其加、减法运算显然都是全纯的, 因而 $\mathbb{C}T^n$ 是一个复李群.

24. 对于任意的 $p\in\mathbb{C}T^n$, 取 $\tilde{p}\in\pi^{-1}(p)$, 则 $\pi_{*\tilde{p}}:T_{\tilde{p}}\mathbb{C}^n\to T_p\mathbb{C}T^n$ 是复线性同构. 通过 $\pi_{*\tilde{p}}$, $T_{\tilde{p}}\mathbb{C}^n$ 的标准 Hermite 内积在 $T_p\mathbb{C}T^n$ 上有诱导的 Hermite 内积 h_p. 验证 h_p 与点 $\tilde{p}\in\pi^{-1}(p)$ 的取法无关, 于是由 $p\mapsto h_p$ 给出了 $\mathbb{C}T^n$ 上的一个 Hermite 度量 h; 显然 π^*h 是 $\mathbb{C}^n$ 上的标准 Hermite 度量. 由于 π 是局部双全纯映射, h 是光滑的.

25. (1) 设 g, Ric 分别是 M 上的黎曼度量和 Ricci 曲率张量, 则 M 上的 Kähler 形式 k 和 Ricci 形式 ρ 满足如下关系式

$$k(X,Y)=g(X,JY),\quad \rho(X,Y)=\mathrm{Ric}(X,JY);$$

$$g(X,Y)=-k(X,JY),\quad \mathrm{Ric}(X,Y)=-\rho(X,JY),\quad \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M),$$

其中 J 是 M 上的典型近复结构. 由此可知, 存在常数 λ 使得 $\rho=\lambda k\Longleftrightarrow$ 存在常数 λ 使得 $\mathrm{Ric}=\lambda g$.

(2) 利用常全纯曲率空间的曲率形式的表达式可以看出, 任何常全纯曲率空间都是 Kähler-Einstein 流形.

26. 利用曲面上等温参数的存在性, 取 M 的一个与其定向相符的局部坐标覆盖 $\{(U_\alpha;x_\alpha,y_\alpha)\}$, 使得对于每一个 α,

$$g|_{U_\alpha}=\lambda_\alpha^2(\mathrm{d}x_\alpha^2+\mathrm{d}y_\alpha^2),\quad \lambda_\alpha>0.$$

在 U_α 上引入复坐标 $z_\alpha=x_\alpha+\sqrt{-1}y_\alpha$. 则 $g|_{U_\alpha}=\lambda^2|\mathrm{d}z_\alpha|^2$. 验证: 在 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ 时, 从局部复坐标系 $(U_\alpha;z_\alpha)$ 到 $(U_\beta;z_\beta)$ 的局部坐标变换 $z_\beta=z_\beta(z_\alpha)$ 是全纯的. 因此, 由复局部坐标覆盖 $\{(U_\alpha;z_\alpha)\}$ 确定了 M 上的一个复流形结构, 使得 M 成为一维复流形, 它的典型复结构 J 在实局部坐标系 $(U_\alpha;x_\alpha,y_\alpha)$ 的表达式是

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial y_\alpha},\quad J\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)=-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}.$$

由此可知, 黎曼度量 g 是 J-不变的, 它给出了 M 上的一个 Hermite 度量, 相应的 Kähler 形式 k 显然是闭形式. 这就证明了 M 关于黎曼度量 g 是一个 Kähler 流形.

27. (2) 根据矩阵 T 的分块表示 (6.23) 式及 $\mathrm{U}(n+1,1)$ 的定义 (参看本章习题第 21 题的提示) 可知, $T\in\mathrm{U}(n+1,1)$ 的充分必要条件是

$$A\cdot\overline{A}^{\mathrm{t}}-B\cdot\overline{B}^{\mathrm{t}}=I_n,\quad A\cdot\overline{C}^{\mathrm{t}}-B\cdot\bar{d}=0,\quad |d|^2=1+C\cdot\overline{C}^{\mathrm{t}}.$$

28. 利用第一章习题第 28 题的结论, 证明 $\mathrm{U}(p+q,q)$ 是 $\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{C})$ 的嵌入子流形, 再利用第一章习题第 27 题说明 $\mathrm{U}(p+q,q)$ 中的乘法运算和求逆运算是光滑的.

30. 约定指标的取值范围如下:

$$1\le i,j,k,\cdots\le p,\quad p+1\le\lambda,\mu,\nu,\cdots\le p+q.$$

$D_{p,q}$ 上的复坐标记为 z_λ^i; 令

$$A = (A_\mu^\lambda) = I_q - \overline{Z}^t Z, \quad B = (B_\mu^\lambda) = A^{-1}.$$

则 Hermite 度量的局部分量为

$$h_{i\lambda,j\mu} = h\left(\frac{\partial}{\partial z_\lambda^i}, \frac{\partial}{\partial \overline{z_\mu^j}}\right) = \frac{\partial^2 \ln\det A}{\partial z_\lambda^i \partial \overline{z_\mu^j}}.$$

在点 $Z=0$ 处计算得到

$$h_{i\lambda,j\mu} = \frac{4}{c}\delta_{ij}\delta_{\lambda\mu}, \quad \frac{\partial h_{i\lambda,j\mu}}{\partial \overline{z_\sigma^l}} = \frac{\partial h_{i\lambda,j\mu}}{\partial z_\nu^k} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 h_{i\lambda,j\mu}}{\partial z_\nu^k \partial \overline{z_\sigma^l}} = \frac{4}{c}(\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{\lambda\sigma}\delta_{\mu\nu} + \delta_{il}\delta_{kj}\delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\sigma});$$

$$h^{i\lambda,j\mu} = \frac{c}{4}\delta^{ij}\delta^{\lambda\mu}.$$

所以, 在点 $Z=0$ 处

$$K_{i\lambda,k\nu,l\sigma}^{j\mu} = -2\frac{\partial h^{j\mu,p\tau}}{\partial \overline{z_\sigma^l}} \cdot \frac{\partial h_{i\lambda,p\tau}}{\partial z_\nu^k} - 2h^{j\mu,p\tau}\frac{\partial^2 h_{i\lambda,p\tau}}{\partial z_\nu^k \partial \overline{z_\sigma^l}}$$
$$= -2(\delta_i^j\delta_{kl}\delta_\nu^\mu\delta_{\lambda\sigma} + \delta_k^j\delta_{il}\delta_\lambda^\mu\delta_{\nu\sigma});$$

$$\delta_{i\lambda}^{j\mu}h_{k\nu,l\sigma} + \delta_{k\nu}^{j\mu}h_{i\lambda,l\sigma} = \delta_i^j\delta_{kl}\delta_\lambda^\mu\delta_{\nu\sigma} + \delta_k^j\delta_{il}\delta_\sigma^\mu\delta_{\lambda\sigma}.$$

从上面的式子容易算出典型域 $D_{p,q}$ 在点 $Z=0$ 处的全纯截面曲率; $D_{p,q}$ 在点 $Z=0$ 的 Ricci 形式是

$$\rho = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i,j,k,\lambda,\mu,\nu} K_{k\nu,i\lambda,j\mu}^{k\nu} dz_\lambda^i \wedge d\overline{z_\mu^j}$$
$$= -nck,$$

其中 k 是 $D_{p,q}$ 的 Kähler 形式. 此外, 由于 $\mathrm{U}(p+q,q)$ 在 $D_{p,q}$ 上的作用是全纯等距的可迁作用, $D_{p,q}$ 是 Kähler-Einstein 流形.

31. 设 $\tilde{R}$ 和 B 分别是 N 的黎曼曲率张量和 M 在 N 中的第二基本形式, $\{X_i, J(X_i); 1 \le i \le m\}$ 是黎曼流形 M 上的一个单位正交的切标架场. 则由 (6.37) 和 (6.40) 式, 对于任意的 $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\mathrm{Ric}_M(X,X) = \sum_{i=1}^m (\tilde{R}(X,X_i,X_i,X) + \tilde{R}(X,JX_i,JX_i,X))$$

$$-2\sum_{i=1}^m g(B(X_i,X),B(X_i,X)).$$

32. 作为黎曼流形, (N,g) 的黎曼曲率张量 $\tilde{R}$ 具有如下的表达式 (参看 (5.10) 和 (5.12) 式):

$$\tilde{R}(X,Y,Z,W) = -\frac{c}{4}(g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z)$$
$$+ g(X,JZ)g(Y,JW) - g(X,JW)(Y,JZ)$$
$$+ 2g(X,JY)g(Z,JW)),$$

其中 $X,Y,Z,W \in T_xM$. 因此

$$\sum_i (\tilde{R}(X,X_i,X_i,X) + \tilde{R}(X,JX_i,JX_i,X))$$
$$= \frac{1}{2}(m+1)cg(X,X).$$

35. 在 (7.11) 式中取矩阵 A 为曲率阵 Ω, 再对 i 作数学归纳法即可证明所需的关系式.

36. 行列式 $\det(I + \frac{\sqrt{-1}t}{2\pi}\Omega)$ 可以表示成

$$\det\left(I + \frac{\sqrt{-1}t}{2\pi}\Omega\right)$$
$$= \frac{1}{r!}\delta_{\beta_1\cdots\beta_r}^{\alpha_1\cdots\alpha_r}\left(\delta_{\alpha_1}^{\beta_1} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega_{\alpha_1}^{\beta_1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\delta_{\alpha_r}^{\beta_r} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega_{\alpha_r}^{\beta_r}\right).$$

将它按照 t 的幂次展开, 再让 $t=1$.

37. 在定理 7.1 和定理 7.2 的证明中用陈示性式 c_i 取代 b_i, 并且利用本章习题第 35 中的公式进行计算推导.

38. 设复向量丛 E_1 和 E_2 的秩分别是 q_1, q_2; $\{s_a\}$ 和 $\{\sigma_\alpha\}$ 分别是 E_1 和 E_2 的局部标架场, Ω_{E_1} 和 Ω_{E_2} 分别是 E_1 和 E_2 的曲率阵, 则 $\{s_a; \sigma_\alpha\}$ 是直和复向量丛 $E = E_1 \oplus E_2$ 的局部标架场, $\Omega = \mathrm{diag}(\Omega_{E_1}, \Omega_2)$ 是 E 的曲率阵.

39. (2) 设 ω_β^α 和 Ω_β^α 分别是联络 D 关于标架场 $\{E_\alpha\}$ 的联络形式和曲率形式, 则容易证明: 诱导联络 $\tilde{\mathrm{D}}$ 关于 f^*E 上的标架场 $\{E_\alpha \circ f\}$ 的联络形式和曲率形式分别是 $f^*\omega_\beta^\alpha$ 和 $f^*\Omega_\beta^\alpha$. 由此可知

$$c_i(f^*E) = c_i(f^*E, \tilde{\mathrm{D}}) = f^*(c_i(E,\mathrm{D})) = f^*(c_i(E)).$$

40. 记 $\tilde{E} = E\otimes L$, 并且取向量丛 E 和线丛 L 上的复联络 D^E 和 D^L. 对于 E 上局部标架场 $\{e_\alpha\}$ 和 L 的标架场 $\{e\}$, 令

$$\mathrm{D}^E e_\alpha = \omega_\alpha^\beta e_\beta,\quad \Omega_\alpha^\beta = \mathrm{d}\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta,\quad \Omega_E=(\Omega_\alpha^\beta),$$
$$\mathrm{D}^L e = \omega e,\quad \Omega_L = \mathrm{d}\omega,$$

则 $\tilde{E}$ 上联络 $\mathrm{D}^{\tilde{E}} = \mathrm{D}^E\otimes \mathrm{D}^L$ 在标架场 $\{e_\alpha\otimes e\}$ 下的联络形式为

$$\tilde{\omega}_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\beta + \omega\delta_\alpha^\beta.$$

由此容易知道，联络 $\mathrm{D}^{\tilde{E}}$ 的曲率阵是 $\tilde{\Omega} = \Omega_E + \Omega_L I_q$.

41. (2) 设 D 是向量丛 E 上的一个复联络，则对偶向量丛 E^* 上有诱导的复联络 $\tilde{\mathrm{D}}$, 使得

$$\mathrm{d}\langle\xi,\theta\rangle = \langle \mathrm{D}\xi,\theta\rangle + \langle\xi,\tilde{\mathrm{D}}\theta\rangle.$$

如果 $\{e_\alpha\}$ 是复向量丛 E 的局部标架场，$\{e^\alpha\}$ 是它的对偶标架场，联络 D 关于 $\{e_\alpha\}$ 的联络形式和曲率形式分别记为 ω_β^α 和 Ω_β^α, 则 E^* 上的诱导联络 $\tilde{\mathrm{D}}$ 在对偶标架场 $\{e^\alpha\}$ 下的联络形式 $\tilde{\omega}_\beta^\alpha$ 和曲率形式由下式给出：

$$\tilde{\mathrm{D}}e^\alpha = \tilde{\omega}_\beta^\alpha e^\beta,\quad \mathrm{d}\tilde{\omega}_\beta^\alpha = \tilde{\omega}_\gamma^\alpha\wedge\tilde{\omega}_\beta^\gamma + \tilde{\Omega}_\beta^\alpha.$$

另一方面，由诱导联络 $\tilde{\mathrm{D}}$ 和定义式容易看出

$$\tilde{\omega}_\beta^\alpha = -\omega_\beta^\alpha,\quad \tilde{\Omega}_\beta^\alpha = -\Omega_\beta^\alpha.$$

42. (1) 余切丛 T^*M 关于自然诱导的复结构构成的复向量丛是全纯向量丛，它的转移函数本质上是局部复坐标变换的 Jacobi 矩阵. 说明秩为 1 的复向量丛 $\bigwedge^n T^*M$ 的转移函数是上述 Jacobi 矩阵的行列式，因而是全纯的.

(2) 设 D 是切丛 TM 上的一个复联络，它在余切丛上的诱导联络记为 D^*, 由 D^* 在 $\bigwedge^n T^*M$ 上的诱导联络设为 $\tilde{\mathrm{D}}$. 如果 $\{e_i\}$ 是 TM 的标架场，$\{e^i\}$ 是它的对偶标架场，则 $\{e^1\wedge\cdots\wedge e^n\}$ 是全纯向量丛 $\bigwedge^n T^*M$ 的一个局部标架场. 设 ω_j^i 和 Ω_j^i 分别是 TM 上的联络 D 关于 $\{e_i\}$ 的联络形式和曲率形式，则由本章习题第 41 题的证明知，联络 D^* 关于 $\{e^i\}$ 的联络形式和曲率形式分别是 $-\omega_j^i$ 和 $-\Omega_j^i$. 联络 $\tilde{\mathrm{D}}$ 在标架场 $\{e^1\wedge\cdots\wedge e^n\}$ 下的联络形式是 $\tilde{\omega} = -\sum_i\omega_i^i$; 于是相应的曲率形式是

$$\tilde{\Omega} = \mathrm{d}\tilde{\omega} = -\sum_i \mathrm{d}\omega_i^i = -\sum_{i,k}\omega_i^k\wedge\omega_k^i - \sum_i\Omega_i^i = -\sum_i\Omega_i^i.$$

习 题 九

1. (1) 设 g_1, g_2 是向量空间 V 上的任意两个 K-不变内积. 定义 V 上的线性变换 A, 使得对于任意的 $X,Y\in V$, $g_1(A(X),Y)=g_2(X,Y)$. 证明线性变换 A 关于内积 g_1 是对称的. 然后考虑 V 关于 A 的特征子空间分解

$$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_r.$$

利用 ρ 是不可约线性表示的假定，证明 $r=1$.

2. 由于 exp 和群 G 的乘法运算是光滑映射，根据反函数定理，只需要分别验证映射

$$F_1:(x^1,\cdots,x^n)\mapsto \exp\left(\sum_{i=1}^n x^iX_i\right);$$
$$F_2:(x^1,\cdots,x^n)\mapsto \exp(x^1X_1)\cdots\exp(x^nX_n);$$
$$F_3:(x^1,\cdots,x^n)\mapsto \exp\left(\sum_{i=1}^r x^iX_i\right)\exp\left(\sum_{i=r+1}^n x^iX_i\right)$$

在原点 $(0,\cdots,0)$ 处的切映射都是恒等映射即可.

3. 设 G_α, $\alpha\in I$ 是 G 的所有连通分支. 对于任意的 $\alpha\in I$, 任意取定 $g_\alpha\in G_\alpha$, 则 $L_{g_\alpha}: G_0\to G_\alpha$ 是光滑同胚. 证明每一个 G_α 是 G 的既开又闭的子集. 取定 $p\in M$, $M=\bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha\cdot p$, 当 $\alpha\neq\beta$ 时 $G_\alpha\cdot p = G_\beta\cdot p$, 或 $G_\alpha\cdot p\cap G_\beta\cdot p=\emptyset$. 验证 $G_\alpha\cdot p$ 是 M 的非空开子集，然后利用 M 的连通性得到 $G_\alpha\cdot p = G_\beta\cdot p$, $\forall\alpha,\beta\in I$.

5. 根据例 4.2 的讨论，$\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{O}(n)$ 是黎曼对称空间. 采用例 4.2 中的记法，对于任意的 $A\in\mathrm{SO}(n+1)$, $A=(a_1,\cdots,a_{n+1})$, 其中 $\{a_1,\cdots,a_{n+1}\}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的一个单位正交基. 此时，A 的左陪集 $[A]=A\cdot K_\sigma$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一族单位正交基的集合：

$$\begin{aligned}[A] &= \{(\tilde{a}_1,\cdots,\tilde{a}_{n+1})\in\mathrm{SO}(n+1);\ \tilde{a}_{n+1}=\pm a_{n+1}\}\\ &=\left\{A\cdot\begin{pmatrix} B & 0\\ 0 & \det B\end{pmatrix};\ B\in\mathrm{O}(n)\right\}.\end{aligned}$$

因此，$[A]$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的满足 $\tilde{a}_{n+1}=\pm a_{n+1}$ 的全体单位正交基底 $(\tilde{a}_1,\cdots,\tilde{a}_{n+1})$ 构成的集合．于是可以定义映射

$$\psi:\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{O}(n)\to\mathbb{R}P^n,$$

使得 $\psi([A])=\pi_0(a_{n+1})$，其中 $\pi_0:S^n\to\mathbb{R}P^n$ 是自然投影．验证这样定义的映射 ψ 是一个光滑同胚．

6. 只需说明 $\mathrm{O}(n+1,1)$ 是一般线性群 $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})$ 的闭子群即可．

7. 根据李群 $\mathrm{O}(n+1,1)$ 的定义式 (4.34) 和 G 的定义式 (4.36) 说明，G 的李代数是

$$\mathfrak{g}=\{A\in\mathrm{M}(n+1,\mathbb{R});\ A^{\mathrm{t}}s+sA=0,\ \mathrm{tr}\,A=0\},$$

其中 $\mathrm{M}(n+1,\mathbb{R})$ 是由全体 $n+1$ 阶实方阵构成的集合．对于任意的 $A\in\mathrm{M}(n+1,\mathbb{R})$，如果把 $A=(a^i_j)$ 写成如下的分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_0&\xi\\ \eta&a^{n+1}_{n+1}\end{pmatrix},\qquad \xi=(a^1_{n+1},\cdots,a^n_{n+1})^{\mathrm{t}},\ \eta=(a^{n+1}_1,\cdots,a^{n+1}_n),$$

则 $A\in\mathfrak{g}$ 当且仅当 $A_0^{\mathrm{t}}=-A_0,\ \eta=\xi^{\mathrm{t}}$，并且 $a^{n+1}_{n+1}=0$．于是

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix}A_0&\xi\\ \xi^{\mathrm{t}}&0\end{pmatrix};\ A_0\in\mathrm{M}(n,\mathbb{R}),\ A_0^{\mathrm{t}}=-A_0,\xi\in\mathbb{R}^n\right\}\cong\mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}.$$

类似地可以得到对合自同构 σ 的不动点子群 K_σ 的李代数是

$$\mathfrak{k}=\left\{\begin{pmatrix}A_0&0\\ 0&0\end{pmatrix};\ A_0\in\mathrm{M}(n,\mathbb{R}),\ A_0^{\mathrm{t}}=-A_0\right\}\cong\mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n-1)}.$$

如果令 $\mathfrak{m}=\{A\in\mathfrak{g};\ \sigma_{*e}(A)=-A\}$，则有

$$\mathfrak{m}=\left\{\begin{pmatrix}0&\xi\\ \xi^{\mathrm{t}}&0\end{pmatrix};\ \xi\in\mathbb{R}^n\right\}\cong\mathbb{R}^n.$$

现在定义向量空间 $\mathfrak{m}$ 上的内积 g_0 如下：

$$g_0(A,B)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(AB),\qquad\forall A,B\in\mathfrak{m}.$$

对于 $A,B\in\mathfrak{m}$，可以设

$$A=\begin{pmatrix}0&\xi\\ \xi^{\mathrm{t}}&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&\eta\\ \eta^{\mathrm{t}}&0\end{pmatrix}\in\mathfrak{m},$$
$$\xi=(\xi^1,\cdots,\xi^n)^{\mathrm{t}},\quad \eta=(\eta^1,\cdots,\eta^n)^{\mathrm{t}}\in\mathbb{R}^n,$$

则 g_0 是 $\mathrm{Ad}(K_\sigma)$-不变的，并且有

$$g_0(A,B)=\sum_i\xi^i\eta^i=\langle\xi,\eta\rangle,$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准内积．可见，欧氏向量空间 $(\mathfrak{m},g_0)$ 和 $\mathbb{R}^n$ 是等距的．由于 g_0 是 $\mathrm{Ad}(K_\sigma)$-不变的，利用 G 在 G/K_σ 上的自然作用，可得到对称空间 G/K_σ 上的 G-不变黎曼度量 g，使得它在点 $o=eK_\sigma$ 的值是 g_0．

8. 设 n,r 是自然数，且 $r<n$．用 $\mathrm{G}_{n,r}$ 表示实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的所有 r 维子空间（不考虑其定向）构成的集合，则在 $\mathrm{G}_{n,r}$ 上有自然的光滑结构，使之成为 $r(n-r)$ 维光滑流形（参看参考参考文献 [14, 第 63 页，例 2.6]）．如同例 4.4 所述，任意的 $A\in\mathrm{SO}(p+q)$ 都可以看作在 $\mathbb{R}^{p+q}$ 中与标准基底 $\{\delta_i\}$ 具有相同定向的单位正交基底 $\{a_1,\cdots,a_{p+q}\}$，所以 A 在商空间 $\mathrm{SO}(p+q)/K_\sigma$ 中所对应的左陪集 $[A]=AK_\sigma$ 中的元素是在 $\mathbb{R}^{p+q}$ 中与 $\{\delta_i\}$ 定向相符的单位正交基底 $\{b_i\}$，其中 $\{b_1,\cdots,b_p\}$ 与 $\{a_1,\cdots,a_p\}$、$\{b_{p+1},\cdots,b_{p+q}\}$ 与 $\{a_{p+1},\cdots,a_{p+q}\}$ 各相差一个正交变换，这两个正交变换具有相同的行列式．因此，可以定义两个映射：

$$\psi_1:\mathrm{SO}(p+q)/K_\sigma\to\mathrm{G}_{p+q,p},\quad \psi_2:\mathrm{SO}(p+q)/K_\sigma\to\mathrm{G}_{p+q,q},$$

使得

$$\psi_1([A])=\mathrm{Span}\,\{a_1,\cdots,a_p\},\quad \psi_2([A])=\mathrm{Span}\,\{a_{p+1},\cdots,a_{p+q}\},$$

其中 $\mathrm{Span}\,\{\cdots\}$ 表示 $\mathbb{R}^{p+q}$ 的由向量组 $\{\cdots\}$ 所张成的线性子空间．

注意到 $\mathrm{SO}(p+q)$ 在 $\mathrm{G}_{p+q,p}$ 和 $\mathrm{G}_{p+q,q}$ 上分别有可迁的作用，它在固定点 $\varphi_1([I_{p+q}])$ 和 $\varphi_2([I_{p+q}])$ 的迷向子群是 K_σ，因此 ψ_1,ψ_2 都是光滑同胚．特别地，$\mathrm{G}_{p+q,p}$ 和 $\mathrm{G}_{p+q,q}$ 是光滑同胚的．

至于 $\mathrm{G}_{p+q,p}$ 上的中心对称，可以完全仿照例 4.4 中对 $\mathrm{SO}(p+q)/K_\sigma$ 的讨论去做，具体过程从略．

9. 特殊酉群 SU$(n+1)$ 在 n 维复射影空间 $\mathbb{C}P^n$ 上有一个自然的光滑作用：

$$(A,\pi(P))\mapsto\pi(AP),\quad\forall A\in\mathrm{SU}(n+1),\ P\in\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\},$$

其中 $\pi:\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}\to\mathbb{C}P^n$ 是自然投影．由于映射 $\varphi:\mathrm{SU}(n+1)/K_o\to\mathbb{C}P^n$ 是一一对应，为了证明本题的结论，只需说明 φ,φ^{-1} 都是光滑映射即可．另一方面，根据商空间 $\mathrm{SU}(n+1)/K_o$ 和 $\mathbb{C}P^n$ 的光滑结构的定义可以知道，从 $\mathrm{SU}(n+1)/K_o$ 到 $\mathbb{C}P^n$ 的映射 φ 是光滑的当且仅当 φ 和自然投影 $\mathrm{SU}(n+1)\to\mathrm{SU}(n+1)/K_o$ 的复合映射 $\mathrm{SU}(n+1)\to\mathbb{C}P^n$ 是光滑映射；从 $\mathbb{C}P^n$ 到 $\mathrm{SU}(n+1)/K_o$ 的映射 φ^{-1} 是光滑的当且仅当 φ^{-1} 和自然投影 $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}\to\mathbb{C}P^n$ 的复合映射 $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}\to\mathrm{SU}(n+1)/K_o$ 是光滑映射．不难知道，上述两个复合映射的定义都是自然的，也显然是光滑的．

10. (1) 对于任意的 $A\in\mathrm{U}(n+1)$，矩阵 A 的每一列可以看作 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的一个向量，因而 A 对应于 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的一个 Hermite 单位正交基底 $\{a_1,\cdots,a_{n+1}\}$．令 $K=\mathrm{U}(n)\times\mathrm{U}(1)$，则 A 在商空间 $\mathrm{U}(n+1)/K$ 中的左陪集 $[A]=A\cdot K$ 是 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中满足以下条件的 Hermite 单位正交基底 $\{\bar a_1,\cdots,\bar a_{n+1}\}$ 的集合：存在 $B\in\mathrm{U}(n)$，使得

$$(\bar a_1,\cdots,\bar a_n)=(a_1,\cdots,a_n)B,\quad\bar a_{n+1}=\lambda\cdot a_{n+1},$$

其中 $\lambda\in\mathbb{C}$，$|\lambda|=1$．设 $\pi_0:\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}\to\mathbb{C}P^n$ 是自然投影，并记 $\delta_{n+1}=(0,\cdots,0,1)\in\mathbb{C}^{n+1}$．定义映射 $\psi:\mathrm{U}(n+1)/K\to\mathbb{C}P^n$，使得

$$\psi([A])=\pi_0(A\delta_{n+1})=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{A\delta_{n+1}\},\quad\forall A\in\mathrm{U}(n+1).$$

上式右端表示在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中由 A 的最后一列元素组成的非零向量所张成的一维复子空间．采用例 4.5 中的讨论方法可以证明，ψ 是从 $\mathrm{U}(n+1)/K$ 到 $\mathbb{C}P^n$ 上的一一对应，细节从略．另外，根据本章习题第 9 题的思想，可以证明 ψ 和 ψ^{-1} 是光滑映射．

11. (1) 要证明 $\mathrm{D}J=0$，只需要证明：对于任意的 $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$，

$$(g((\mathrm{D}_XJ)(Y),Z))_p=0,\quad\forall p\in M.$$

为此，对于任意固定的一点 $p\in M$，设 σ 是 M 在点 p 的中心对称，则 $\sigma_{*p}=-\mathrm{id}_{T_pM}$．由于 σ 是等距并且 $\sigma_*\circ J=J\circ\sigma_*$，并用于点 p 得

$$(g((\mathrm{D}_XJ)(Y),Z))_p=-(g((\mathrm{D}_XJ)(Y),Z))_p.$$

所以，$(g((\mathrm{D}_XJ)(Y),Z))_p=0$．

(2) 根据复结构可积的定义，需要说明 J 的挠率张量 $\mathcal{N}$ 恒为零．为此需要应用 (1) 的结论，即

$$(\mathrm{D}_XJ)(Y)=\mathrm{D}_X(J(Y))-J(\mathrm{D}_XY)=0,\quad\forall X,Y\in\mathfrak{X}(M).$$

12. 设 $\pi:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}T^n$ 是自然投影，则由第八章的例 6.4，π 是局部全纯等距．因为 $\mathbb{C}^n$ 是 Hermite 对称空间，所以，$\mathbb{C}T^n$ 是 Hermite 局部对称空间．下面证明：对于每一点 $p\in\mathbb{C}T^n$，$\mathbb{C}T^n$ 在点 p 有大范围定义的中心对称 σ_p，并且 $\sigma_p:\mathbb{C}T^n\to\mathbb{C}T^n$ 是全纯等距．

13. 对于任意的 $p,q\in M$，由连通性，存在从 p 到 q 的连续曲线 $\gamma:[a,b]\to M$．利用 $\gamma([a,b])$ 的紧致性，可以得到区间 $[a,b]$ 的一个划分：$a=t_0<t_1<\cdots<t_N=b$，使得每一个 $p_i=\gamma(t_i)$ 包含在 $p_{i-1}=\gamma(t_{i-1})$ 的一个充分小的法坐标邻域中，$i=1,2,\cdots,N$．于是对于每一个 i，有从 p_{i-1} 到 p_i 的最短正规测地线段 γ_i．用 c_i 表示测地线段的中点，σ_i 表示 M 在点 c_i 的中心对称，则 $\sigma_i(p_{i-1})=p_i$，$i=1,2,\cdots,N$．令 $\sigma=\sigma_N\circ\cdots\circ\sigma_2\circ\sigma_1$，则有 $\sigma(p)=\sigma(p_0)=p_N=q$．因为每一个 $\sigma_i\in\mathrm{Hol}(M)$，所以 $\sigma\in\mathrm{Hol}(M)$．由 $p,q\in M$ 的任意性，$\mathrm{Hol}(M)$ 在 M 上的作用是可迁的．根据本章习题第 3 题的结论，$\mathrm{Hol}(M)$ 的单位元连通分支 G 在 M 上的作用也是可迁的．

14. 对于任意的 $p\in M$，用 σ 表示 M 在点 p 的中心对称．取 M 在点 p 的法坐标邻域 U，使得对于任意的 $q\in U$，$\sigma(q)\in U$ 有定义．现固定一点 $q\in U$，并且设 $\gamma:[0,b]\to M$ 是从 p 到 q 的正规测地线．由于 σ 是等距变换，$\tilde\gamma=\sigma(\gamma)$ 也是测地线，且有 $\tilde\gamma(b)=\sigma(q)$．又因为

$$\tilde\gamma'(0)=\sigma_{*p}(\gamma'(0))=-\gamma'(0),$$

所以可以把 $\tilde\gamma$ 反转方向后再与 γ 粘在一起得到从 $\sigma(q)$ 到 q 的测地线 $\gamma:[-b,b]\to M$．对于任意的 t_1,t_2，用 $P_{t_1}^{t_2}:T_{\gamma(t_1)}M\to T_{\gamma(t_2)}M$ 表示沿 γ 从 $\gamma(t_1)$ 到 $\gamma(t_2)$ 的平行移动．证明关系式

$$J_{\gamma(t_2)}\circ P_{t_1}^{t_2}=P_{t_1}^{t_2}\circ J_{\gamma(t_1)};\quad\sigma_{*\gamma(t_2)}\circ P_{t_1}^{t_2}=P_{-t_1}^{-t_2}\circ\sigma_{*\gamma(t_1)}.$$

现设 $X\in T_qM$，利用上面的关系式证明

$$\sigma_{*q}(J_q(X))=(J_{\sigma(b)}\circ\sigma_{*q})(X).$$

16. (1) 对于任意的 $p_0=\pi(z_0^1,\cdots,z_0^{n+1})\in \mathbb{C}Q^{n-1}\subset \mathbb{C}P^n$, 存在 $\alpha:\ 1\le\alpha\le n+1$, 使得

$$p_0\in U_\alpha:=\{\pi(z^1,\cdots,z^{n+1});\ z^\alpha\neq 0\}.$$

令 $\tilde{U}_\alpha=U_\alpha\cap \mathbb{C}Q^{n-1}$, 则 $\tilde{U}_\alpha$ 是点 p_0 在 $\mathbb{C}Q^{n-1}$ 中的开邻域. 如果 $\varphi_\alpha: U_\alpha\to\mathbb{C}^n$ 是 $\mathbb{C}P^n$ 在 U_α 上的局部坐标映射, 则

$$\varphi_\alpha(\tilde{U}_\alpha)=\left\{(\zeta^1,\cdots,\zeta^n)\in\mathbb{C}^n;\ \sum_{i=1}^n\zeta^i=-1\right\}$$

是 $\mathbb{C}^n$ 的复子流形. 由此不难看出, $\mathbb{C}Q^{n-1}$ 是 $\mathbb{C}P^n$ 的一个复子流形. 另一方面, 将 $\mathbb{C}P^n$ 上具有常全纯曲率 4 的 Fubini-Study Hermite 结构限制到 $\mathbb{C}Q^{n-1}$ 上, 可以得到 $\mathbb{C}Q^{n-1}$ 上的 Hermite 结构, 它所对应的 Kähler 形式是闭形式 (参看第八章的例 6.6).

(2) 设 $\mathrm{Hol}(\mathbb{C}P^n)$ 是 $\mathbb{C}P^n$ 的全纯等距群. 由第八章的例 6.2, 每一个 $A\in\mathrm{U}(n+1)$, 都对应一个全纯等距 $\Phi_A:\mathbb{C}P^n\to\mathbb{C}P^n$, 其定义是

$$\Phi_A(\pi(Z))=\pi(A\cdot Z);\quad \forall Z=(z^1,\cdots,z^{n+1})^t\in\mathbb{C}_*^{n+1}.$$

可以验证, 由 $A\mapsto\Phi_A=\Phi_A$ 给出的映射 $\Phi:\mathrm{U}(n+1)\to\mathrm{Hol}(\mathbb{C}P^n)$ 是李群同态, 它的核是 $\tilde{\mathrm{U}}(1)$. 下面证明 Φ 是满同态. 设

$$\tilde{A}\in\mathrm{Hol}(\mathbb{C}P^n),\quad p=\pi(\delta_{n+1}),\quad q=\tilde{A}(p).$$

分别取 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的两个酉基 $\{e_1,\cdots,e_{n+1}\}$, $\{\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_{n+1}\}$, 使得 $e_{n+1}\in p$, $\tilde{e}_{n+1}\in q$, 再设 A 是从 $\{e_1,\cdots,e_{n+1}\}$ 到 $\{\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_{n+1}\}$ 的过渡矩阵, 则 $A\in\mathrm{U}(n+1)$, 并且 $\Phi_A(p)=q$, $(\Phi_A)_{*p}=\tilde{A}_{*p}$. 根据第五章的引理 5.1, $\Phi_A=\tilde{A}$. 所以 $\Phi:\mathrm{U}(n+1)\to\mathrm{Hol}(\mathbb{C}P^n)$ 是满同态. 因此, 如果把 $A\in\mathrm{U}(n+1)$ 和 $\Phi_A\in\mathrm{Hol}(\mathbb{C}P^n)$ 等同起来, 便有 $\mathrm{U}(n+1)/\tilde{\mathrm{U}}(1)=\mathrm{Hol}(\mathbb{C}P^n)$. 同理可以说明 $\mathrm{SU}(n+1)/\tilde{\mathrm{U}}_0(1)=\mathrm{Hol}(\mathbb{C}P^n)$.

显然, 包含映射 $i:G\to\mathrm{SU}(n+1)$ 是群同态. 此外不难验证, G 是 $\mathrm{SU}(n+1)$ 的闭子群, 因而 G 是 $\mathrm{SU}(n+1)$ 的正则子流形. 于是 $i:G\to\mathrm{SU}(n+1)$ 是李群同态, 故而 G 是 $\mathrm{SU}(n+1)$ 的李子群.

(3) 对于任意的 $A\in G$, A 保持 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的对称内积

$$(Z,W)=Z^tW=\sum_{\alpha=1}^{n+1}Z^\alpha W^\alpha,$$
$$\forall Z=(z^1,\cdots,z^{n+1})^t,\ W=(w^1,\cdots,w^{n+1})^t\in\mathbb{C}^{n+1}$$

不变, 因而 Φ_A 保持 $\mathbb{C}Q^{n-1}$ 不变. 因为 $\mathbb{C}Q^{n-1}$ 是 $\mathbb{C}P^n$ 的 Kähler 子流形, 故 Φ_A 是 $\mathbb{C}Q^{n-1}$ 上的全纯等距变换. 所以, G 可以视为由 $\mathbb{C}Q^{n-1}$ 上的全纯等距变换构成的群.

为证明 G 在 $\mathbb{C}Q^{n-1}$ 上的作用是可迁的, 取 $Z_0=\frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_1+\sqrt{-1}\delta_2)$, 则 $p_0=\pi(Z_0)\in\mathbb{C}Q^{n-1}$. 对于任意的 $p\in\mathbb{C}Q^{n-1}$, 存在 $Z\in\mathbb{C}_*^{n+1}$, 满足 $(Z,Z)=0$, 并且 $p=\pi(Z)$. 不失一般性, 可以设 $Z=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+\sqrt{-1}e_2)$, 其中 e_1 和 e_2 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的两个单位正交向量. 把 e_1,e_2 扩充为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的一个单位正交基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_{n+1}\}$, 用 A 表示以这些基向量为列向量的矩阵, 则有 $A\in G$, 并且

$$AZ_0=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+\sqrt{-1}e_2)=Z,$$

从而 $\Phi_A(p_0)=\pi(Z)=p$.

(4) 按照定义, 对于任意的 $A\in G$, $A\in K\Longleftrightarrow$ 存在模长为 1 的复数 λ, 使得 $A(\delta_1+\sqrt{-1}\delta_2)=\lambda(\delta_1+\sqrt{-1}\delta_2)$. 设 $\lambda=\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$, 则

$$\lambda(\delta_1+\sqrt{-1}\delta_2)=\delta_1\cos\theta-\delta_2\sin\theta+\sqrt{-1}(\delta_1\sin\theta+\delta_2\cos\theta).$$

所以 $A\in K\Longleftrightarrow$ 存在实数 θ, 使得

$$A(\delta_1)=\delta_1\cos\theta-\delta_2\sin\theta,\qquad A(\delta_2)=\delta_1\sin\theta+\delta_2\cos\theta.$$

即 A 的第一列和第二列元素分别是

$$a_1=(\cos\theta,-\sin\theta,0,\cdots,0)^t,\qquad a_2=(\sin\theta,\cos\theta,0,\cdots,0)^t.$$

对于 $\theta\in\mathbb{R}$, 定义 2 阶正交矩阵

$$R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

则因为 A 是 $n+1$ 阶特殊正交矩阵，立即可得：$A \in K$ 当且仅当 A 能够写成如下的分块矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

因此，迷向子群 K 可以表示为

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}; \ A_1 \in \mathrm{SO}(2,\mathbb{R}), A_2 \in \mathrm{SO}(n-1,\mathbb{R}) \right\}.$$

根据本章习题第 4 题，存在光滑同胚 $f: G/K \to \mathbb{C}Q^{n-1}$，使得对于任意的 $A \in G$，$f(AK) = \Phi_A(p_0)$.

(5) 把自然投影 $\pi: \mathbb{C}_*^{n+1} \to \mathbb{C}P^n$ 限制到单位球面 S^{2n+1} 上，则对于任意的 $Z = x + \sqrt{-1}y \in S^{2n+1}$(其中 $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$)，有切映射

$$\Psi \equiv \pi_*: T_Z S^{2n+1} \to T_p \mathbb{C}P^n,$$

其中 $p = \pi(Z)$. 设 $(Z, Z) = 0$，则 $p \in \mathbb{C}Q^{n-1}$，并且 $|x| = |y| = \frac{1}{\sqrt{2}}$，$x \perp y$. 由于 $\sqrt{-1}\cdot Z, \overline{Z}, \sqrt{-1}\cdot\overline{Z} \in T_Z S^{2n+1}$，可以定义 $T_Z S^{2n+1}$ 的线性子空间

$$T'_Z = \{X \in T_Z S^{2n+1};\ X \perp \sqrt{-1}Z\};$$
$$T''_Z = \{X \in T_Z S^{2n+1};\ X \perp \sqrt{-1}\cdot Z, X \perp \overline{Z}, X \perp \sqrt{-1}\cdot\overline{Z}\},$$

容易证明 $\Psi: T'_Z \to T_p(\mathbb{C}P^n)$，$\Psi: T''_Z \to T_p(\mathbb{C}Q^{n-1})$ 是线性同构. 此外，把第八章的 (6.15) 式限制在 S^{2n+1} 上，不难看出，相对于 S^{2n+1} 的标准黎曼度量和 $\mathbb{C}P^n$ 上具有常全纯截面曲率 4 的 Fubini-Study 度量，映射 $\Psi: T'_Z \to T_p(\mathbb{C}P^n)$ 保持内积不变，因而 $\Psi: T''_Z \to \mathbb{C}Q^{n-1}$ 是一个等距的线性同构.

另一方面，由于对于每一个 $A \in G$，$\Phi_A: \mathbb{C}Q^{n-1} \to \mathbb{C}Q^{n-1}$ 是全纯等距，要证明映射 $f: G/K \to \mathbb{C}Q^{n-1}$ 是等距，只需说明：在 G/K 上存在一个 G-不变黎曼度量 g，使得 f 在点 $eK \in G/K$ 的切映射保持内积不变.

(7) 对于任意的 $[z^1, z^2], [z^3, z^4] \in \mathbb{C}P^1$，令

$$\varphi([z^1, z^2], [z^3, z^4]) = \pi(Z^1, Z^2, Z^3, Z^4) \in \mathbb{C}P^3,$$

其中

$$Z^1 = z^1 z^3 + z^2 z^4, \quad Z^2 = -\sqrt{-1}(z^1 z^3 - z^2 z^4),$$
$$Z^3 = -\sqrt{-1}(z^1 z^4 + z^2 z^3), \quad Z^4 = z^1 z^4 - z^2 z^3.$$

显然，$\varphi([z^1, z^2], [z^3, z^4]) \in \mathbb{C}Q^2$. 由

$$([z^1, z^2], [z^3, z^4]) \mapsto \varphi([z^1, z^2], [z^3, z^4])$$

定义了一个全纯映射 $\varphi: \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}Q^2$. 映射 φ 的逆映射 φ^{-1} 存在，它由下式给出：

$$\begin{aligned} &\varphi^{-1}\left(\pi\left(Z^1, Z^2, Z^3, Z^4\right)\right) \\ &\quad = \left(\left[Z^1 + \sqrt{-1}Z^2, \sqrt{-1}Z^3 - Z^4\right], \left[Z^1 + \sqrt{-1}Z^2, \sqrt{-1}Z^3 + Z^4\right]\right), \\ &\qquad \forall (Z^1, Z^2, Z^3, Z^4) \in \mathbb{C}_*^4. \end{aligned}$$

因此，φ^{-1} 也是全纯映射. 通过直接计算不难验证：当 $(z^1, z^2), (z^3, z^4) \in S^3$ 并且

$$(z^1, z^2) \perp \mathrm{d}(z^1, z^2), \quad \sqrt{-1}(z^1, z^2) \perp \mathrm{d}(z^1, z^2),$$
$$(z^3, z^4) \perp \mathrm{d}(z^3, z^4), \quad \sqrt{-1}(z^3, z^4) \perp \mathrm{d}(z^3, z^4)$$

时，

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z^1, Z^2, Z^3, Z^4) \in S^7, \quad Z \perp \mathrm{d}Z, \quad \sqrt{-1}Z \perp \mathrm{d}Z,$$

并且

$$\langle \mathrm{d}Z, \mathrm{d}Z \rangle = \langle \mathrm{d}(z^1, z^2), \mathrm{d}(z^1, z^2) \rangle + \langle \mathrm{d}(z^3, z^4), \mathrm{d}(z^3, z^4) \rangle.$$

所以由第八章的 (6.15) 式，映射 $\varphi: \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}Q^2$ 是等距，其中 $\mathbb{C}P^1$ 上的度量是具有常全纯曲率为 4 的 Fubini-Study 度量. 所以 $\mathbb{C}Q^2$ 和 $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ 全纯等距.

17. (1) 对于任意的

$$z = (z^1, \cdots, z^{n+1}), \quad w = (w^1, \cdots, w^{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1},$$

利用矩阵 s, 内积 $\langle z,w\rangle_1$ 可以表示为

$$\langle z,w\rangle_1 = zs\overline{w}^t,$$

其中右端是矩阵的普通乘法. 令 $G=\{T\in \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C});\ T^t s\overline{T}=s\}$. 设 $T\in \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})$, 则 $T\in \mathrm{U}(n+1,1)\Longleftrightarrow$ 对于任意的

$$z=(z^1,\cdots,z^{n+1}),\quad w=(w^1,\cdots,w^{n+1})\in\mathbb{C}^{n+1},$$

有 $\langle T(z),T(w)\rangle_1=\langle z,w\rangle_1$ 成立.

(2) 根据第八章的 (6.24) 式, 如果把 $T\in\mathrm{U}(n+1,1)$ 写成如下的分块矩阵

$$T=\begin{pmatrix} A & B\\ C & d\end{pmatrix},\qquad A\in \mathrm{M}(n,\mathbb{C}),$$

则有

$$A\cdot\bar{A}^t-B\cdot\bar{B}^t=I,\quad A\cdot\bar{C}^t-B\cdot\bar{d}=0,\quad |d|^2=1+C\cdot\bar{C}^t,$$
$$T(z)=\frac{z\cdot A+C}{z\cdot B+d},\quad \forall z=(z^1,\cdots,z^n)\in D^n.$$

由此不难知道,

$$T(0)=0\Longleftrightarrow 0=\frac{C}{d}\Longleftrightarrow B=C=0\Longleftrightarrow A\in\mathrm{U}(n),|d|=1.$$

(3) σ 显然是 $\mathrm{U}(n+1,1)$ 上的一个对合自同构. 对于任意的

$$T=\begin{pmatrix} A & B\\ C & d\end{pmatrix}\in\mathrm{U}(n+1,1),\qquad A\in\mathrm{M}(n,\mathbb{C}),$$

$T\in K_\sigma\Longleftrightarrow\sigma(T)=T$, 即 $sTs=T$. 后者等价于 $B=C=0$, 即 $A\in\mathrm{U}(n)$, $|d|=1$. 所以, $T\in K_\sigma\Longleftrightarrow T\in K=\mathrm{U}(n)\times\mathrm{U}(1)$.

(4) D^n 是 Hermite 对称空间, 其证明可以采用本章习题第 16 题的结论 (5) 的证法.

18. (1) 显然, $\tilde{U}_\alpha$ 可以改写为

$$\tilde{U}_\alpha=\{Z\in\mathrm{M}(p+q,p;\mathbb{C});\det Z_\alpha\neq 0\},$$

因而 $\tilde{U}_\alpha$ 是 $\mathbb{C}^{p(p+q)}=\mathrm{M}(p+q,p;\mathbb{C})$ 的开集. 又因为 $\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})$ 也是 $\mathrm{M}(p+q,p;\mathbb{C})$ 的开集, 并且 $\tilde{U}_\alpha\subset\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})$, 所以 $\tilde{U}_\alpha$ 是 $\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})$ 的开子集. (1) 的其余结论是直接的.

(2) 对于 $Z,W\in\tilde{U}_\alpha$, $\pi(W)=\pi(Z)$ 当且仅当 W 的 p 列元素和 Z 的 p 列元素可以互相线性表示, 或等价地, 存在 $C_p\in\mathrm{GL}(p,\mathbb{C})$ 使得 $W=ZC_p$, 从而有 $W_\alpha=Z_\alpha C_p$, $W_{\alpha^c}=Z_{\alpha^c}C_p$. 于是

$$\tilde{\varphi}_\alpha(W)=W_{\alpha^c}W_\alpha^{-1}=(Z_{\alpha^c}C_p)(Z_\alpha C_p)^{-1}=Z_{\alpha^c}Z_\alpha^{-1}=\tilde{\varphi}(Z).$$

(3) 定义

$$\mathscr{T}=\{U\subset \mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C});\ \pi^{-1}(U)\subset\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})\ 是开集\}.$$

则可以直接验证, $\mathscr{T}$ 满足拓扑定义中的三个条件, 因而是 $\mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$ 上的一个拓扑结构. 由 $\mathscr{T}$ 的定义立即可知, $\pi:\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})\to\mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$ 是连续映射. 此外, 对于 $\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})$ 中的任意一个开集 $\tilde{U}$,

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\pi(\tilde{U}))&=\{ZC_p;\ \forall Z\in\tilde{U},\ \forall C_p\in\mathrm{GL}(p,\mathbb{C})\}\\&=\bigcup_{C_p\in\mathrm{GL}(p,\mathbb{C})}\tilde{U}\cdot C_p,\end{aligned}$$

其中

$$\tilde{U}\cdot C_p=\{ZC_p;\ \forall Z\in\tilde{U}\}$$

显然是 $\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})$ 的开集. 因此, 它们的并集 $\pi^{-1}(\pi(\tilde{U}))$ 是 $\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})$ 的开集. 所以, π 是开映射.

为证明拓扑 $\mathscr{T}$ 的唯一性, 设 $\mathscr{T}'$ 是 $\mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$ 上的任意一个使 π 成为连续开映射的拓扑结构. 首先根据 π 关于 $\mathscr{T}'$ 的连续性和 $\mathscr{T}$ 的定义容易说明 $\mathscr{T}'\subset\mathscr{T}$; 另一方面, 对于任意的 $U\in\mathscr{T}$, $\pi^{-1}(U)$ 是 $\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})$ 的开集. 又因为 π 关于 $\mathscr{T}'$ 是开映射, 所以 $U=\pi(\pi^{-1}(U))\in\mathscr{T}'$. 故有 $\mathscr{T}\subset\mathscr{T}'$.

此外由 (1), $\tilde{U}_\alpha$ 是 $\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})$ 的开集, 所以 $U_\alpha=\pi(\tilde{U}_\alpha)$ 是 $\mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{R})$ 的开集. 对于任意的开集 $V\subset\mathbb{C}^{pq}=\mathrm{M}(q,p;\mathbb{C})$, 因为 $\tilde{\varphi}_\alpha:\tilde{U}_\alpha\to\mathbb{C}^{pq}$ 是连续映射, $\pi^{-1}(\varphi_\alpha^{-1}(V))=\tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(V)$ 是 $\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})$ 的开集, 所以

$\varphi_\alpha^{-1}(V)$ 是 $\mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{R})$ 的开集. 这说明 $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^{pq}$ 是连续映射. 对于任意的 $Y \in \mathrm{M}(q,p;\mathbb{C})$, 取 $Z \in \mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{R})$, 使得 $Z_\alpha = I_p$(单位矩阵), $Z_{\alpha^c} = Y$, 则 $\tilde{\varphi}_\alpha(Z) = Y$, 即 $\varphi_\alpha(\pi(Z)) = Y$. 因此, $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^{pq}$ 是满射. 对于 $Z, W \in \mathrm{M}^*(p+q,p)$, 如果 $\varphi_\alpha(\pi(Z)) = \varphi_\alpha(\pi(W))$, 或等价地, $\tilde{\varphi}_\alpha(Z) = \tilde{\varphi}_\alpha(W)$, 则有 $Z_{\alpha^c} Z_\alpha^{-1} = W_{\alpha^c} W_\alpha^{-1}$. 故 $Z_{\alpha^c} = W_{\alpha^c}(W_\alpha^{-1} Z_\alpha)$. 由此即知 $Z = W(W_\alpha^{-1} Z_\alpha)$, 因而 $\pi(Z) = \pi(W)$. 所以 $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^{pq}$ 是单射. 上面证明了映射 $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^{pq}$ 是可逆映射. 要说明 φ_α 是同胚, 只需证明 φ_α 是开映射即可. 为此, 设 U 是 U_α 的任意一个开集, 则 $\pi^{-1}(U)$ 是 $\tilde{U}_\alpha \subset \mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})$ 的开集. 对于任意的 $Y \in \varphi_\alpha(U)$, 存在 $Z \in \pi^{-1}(U)$, 使得 $\tilde{\varphi}_\alpha(Z) = Y$. 不失一般性, 可设 $Z_\alpha = I_p$; $Z_{\alpha^c} = Y$. 由于 Z 是 $\pi^{-1}(U)$ 的内点, 有正数 δ, 使得对于任意的 $Z' \in \mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})$, 只要 $\|Z' - Z\| < \delta$, 便有 $Z' \in \pi^{-1}(U)$, 因而有 $\varphi_\alpha(\pi(Z')) \in \varphi_\alpha(U)$. 特别地, 对于任意的 $Y' \in \mathbb{C}^{pq}$, 当 $\|Y' - Y\| < \delta$ 时, 只要取 $Z' \in \mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})$, 使得 $Z'_\alpha = I_p$, $Z'_{\alpha^c} = Y'$, 便有 $\|Z' - Z\| < \delta$, 故有 $Y' = \varphi_\alpha(\pi(Z')) \in \varphi_\alpha(U)$. 这说明 $\varphi_\alpha(U)$ 中的任意一点 Y 都是内点, 因而是 $\mathbb{C}^{pq}$ 的开集.

(4) 对于任意的 $Y = (y_\lambda^a) \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathrm{M}(q,p;\mathbb{C})$, 取 $Z \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$, 使得 $Z_\alpha = I_p$, $Z_{\alpha^c} = Y$. 令 $W = Z \cdot Z_\beta^{-1}$, 则有 $W_\beta = I_p$, 并且 $W_{\beta^c} = Z_{\beta^c} \cdot Z_\beta^{-1}$. 于是 W_{β^c} 的每一个元素都是 y_λ^a 的有理函数, 因而是 y_λ^a 的全纯函数. 又因为

$$(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(Y) = \varphi_\beta(\pi(Z)) = \varphi_\beta(\pi(W)) = \tilde{\varphi}_\beta(W) = W_{\beta^c},$$

所以 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 是全纯映射.

(5) 给定 $T \in \mathrm{U}(p+q)$ 和 $x \in \mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$. 任意取 p 维子空间 x 的一个基底 $\{v_1, \cdots, v_p\}$, 令 V 是以 $v_1, \cdots, v_p$ 为列向量的矩阵, 则有 $\pi(V) = x$. 现设 $Z \in \pi^{-1}(x)$, 则

$$\Psi_T(x) = \Psi_T(\pi(V)) = \Psi_T(\pi(Z)) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(TZ) = \pi(TZ).$$

对于任意的 $\alpha \in \Lambda$, 以及任意的 $Y = (y_\lambda^a) \in \varphi_\alpha(U_\alpha) = \mathbb{C}^{pq}$, 取 $Z \in \pi^{-1}(U_\alpha)$, 使得 $Z_\alpha = I_p$, $Z_{\alpha^c} = Y$. 则

$$(\Psi_T \circ \varphi_\alpha^{-1})(Y) = \Psi_T(\pi(Z)) = \pi(TZ).$$

取 $\beta \in \Lambda$, 使得 $\tilde{Z} = TZ \in \tilde{U}_\beta$. 由 φ_β 和 $\tilde{\varphi}_\beta$ 的定义

$$\varphi_\beta(\pi(TZ)) = \tilde{\varphi}_\beta(TZ) = \tilde{Z}_{\beta^c} \tilde{Z}_\beta^{-1}.$$

于是

$$(\varphi_\beta \circ \Psi_T \circ \varphi_\alpha^{-1})(Y) = \varphi_\beta(\pi(TZ)) = \tilde{Z}_{\beta^c} \tilde{Z}_\beta^{-1}.$$

上式右端矩阵的元素显然都是 y_λ^a 的全纯函数, 因而 $\varphi_\beta \circ \Psi_T \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 是全纯映射. 由 α 的任意性, $\Psi_T : \mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C}) \to \mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$ 是全纯映射.

(6) 注意到 $\mathrm{U}(p+q)$ 是 $\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{C})$ 的嵌入子流形, 则由 (5) 的证明不难看出, 映射 Ψ 的局部表示关于 T 和 x 是光滑映射. 此外, 由 Ψ 的定义可以直接验证, Ψ 满足: 1°. 对于任意的 $x \in \mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$, $\Psi(I_{p+q}, x) = x$, 这里 I_{p+q} 是 $p+q$ 阶单位矩阵; 2°. 对于任意的 $T_1, T_2 \in \mathrm{U}(p+q)$ 和任意的 $x \in \mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$, $\Psi(T_1, \Psi(T_2, x)) = \Psi(T_1 \cdot T_2, x)$. 因此, $\Psi : \mathrm{U}(p+q) \times \mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C}) \to \mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$ 是 $\mathrm{U}(p+q)$ 在 $\mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$ 上的一个光滑作用.

再设 $x, \tilde{x}$ 是 $\mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$ 上的任意两点, 分别取子空间 $x, \tilde{x}$ 的酉基底 $\{e_1, \cdots, e_p\}$ 和 $\{\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_p\}$, 并把它们分别扩充为 $\mathbb{C}^{p+q}$ 的两个酉基底

$$\{e_1, \cdots, e_{p+q}\} \text{ 和 } \{\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_{p+q}\}.$$

则存在唯一的 $T \in \mathrm{U}(p+q)$, 使得

$$(\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_{p+q}) = (T(e_1), \cdots, T(e_{p+q})).$$

特别地,

$$(\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_p) = (T(e_1), \cdots, T(e_p)),$$

因而

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_p\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{T(e_1), \cdots, T(e_p)\} \\ &= \Psi_T(\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1, \cdots, e_p\}) = \Psi_T(x).\end{aligned}$$

所以, $\mathrm{U}(p+q)$ 在 $\mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$ 上的作用是可迁的.

(7) 设 $T \in \mathrm{U}(p+q)$. 把 T 写成如下的分块矩阵:

$$T = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}, \text{ 其中 } A \in \mathrm{M}(p,\mathbb{C}), \quad B \in \mathrm{M}(q,\mathbb{C}).$$

如果 $\Psi_T(x_0)=x_0$, 则存在 $A_0\in \mathrm{GL}(p,\mathbb{C})$, 使得

$$(T(\delta_1),\cdots,T(\delta_p))=(\delta_1,\cdots,\delta_p)A_0.$$

由此易知 $A=A_0$, $D=0$. 由 $T\overline{T}^{\mathrm{t}}=I_{p+q}$ 可知

$$C=D=0,\quad A\overline{A}^{\mathrm{t}}=I_p,\quad B\overline{B}^{\mathrm{t}}=I_q,$$

即 $A\in \mathrm{U}(p)$, $B\in\mathrm{U}(q)$. 所以

$$\begin{aligned}K&=\{T\in \mathrm{U}(p+q);\ T(x_0)=x_0\}\\&\subset\left\{\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix};\ A\in\mathrm{U}(p),\ B\in\mathrm{U}(q)\right\}\equiv \mathrm{U}(p)\times\mathrm{U}(q).\end{aligned}$$

反包含关系是显然的.

(8) 设 $A\in\mathrm{U}(p)$, $Z\in \mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})$, $Z_1,\cdots,Z_p$ 是矩阵 Z 的 p 个列向量, 它们构成子空间 $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(Z)$ 的基底. 如果 $ZA=Z$, 则 A 把基底 $\{Z_1,\cdots,Z_p\}$ 变成自己. 这样的矩阵 A 只能是单位矩阵 I_p.

(9) 第一个结论由自然投影 π 的定义直接得到. 对于任意的 $Z,\tilde{Z}\in\pi^{-1}(x)$, 它们的列向量分别记为 $Z_1,\cdots,Z_p$ 和 $\tilde{Z}_1,\cdots,\tilde{Z}_p$. 则

$$\{Z_1,\cdots,Z_p\}\ 和\ \{\tilde{Z}_1,\cdots,\tilde{Z}_p\}$$

都是子空间 x 的基底, 因而有 $A\in\mathrm{GL}(p,\mathbb{C})$, 使得

$$(\tilde{Z}_1,\cdots,\tilde{Z}_p)=(Z_1,\cdots,Z_p)A.$$

此式即 $\tilde{Z}=ZA$. 由于 $Z,\tilde{Z}\in \mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})$ 的任意性, $\mathrm{GL}(p,\mathbb{C})$ 在 $\pi^{-1}(x)$ 上右作用是可迁的.

(10) 设 $T\in\mathrm{U}(p+q)$. 如果对于任意的 $Z\in\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})$, 都有 $TZ=Z$, 则对于每一个多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)$, 下式

$$(T(\delta_{\alpha_1}),\cdots,T(\delta_{\alpha_p}))=T(\delta_{\alpha_1},\cdots,\delta_{\alpha_p})=(\delta_{\alpha_1},\cdots,\delta_{\alpha_p})$$

都成立. 由 α 的任意性, $T(\delta_i)=\delta_i$, $1\le i\le p+q$. 于是 $T=I_{p+q}$ 是单位矩阵. 根据有效作用的定义知, $\mathrm{U}(p+q)$ 在 $\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})$ 上的作用是有效的.

(11) 对于任意的 $T\in\mathrm{U}(p+q)$ 和任意的 $A\in\mathrm{GL}(p,\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}\det((TZ)^{\mathrm{t}}(\overline{TZ}))&=\det(Z^{\mathrm{t}}(T^{\mathrm{t}}\overline{T})\overline{Z})=\det(Z^{\mathrm{t}}I_{p+q}\overline{Z})=\det(Z^{\mathrm{t}}\overline{Z}),\\ \det((ZA)^{\mathrm{t}}(\overline{ZA}))&=\det(A^{\mathrm{t}}(Z^{\mathrm{t}}\overline{Z})\overline{A})=\det(A^{\mathrm{t}})\det(Z^{\mathrm{t}}\overline{Z})\det(\overline{A})\\&=|\det A|^2\det(Z^{\mathrm{t}}\overline{Z}),\quad \forall Z\in\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C}).\end{aligned}$$

由此可知, $\tilde{\Phi}$ 关于 $\mathrm{U}(p+q)$ 在 $\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})$ 上的左作用和 $\mathrm{GL}(p,\mathbb{C})$ 在 $\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})$ 上的右作用都是不变的.

下面在 $G_{p,q}(\mathbb{C})$ 上定义二次形式 Φ, 使得 $\pi^*\Phi=\tilde{\Phi}$. 为此, 设 $x\in G_{p,q}(\mathbb{C})$, 取定义在 x 附近的全纯映射 $\tau:U\to\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})$, 使得 $\pi\circ\tau=\mathrm{id}_U$, 并且令 $\Phi_\tau=\tau^*\tilde{\Phi}$, 则 Φ_τ 是定义在 U 上的 $(1,1)$ 型闭形式. 如果 $\bar{\tau}:V\to\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})$ 定义在 x 附近并且满足 $\pi\circ\bar{\tau}=\mathrm{id}_V$ 的另一个全纯映射, 则有全纯映射 $A:U\cap V\to\mathrm{GL}(p,\mathbb{C})$, 使得

$$\bar{\tau}(y)=\tau(y)\cdot A(y),\quad \forall y\in U\cap V.$$

由此容易知道,

$$\begin{aligned}(\Phi_{\bar{\tau}})|_{U\cap V}&=(\bar{\tau}^*\tilde{\Phi})|_{U\cap V}=(\bar{\tau}^*\tilde{\Phi})|_{U\cap V}\\&=-4\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\ln\det((\bar{\tau}(y))^{\mathrm{t}}\overline{\bar{\tau}(y)})\\&=-4\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\ln\det((A(y))^{\mathrm{t}}((\tau(y))^{\mathrm{t}}\overline{\tau(y)})\overline{A(y)})\\&=-4\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\ln\det((\tau(y))^{\mathrm{t}}\overline{\tau(y)})-4\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\ln|\det(A(y))|^2\\&=-4\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\ln\det((\tau(y))^{\mathrm{t}}\overline{\tau(y)})\\&=(\tau^*\tilde{\Phi})|_{U\cap V}=(\Phi_\tau)|_{U\cap V}.\end{aligned}$$

所以, 如果把所有这样的 Φ_τ 粘贴起来即可得到一个在 $G_{p,q}(\mathbb{C})$ 上处处有定义的 $(1,1)$-闭形式 Φ, 使得对于每一个 τ, $\Phi|_U=\Phi_\tau$.

下面验证 $\pi^*\Phi=\tilde{\Phi}$. 对于任意的 $x\in G_{p,q}(\mathbb{C})$, 取定义在 x 点附近的全纯映射 $\tau:U\to M^*(p+q,p;\mathbb{C})$, 使得 τ 满足 $\pi\circ\tau=\mathrm{id}_U$. 则 $F=\tau\circ\pi$ 是全纯映射, 它满足 $\pi\circ F=\pi$. 于是存在全纯映射 $a:U\to\mathrm{GL}(p,\mathbb{C})$, 使得

$$F(Z)=Z\cdot a(Z),\quad \forall Z\in U.$$

因此

$$\begin{aligned}\pi^*(\Phi|_U) =&\pi^*(\tau^*\tilde\Phi) = (\tau\circ\pi)^*\tilde\Phi = F^*\tilde\Phi\\
=&-4\sqrt{-1}\partial\bar\partial\ln\det((F(Z))^t\overline{F(Z)})\\
=&-4\sqrt{-1}\partial\bar\partial\ln\det((a(Z))^t(Z^t\bar Z)\overline{a(Z)})\\
=&-4\sqrt{-1}\partial\bar\partial\ln\det(Z^t\bar Z)-4\sqrt{-1}\partial\bar\partial\ln|\det((a(Z))|^2\\
=&-4\sqrt{-1}\partial\bar\partial\ln\det(Z^t\bar Z)=\tilde\Phi|_{\pi^{-1}(U)}.\end{aligned}$$

再由 $x\in \mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$ 的任意性，$\pi^*\Phi=\tilde\Phi$.

最后，对于任意 $T\in \mathrm{U}(p+q)$，因为 T 在 $\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})$ 上的左作用保持 $\tilde\Phi$ 不变，所以 T 在 $\mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$ 上的诱导作用 $\Psi_T:\mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})\to\mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$ 满足

$$\Psi_T^*\Phi=\Phi.$$

(12) 首先证明，如果 $\tilde J$ 是 $\mathrm{M}^*(p+q,p;\mathbb{C})$ 上的典型复结构，则 $\tilde\Phi$ 是 $\tilde J$ 不变的；再利用自然投影的全纯性可以证明 Φ 是 J-不变的. 对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(\mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C}))$，记 $g(X,Y)=\Phi(JX,Y)$，则由于 Φ 是反对称的和 J-不变的，g 是 $\mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$ 上的一个 J-不变的二阶对称协变张量场. 因此，为证明 h 是 $\mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$ 上的 Hermite 结构，只需说明 g 是正定的. 注意到 $\mathrm{U}(p+q)$ 在 $\mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$ 上的左作用是可迁的，并且 g 是 $\mathrm{U}(p+q)$-不变的，所以只需要说明 g 在某一个特殊点处是正定的即可. 为此，令

$$Z_0=\begin{pmatrix}I_p\\0\end{pmatrix},\quad x_0=\pi(Z_0),\quad \alpha=(1,\cdots,p);$$

则 $Z_0\in\tilde U_\alpha$，$x_0\in U_\alpha$. 对于任意的 $x\in U_\alpha$ 和任意的 $Z\in\pi^{-1}(x)$，x 在 U_α 中的局部复坐标是 $Y=Z_{\alpha^c}Z_\alpha^{-1}$. 因为

$$Z^t\bar Z=Z_\alpha^t\bar Z_\alpha+Z_{\alpha^c}^t\bar Z_{\alpha^c}=Z_\alpha^t(I_p+Y^t\bar Y)\bar Z_\alpha,$$

所以在 $\tilde U_\alpha$ 上，有

$$\begin{aligned}\partial\bar\partial\ln\det(Z^t\bar Z)=&\partial\bar\partial\ln\det(Z_\alpha^t(I_p+Y^t\bar Y)\bar Z_\alpha)\\
=&\partial\bar\partial\ln\det(I_p+Y^t\bar Y)+\partial\bar\partial\ln|\det Z_\alpha|^2\\
=&\partial\bar\partial\ln\det(I_p+Y^t\bar Y).\end{aligned}$$

由此结合 Φ 的定义可知

$$\Phi=-4\sqrt{-1}\partial\bar\partial\ln\det(I_p+Y^t\bar Y).$$

因为 Y 是 U_α 中点的复坐标，所以

$$\partial Y=\mathrm{d}Y,\quad \bar\partial Y=0,\quad \partial\bar Y=0,\quad \bar\partial\bar Y=\overline{\mathrm{d}Y};$$
$$J(\mathrm{d}Y)=\sqrt{-1}\mathrm{d}Y,\quad J(\overline{\mathrm{d}Y})=-\sqrt{-1}\overline{\mathrm{d}Y}.$$

据此进行直接计算可知，在点 x_0 处 (即当 $Y=0$ 时)，$g=8\mathrm{tr}(\mathrm{d}Y^t\cdot\overline{\mathrm{d}Y})$. 因此，$g$ 在点 x_0 处是正定的.

(13) σ 显然是 $\mathrm{U}(p+q)$ 上的对合自同构. 对于任意的 $T\in\mathrm{U}(p+q)$，把它写成如下的分块矩阵

$$T=\begin{pmatrix}A&C\\D&B\end{pmatrix},\quad 其中\ A\in\mathrm{M}(p,\mathbb{C}),\ B\in\mathrm{M}(q,\mathbb{C}).$$

则

$$\begin{aligned}T\in K_\sigma&\Longleftrightarrow\varepsilon_{p,q}T\varepsilon_{p,q}=T\Longleftrightarrow\varepsilon_{p,q}T=T\varepsilon_{p,q}\\
&\Longleftrightarrow C=D=0\Longleftrightarrow A\in\mathrm{U}(p),\ B\in\mathrm{U}(q).\end{aligned}$$

所以

$$K_\sigma=\left\{\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix};\ A\in\mathrm{U}(p),\ B\in\mathrm{U}(q)\right\}\cong\mathrm{U}(p)\times\mathrm{U}(q).$$

(14) 设 $\tilde\pi:\mathrm{U}(p+q)\to\mathrm{U}(p+q)/K$ 是自然投影，$e=I_{p+q}$. 因为 K 是 $\mathrm{U}(p+q)$ 的紧子群，所以切空间 $T_{eK}(\mathrm{U}(p+q)/K)$ 存在 K-不变内积，而且每一个这样的不变内积确定了 $\mathrm{U}(p+q)/K$ 上的一个 $\mathrm{U}(p+q)$-不变黎曼度量，使得 $\mathrm{U}(p+q)/K$ 成为黎曼对称空间. 此时，它在点 eK 处的中心对称 σ_0 的定义是

$$\sigma_0(\tilde\pi(T))=\tilde\pi(\sigma(T))=\tilde\pi(\varepsilon_{p,q}T\varepsilon_{p,q}).$$

另外，齐性空间 $\mathrm{U}(p+q)/K$ 到复射影空间 $\mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$ 的等同映射

$$f:\mathrm{U}(p+q)/K\to\mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$$

的定义是

$$f(\bar{\pi}(T)) = \pi(TZ_0), \quad \forall T \in \mathrm{U}(p+q), \qquad 其中\ Z_0 = \begin{pmatrix} I_p \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因此，映射 f 关于 $\mathrm{U}(p+q)$ 在 $\mathrm{U}(p+q)/K$ 和 $\mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$ 上的自然作用是等变的．于是可以取定 $\mathrm{U}(p+q)/K$ 上的 $\mathrm{U}(p+q)$-不变黎曼度量，使得 $f:\mathrm{U}(p+q)/K \to \mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$ 是等距，因而 $\mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$ 是黎曼对称空间．它在点 $x_0 = \pi(Z_0)$ 处的中心对称 $\tilde{\sigma}_{x_0}$ 可以通过等同映射 f 表示为

$$\tilde{\sigma}_{x_0}(x) = f(\bar{\pi}(\sigma_0(T))) = \pi(\varepsilon_{p,q}T\varepsilon_{p,q}Z_0),$$

其中 $x = \Psi_T(x_0) = \pi(TZ_0) \in \mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$．由于 π 是全纯映射，不难知道，$\tilde{\sigma}_{x_0}$ 也是全纯映射．另一方面，$\mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$ 在任意一点 $x = \pi(TZ_0) \in \mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$ 处的中心对称 $\tilde{\sigma}_x$ 定义如下：

$$\tilde{\sigma}_x(y) = \Psi_T(\tilde{\sigma}_{x_0}(\Psi_{T^{-1}}(y))), \quad \forall y \in \mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C}).$$

于是利用 $\tilde{\sigma}_{x_0}$ 的全纯性可以看出，$\tilde{\sigma}_x$ 是全纯的．所以 $\mathrm{G}_{p,q}(\mathbb{C})$ 是 Hermite 对称空间．

19. 由第八章的例 6.5，$\mathrm{U}(p+q,q)$ 全纯地作用于 $D_{p,q}$．根据第八章习题第 29 题的结论 (2)，$\mathrm{U}(p+q,q)$ 在 $D_{p,q}$ 上的这种作用是可迁的．此外由第八章的 (6.32) 式容易知道，$\mathrm{U}(p+q,q)$ 在原点 O 处的迷向子群是 $K = \mathrm{U}(p)\times\mathrm{U}(q)$．于是，$D_{p,q}$ 等同于齐性空间 $\mathrm{U}(p+q,q)/K$．对于任意的 $T\in\mathrm{U}(p+q,q)$，定义 $\sigma(T) = \varepsilon_{p,q}T\varepsilon_{p,q}$，则映射 $\sigma:\mathrm{U}(p+q,q)\to\mathrm{U}(p+q,q)$ 是 $\mathrm{U}(p+q,q)$ 上的一个对合自同构．可以直接算出，σ 的不动点子群正是 K．由于 K 是紧致的，$D_{p,q} = \mathrm{U}(p+q,q)/K$ 是黎曼对称空间．注意到 $\mathrm{U}(p+q,q)$ 的作用保持 $D_{p,q}$ 上的 Hermite 内积不变 (参看第八章的例 6.5)，采用本章习题第 18 题的做法说明 $D_{p,q}$ 是 Hermite 对称空间．

20. 显然，K 是群 G 的闭子群，因而商空间 G/K 是光滑流形．对于任意的 $g_1, g_2 \in G$，如果 $\tilde{\varphi}(g_1K) = \tilde{\varphi}(g_2K)$，则有 $\varphi(g_1)\tilde{K} = \varphi(g_2)\tilde{K}$．所以

$$\varphi(g_1^{-1}\cdot g_2) = (\varphi(g_1))^{-1}\varphi(g_2) \in \tilde{K},$$

因而 $g_1^{-1}g_2 \in \varphi^{-1}(\tilde{K}) = K$．于是，$g_1K = g_2K$．这说明，映射 $\tilde{\varphi}: G/K \to \tilde{G}/\tilde{K}$ 是一个单射．再由假设条件，$\tilde{\varphi}$ 是双射．因此，根据反函数定理，为

证明所需的结论，只要说明映射 $\tilde{\varphi}$ 处处是浸入．又因为 $\tilde{\varphi}$ 关于群的左作用是等变的，而且根据商空间 G/K 和 $\tilde{G}/\tilde{K}$ 上微分结构的定义，群的左作用是商空间的光滑同胚，所以只要证明 $\tilde{\varphi}$ 在点 eK 处是浸入即可，其中 e 是群 G 的单位元．因为 $\varphi: G\to\tilde{G}$ 是满射，所以它在单位元 e 处的切映射 φ_{*e} 也是满射．设 T_eK 和 $T_{\tilde{e}}\tilde{K}$ 分别是闭子群 K 和 $\tilde{K}$ 在单位元处的切空间，则容易验证：$T_eK = \varphi_{*e}^{-1}(T_{\tilde{e}}\tilde{K})$，因而 φ_{*e} 诱导了线性商空间之间的同构 $\Phi: T_eG/T_eK \to T_{\tilde{e}}\tilde{G}/T_{\tilde{e}}\tilde{K}$．最后，由商空间 G/K 和 $\tilde{G}/\tilde{K}$ 上微分结构的构造以及 $\tilde{\varphi}$ 的定义不难知道 $\tilde{\varphi}_{*eK}$ 是线性同构．

21. (1) 作取李代数 $\mathfrak{g}$ 的基底 $\{e_i\}$，它的对偶基记为 $\{\omega^i\}$，则由线性变换的迹的定义，

$$B(X,Y) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}(X)\circ\mathrm{ad}(Y)) = \sum_i \omega^i([X,[Y,e_i]]), \quad \forall X,Y\in\mathfrak{g}.$$

于是由括号积 $[X,Y]$ 的双线性性质立即可知，Killing 形式 B 是双线性的．

(2) 利用 Jacobi 恒等式．

22. 首先，对于每一个 $i=1,\cdots,r$，取 $\mathfrak{g}_i$ 的基底 $\{e_{a_i}^{(i)}\}$，相应的对偶基设为 $\{\omega_{(i)}^{a_i}\}$，则 $\{e_{a_1}^{(1)},\cdots,e_{a_r}^{(r)}\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的基，其对偶基是 $\{\omega_{(1)}^{a_1},\cdots,\omega_{(r)}^{a_r}\}$．另一方面，由李代数的理想的定义，对于任意的 i，$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}_i]\subset\mathfrak{g}_i$．于是当 $i\neq j$ 时，只要 $X\in\mathfrak{g}_i$，$Y\in\mathfrak{g}_j$，便有 $[X,Y]\in\mathfrak{g}_i\cap\mathfrak{g}_j=\{0\}$，因而有 $[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j]=\{0\}$．所以对于任意的 $X\in\mathfrak{g}_i$ 和 $Y\in\mathfrak{g}_j$，

$$B(X,Y) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}(X)\circ\mathrm{ad}(Y)) = \sum_{i,a_i}\omega_{(i)}^{a_i}([X,[Y,e_{a_i}^{(i)}]]) = 0.$$

于是，当 $i\neq j$ 时，$B(\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j)=0$．

此外，对于每一个固定的 i，设 B_i 是 $\mathfrak{g}_i$ 上的 Killing 形式．则对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{g}_i$，当 $j\neq i$ 时，因为 $[Y,e_{a_j}^{(j)}]=0$，所以

$$B(X,Y) = \sum_{j,a_j}\omega_{(j)}^{a_j}([X,[Y,e_{a_j}^{(j)}]]) = \sum_{a_i}\omega_{(i)}^{a_i}([X,[Y,e_{a_i}^{(i)}]]) = B_i(X,Y).$$

23. 设 B 是紧致李代数 $\mathfrak{g}$ 上的 Killing 形式．存在紧致的李群 G，使得 G 的李代数同构于 $\mathfrak{g}$．任意取 G 上的一个双不变黎曼度量，它在 $\mathfrak{g}$ 上诱导了一个

$\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$-不变内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, 即有

$$\langle \mathrm{ad}(X)Y, Z\rangle + \langle Y, \mathrm{ad}(X)Z\rangle = 0, \quad \forall X,Y,Z\in\mathfrak{g}.$$

因此, $\mathrm{ad}(X)$ 作为 $\mathfrak{g}$ 上的线性变换关于内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是反对称的. 任意取定 $\mathfrak{g}$ 的一个基 $\{e_a\}$, 其对偶基记为 $\{\omega^a\}$. 如果 $\mathrm{ad}(X)$ 关于 $\{e_a\}$ 的矩阵仍然记为 $\mathrm{ad}(X)$, 则线性变换 $\mathrm{ad}(X)\circ\mathrm{ad}(X)$ 关于 $\{e_a\}$ 的矩阵是

$$\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(X) = -\mathrm{ad}(X)\cdot(\mathrm{ad}(X))^t.$$

所以

$$\begin{aligned}B(X,X) =& \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}(X)\circ\mathrm{ad}(X)) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}(X)\cdot\mathrm{ad}(X))\\ =& -\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}(X)\cdot(\mathrm{ad}(X))^t) \le 0.\end{aligned}$$

由 $X\in\mathfrak{g}$ 的任意性, B 是半负定的.

24. (1) 建立映射 $f:\mathfrak{g}\to\tilde{\mathfrak{g}}$, 使得

$$f(k+m) = k+\sqrt{-1}m, \quad \forall k\in\mathfrak{k},\ m\in\mathfrak{m},$$

则 f 是实线性同构. 利用 f 可以把 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 和 $\mathfrak{g}$(作为实线性空间) 等同起来, 因而可以把李群 $\mathrm{GL}(\tilde{\mathfrak{g}})$ 和 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 等同起来. 在此意义下, $\mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\mathfrak{k})$ 等同于 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$, 从而 $\mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\mathfrak{k})$ 和 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ 分别在 $\mathrm{GL}(\tilde{\mathfrak{g}})$ 和 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 中生成的子群是等同的. 所以由正交对称李代数的定义, 当 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是正交对称李代数时, $(\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\sigma})$ 也是正交对称李代数.

显然, $\tilde{\mathfrak{g}}^C = \mathfrak{g}^C$, $\tilde{\sigma}$ 在 $\tilde{\mathfrak{g}}^C$ 上复线性扩充等于 σ. 可以把 $\mathfrak{g}^C$ 改写为

$$\mathfrak{g}^C = \tilde{\mathfrak{g}}\oplus\sqrt{-1}\tilde{\mathfrak{g}}.$$

$\mathfrak{g}^C$ 上关于 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的共轭映射记为 τ_1. 下面计算半对合 $\tilde{\tau}_1 = \sigma\circ\tau_1$ 的不动点集. 对于任意的 $g_1+\sqrt{-1}g_2\in\mathfrak{g}^C$, 有 $k_1,k_2\in\mathfrak{k}$, $m_1,m_2\in\mathfrak{m}$, 使得

$$g_1 = k_1+m_1, \quad g_2 = k_2+m_2.$$

于是

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_1(g_1+\sqrt{-1}g_2) =& \sigma(\tau_1(k_1+\sqrt{-1}m_2+\sqrt{-1}(k_2-\sqrt{-1}m_1)))\\
=&\sigma(k_1+\sqrt{-1}m_2-\sqrt{-1}(k_2-\sqrt{-1}m_1))\\
=&\sigma(k_1)+\sqrt{-1}\sigma(m_2)-\sqrt{-1}(\sigma(k_2)-\sqrt{-1}\sigma(m_1))\\
=&k_1-\sqrt{-1}m_2-\sqrt{-1}k_2+m_1 = k_1+m_1-\sqrt{-1}(k_2+m_2)\\
=&g_1-\sqrt{-1}g_2.\end{aligned}$$

所以, $g_1+\sqrt{-1}g_2$ 属于 $\tilde{\tau}_1$ 的不动点集当且仅当 $g_2=0$, 即 $g_1+\sqrt{-1}g_2\in\mathfrak{g}$. 因此, $(\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\sigma})$ 的对偶是 $(\mathfrak{g},\sigma)$.

(2) 对于任意的 $k\in\mathfrak{k}$, $k\in C(\tilde{\mathfrak{g}})\Longleftrightarrow$ 对于任意的 $k_1\in\mathfrak{k}$ 和任意的 $m_1\in\mathfrak{m}$, $[k,k_1+\sqrt{-1}m_1]=0$, 即 $[k,k_1]+\sqrt{-1}[k,m_1]=0\Longleftrightarrow[k,k_1]=[k,m_1]=0$, $\forall k_1,m_1\Longleftrightarrow[k,k_1+m_1]=0$, $\forall k_1,m_1\Longleftrightarrow k\in C(\mathfrak{g})$. 由此即知, 正交对称李代数 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是有效的当且仅当它的对偶 $(\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\sigma})$ 是有效的.

(3) 首先由定义, $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是 Euclid 型的当且仅当

$$[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]=0\Longleftrightarrow[\sqrt{-1}\mathfrak{m},\sqrt{-1}\mathfrak{m}]=0$$

即 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 的对偶 $(\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\sigma})$ 是 Euclid 型的.

其次, 注意到 $\mathfrak{g}$ 和 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 上的 Killing 形式到 $\mathfrak{g}^C=\tilde{\mathfrak{g}}^C$ 上的复线性扩充是一致的, 记为 B. 所以李代数 $\mathfrak{g}$ 是半单的 $\Longleftrightarrow\mathfrak{g}$ 的 Killing 形式 B 是非退化的 $\Longleftrightarrow$ 对于任意的 $k\in\mathfrak{k}$ 和任意的 $m\in\mathfrak{m}$, 当 $k\neq0$ 时, $B(k,k)\neq0$; 当 $m\neq0$ 时, $B(m,m)\neq0\Longleftrightarrow$ 对于任意的 $k\in\mathfrak{k}$ 和任意的 $m\in\mathfrak{m}$, 当 $k\neq0$ 时, $B(k,k)\neq0$; 当 $m\neq0$ 时, $B(\sqrt{-1}m,\sqrt{-1}m)\neq0\Longleftrightarrow\tilde{\mathfrak{g}}$ 的 Killing 形式 B 是非退化的 $\Longleftrightarrow$ 李代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 是半单的.

由定理 5.3, 正交对称李代数 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 和 $(\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\sigma})$ 的 Killing 形式在 $\mathfrak{k}$ 上的限制都是半负定的. 所以, 作为半单的正交对称李代数, $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是紧致的当且仅当它的 Killing 形式 B 在 $\mathfrak{m}$ 上的限制是负定的, 即 B 在 $\sqrt{-1}\mathfrak{m}$ 上的限制是正定的 (因而是非负定的), 后者等价于 $(\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\sigma})$ 是非紧型的.

25. 设 $\mathfrak{m}'$ 是 $\mathfrak{m}$ 的任意一个非平凡的 $\mathrm{ad}\mathfrak{k}$-不变子空间, $\mathfrak{m}''$ 是 $\mathfrak{m}'$ 在 $\mathfrak{m}$ 中关于 Killing 形式 B 的正交补, 则 $\mathfrak{m}''$ 也是 $\mathrm{ad}\mathfrak{k}$-不变的, 因而有 $[\mathfrak{k},\mathfrak{m}'']\subset\mathfrak{m}''$. 对于任意的 $X\in\mathfrak{m}'$, $Y\in\mathfrak{m}''$, 由于 $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{k}$, 利用 B 关于 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 的不变性 (参看本章习题第 21 题的结论 (2)) 得

$$B([X,Y],[X,Y]) = -B(Y,[X,[X,Y]]) = 0.$$

因为 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是有效的，所以由定理 5.3 的结论 (4)，B 在 $\mathfrak{k}$ 上的限制是负定的，故有 $[X,Y]=0$. 再由 $X\in\mathfrak{m}'$ 和 $Y\in\mathfrak{m}''$ 的任意性，$[\mathfrak{m}',\mathfrak{m}'']=0$. 由此结合 Jacobi 恒等式不难看出，$[\mathfrak{m}',\mathfrak{m}']\oplus\mathfrak{m}'$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想.

1° 如果 $\mathfrak{g}$ 是单李代数，则 $\mathfrak{g}$ 是自己的唯一非平凡理想，因而有

$$\mathfrak{g}=[\mathfrak{m}',\mathfrak{m}']\oplus\mathfrak{m}'.$$

注意到 $[\mathfrak{m}',\mathfrak{m}']\subset\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'\subset\mathfrak{k}$, 并且 $\mathfrak{g}$ 关于 σ 的特征子空间分解是唯一的，故有

$$[\mathfrak{m}',\mathfrak{m}']=\mathfrak{k},\quad \mathfrak{m}'=\mathfrak{m}.$$

由于 $\mathfrak{m}'$ 是 $\mathfrak{m}$ 中的任意一个 $\mathrm{ad}\mathfrak{k}$-不变子空间，$(\mathfrak{g},\sigma)$ 是不可约的.

2° 如果存在 $\mathfrak{g}$ 的紧单理想 $\mathfrak{g}_1$，使得 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\sigma(\mathfrak{g}_1)$; 证明 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 中唯一的一个关于 σ 封闭的理想. 另一方面，$[\mathfrak{m}',\mathfrak{m}']\oplus\mathfrak{m}'$ 显然关于 σ 是封闭的，故有

$$\mathfrak{g}=[\mathfrak{m}',\mathfrak{m}']\oplus\mathfrak{m}'.$$

于是，利用情形 1° 后边的讨论可知，$(\mathfrak{g},\sigma)$ 是不可约的.

26. 设 $\{e_i\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的基底，ω^i 是它的对偶基，则 $\{\sigma(e_i)\}$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的一个基底，相应的对偶基是 $\{\sigma^*\omega^i\}$. 于是由 Killing 形式 B 的定义知，对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}B(\sigma(X),\sigma(Y))=&\operatorname{tr}(\operatorname{ad}(\sigma(X))\circ\operatorname{ad}(\sigma(Y)))=\omega^i([\sigma(X),[\sigma(Y),e_i]])\\=&\omega^i([\sigma(X),\sigma([Y,\sigma(e_i)])])=\omega^i(\sigma([X,[Y,\sigma(e_i)]]))\\=&\sigma^*\omega^i([X,[Y,\sigma(e_i)]])=\operatorname{tr}(\operatorname{ad}(X)\circ\operatorname{ad}(Y))\\=&B(X,Y).\end{aligned}$$

可见，B 是在 σ 作用下是不变的.

记 $\mathfrak{g}_0=[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\oplus\mathfrak{m}$. 因为 $[\mathfrak{k},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{k}$, 所以由 Jacobi 恒等式

$$[\mathfrak{k},\mathfrak{g}_0]\subset[\mathfrak{m},[\mathfrak{m},\mathfrak{k}]]+[\mathfrak{m},[\mathfrak{k},\mathfrak{m}]]+[\mathfrak{k},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{g}_0;$$
$$[\mathfrak{m},\mathfrak{g}_0]\subset[\mathfrak{m},\mathfrak{k}]+[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{g}_0.$$

所以，$\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个理想.

设 $\mathfrak{g}_0$ 在 $\mathfrak{g}$ 中关于 Killing 形式 B 的正交补空间是 $\mathfrak{g}_0^{\perp}$，则有直和分解：$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_0^{\perp}$. 对于任意的 $X\in\mathfrak{g}_0$, $Y\in\mathfrak{g}_0^{\perp}$, 由于 $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，有

$$B([X,Y],Z)=-B(Y,[X,Z])=0,\quad \forall Z\in\mathfrak{g}.$$

因为 $\mathfrak{g}$ 是半单的，所以 B 非退化，故 $[X,Y]=0$. 由 X,Y 的任意性，$[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0^{\perp}]=0$. 此外，对于任意的 $Y_1,Y_2\in\mathfrak{g}_0^{\perp}$,

$$B([Y_1,Y_2],X)=-B(Y_2,[Y_1,X])=0,\quad \forall X\in\mathfrak{g}_0.$$

所以，$[Y_1,Y_2]\in\mathfrak{g}_0^{\perp}$. 因此，$[\mathfrak{g}_0^{\perp},\mathfrak{g}_0^{\perp}]\subset\mathfrak{g}_0^{\perp}$. 于是，$\mathfrak{g}_0^{\perp}$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 利用 B 的非退化性还容易说明 $\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{g}_0^{\perp}=\{0\}$.

最后，对于任意的 $X\in\mathfrak{m}$, $Y\in\mathfrak{g}_0^{\perp}$, 因为

$$\sigma([X,Y])=[\sigma(X),\sigma(Y)]=-[X,Y],$$

所以 $[X,Y]\in\mathfrak{m}$

27. 设 M 所对应的有效正交对称李代数是 $(\mathfrak{g},\sigma)$. 因为 M 是半单的，故由定义 5.4 可知，$(\mathfrak{g},\sigma)$ 是半单的. 再由定理 5.11, $(\mathfrak{g},\sigma)$ 可以分解为如下不可约的正交对称李代数的直和

$$(\mathfrak{g},\sigma)=(\mathfrak{g}_1,\sigma_1)\oplus\cdots\oplus(\mathfrak{g}_r,\sigma_r),$$

其中 $\sigma_i=\sigma|_{\mathfrak{g}_i}$, $i=1,\cdots,r$. 不难看出，对于任意的 i,j, 当 $i\neq j$ 时，$[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j]=0$. 由此可知，每一个 $(\mathfrak{g}_i,\sigma_i)$ 都是有效的. 设 $(\mathfrak{g}_i,\sigma_i)$ 所确定的黎曼对称空间是 M_i, 则 M_i 是不可约的，并且有

$$M=M_1\times\cdots\times M_r.$$

习 题 十

1. 首先引入记号 $(\forall\alpha\in I)$

$$\delta=(\delta_1,\cdots,\delta_r),\quad s^{(\alpha)}=(s_1^{(\alpha)},\cdots,s_r^{(\alpha)}),\quad A^{(\alpha)}\in\mathrm{GL}(r,\mathbb{R})\subset\mathbb{R}^{r^2}.$$

对于每一个 $\alpha\in I$, 定义映射

$$\Phi_\alpha:\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)\to\mathbb{R}^{m+r^2}=\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{r^2}$$

如下:

$$\Phi_\alpha(s^{(\alpha)}(p)\cdot A^{(\alpha)})=(\varphi_\alpha(p),A^{(\alpha)}),$$
$$\forall p\in U_\alpha,\ A^{(\alpha)}\in \mathrm{GL}(r,\mathbb{R}).$$

显然, Φ_α 把 $\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$ 一一地映为 $\mathbb{R}^{m+r^2}$ 中的开集 $\varphi_\alpha(U_\alpha)\times\mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$. 于是, Φ_α 可以看作集合 $\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$ 上的坐标映射.

当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ 时, 有转移函数 $g_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to\mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$. 由定义不难看出 (参看 (2.12) 和 (2.14) 式), 对于任意的 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$

$$s^{(\beta)}(p)=s^{(\alpha)}(p)g_{\alpha\beta}(p).$$

于是对于任意的 $e\in F(p)$, 如果 e 有两个表达式:

$$e=s^{(\alpha)}(p)A^{(\alpha)}=s^{(\beta)}(p)A^{(\beta)},$$

则矩阵 $A^{(\alpha)}$ 和 $A^{(\beta)}$ 满足 $A^{(\beta)}=g_{\beta\alpha}A^{(\alpha)}$. 因此, $A^{(\beta)}$ 的元素都是点 p 和 $A^{(\alpha)}$ 的各元素的光滑函数. 此外, 由于 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 和 (U_β,φ_β) 是 C^∞ 相关的, 如果记

$$x_\alpha=(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^m),\quad x_\beta=(x_\beta^1,\cdots,x_\beta^m),$$

则 $x_\beta=\varphi_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha)$ 是光滑的. 由此可知,

$$\Phi_\beta\circ\Phi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^{r^2}\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^{r^2}$$

是光滑映射, 因而也是光滑同胚.

特别地, 映射 $\Phi_\beta\circ\Phi_\alpha^{-1}$ 是同胚. 这意味着映射

$$\tilde{\psi}_\beta^{-1}\circ\tilde{\psi}_\alpha:(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^{r^2}\to(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^{r^2}$$

是同胚. 因此, 对于每一个 $\alpha\in I$, 把 $U_\alpha\times\mathbb{R}^{r^2}$ 的拓扑通过映射 $\tilde{\psi}_\alpha$ 移植到 $\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$ 上所得到的拓扑都是相容的. 事实上, 当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ 时, 因为 $\tilde{\psi}_\alpha=\tilde{\psi}_\beta\circ(\tilde{\psi}_\beta^{-1}\circ\tilde{\psi}_\alpha)$, 并且 $\tilde{\psi}_\beta^{-1}\circ\tilde{\psi}_\alpha$ 是同胚, 所以在 $\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)=\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)\cap\tilde{\pi}^{-1}(U_\beta)$ 上通过映射 $\tilde{\psi}_\alpha$ 移植的拓扑与通过 $\tilde{\psi}_\beta$ 移植的拓扑是一致的. 于是, 把 $\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)(\alpha\in I)$ 上的拓扑并起来便可在 F 上确定一个拓扑结构. 显然, 在 F 的这个拓扑下, 映射

$$\Phi_\alpha=(\varphi_\alpha\times\mathrm{id})\circ\tilde{\psi}_\alpha^{-1}:\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)\to\varphi_\alpha(U_\alpha)\times\mathbb{R}^{r^2}\subset\mathbb{R}^{m+r^2}$$

是同胚. 所以 $\{(\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha),\Phi_\alpha);\ \alpha\in I\}$ 给出了 P 的一个 C^∞-相关的坐标覆盖, 它在 F 上确定了一个光滑结构, 使得 F 成为 $m+r^2$ 维光滑流形.

另一方面, 在 P 的上述光滑结构下, 映射 $\tilde{\pi}:P\to M$ 在局部坐标邻域 $\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$ 上的表达式是

$$\tilde{\pi}=\varphi_\alpha\circ\Phi_\alpha^{-1}:(x_\alpha,A^{(\alpha)})\mapsto x_\alpha.$$

所以, $\tilde{\pi}$ 是光滑的开映射. 此外,

$$\Phi_\alpha\circ\tilde{\psi}_\alpha(p,A^{(\alpha)})=\Phi_\alpha(s^{(\alpha)}A^{(\alpha)})=(x_\alpha,A^{(\alpha)}),$$

故映射 $\tilde{\psi}_\alpha:U_\alpha\times\mathbb{R}^{r^2}\to\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$ 是光滑同胚.

2. 设 $r=\dim F$. 考虑并集

$$\tilde{B}=\bigcup_{\alpha\in I}\{\alpha\}\times U_\alpha\times F,$$

它是一个 $m+r$ 维光滑流形. 由于 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 满足定理 3.1 中的相容性条件, 可以在 $\tilde{B}$ 中定义等价关系 $\sim$ 如下: 对于任意的 $(\alpha,p,f),(\beta,\tilde{p},\tilde{f})\in\tilde{B}$,

$$(\alpha,p,f)\sim(\beta,\tilde{p},\tilde{f})\iff p=\tilde{p}\in U_\alpha\cap U_\beta,\ \text{并且}\ f=g_{\alpha\beta}(p)\cdot\tilde{f}.$$

用 $B=\tilde{B}/\sim$ 表示 $\tilde{B}$ 关于等价关系 $\sim$ 的商空间, 并把 $(\alpha,p,f)\in\tilde{B}$ 关于 $\sim$ 的等价类记为 $[\alpha,p,f]$. 定义投影 $\pi:B\to M$ 为

$$\pi([\alpha,p,f])=p,\quad\forall[\alpha,p,f]\in B.$$

对于每一个 $\alpha\in I$, 定义映射 $\psi_\alpha:U_\alpha\times F\to\pi^{-1}(U_\alpha)$, 使得

$$\psi_\alpha(p,f)=[\alpha,p,f],\quad\forall(p,f)\in U_\alpha\times F.$$

容易看出，ψ_α 是一一对应，并且 $\pi\circ\psi_\alpha(p,f)=p$. 下面说明：在 B 上有确定的光滑结构使得每一个 ψ_α 都是光滑同胚，并且 π 是光滑映射. 首先，通过 ψ_α 可以把 $U_\alpha\times F$ 上的光滑结构搬到 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上使之成为光滑流形. 对于不同的 α,β，当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ 时，$\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$ 分别作为 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 和 $\pi^{-1}(U_\beta)$ 的开子流形，所对应的光滑结构记为 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2$. 显然，对于任意的 $(p,f),(\tilde p,\tilde f)\in(U_\alpha\cap U_\beta)\times F$,

$$\psi_\beta(\tilde p,\tilde f)=\psi_\alpha(p,f)\Longleftrightarrow \tilde p=p,\ \tilde f=g_{\beta\alpha}(p)f.$$

所以，从 $(\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta),\mathscr{A}_1)$ 到 $(\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta),\mathscr{A}_2)$ 的恒等映射是光滑同胚，因而 $\mathscr{A}_1=\mathscr{A}_2$. 由此不难看出，$B$ 上存在唯一的光滑结构，使得每一个 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 都是它的开子流形，因而 ψ_α 是光滑同胚. 同时，由于 π 在每一个 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上的限制是光滑的，它在 B 的任意一点处都是光滑的. 由此可以直接验证，$\{\psi_\alpha,\ \alpha\in I\}$ 是 B 上的一个局部平凡化结构. 所以，$\pi:B\to M$ 是光滑流形 M 上以 G 为结构群的主丛.

对于任意的 $\alpha,\beta\in I$，当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ 时，

$$\psi_\alpha(p,f)=\psi_\beta(p,\tilde f)\Longleftrightarrow f=g_{\alpha\beta}(p)\cdot\tilde f,$$

其中 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$, $f,\tilde f\in F$. 这意味着

$$\psi_{\alpha,p}^{-1}\circ\psi_{\beta,p}=g_{\alpha\beta}(p).$$

3. 设 $\{(U_\alpha;x_\alpha^i);\alpha\in I\}$ 是光滑流形 M 的一个局部坐标覆盖. TM 和 T^*M 的标架丛 $F(M)$ 和 $F^*(M)$ 都是 M 上的 $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$-主丛，相应的丛投影分别记为 $\pi:F(M)\to M$, $\tilde\pi:F^*(M)\to M$. 对于任意的 $\alpha\in I$, $F(M)$ 和 $F^*(M)$ 在 U_α 上的局部平凡化

$$\psi_\alpha:U_\alpha\times\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})\to\pi^{-1}(U_\alpha),\quad \tilde\psi_\alpha:U_\alpha\times\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})\to\tilde\pi^{-1}(U_\alpha)$$

分别由下面两式定义：

$$\psi_\alpha(p,A)=\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_\alpha^m}\right)\cdot A,\quad \tilde\psi_\alpha(p,B)=B\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_\alpha^1\\ \vdots\\ \mathrm{d}x_\alpha^m\end{pmatrix},$$

$$\forall p\in U_\alpha,\quad A,B\in\mathrm{GL}(m,\mathbb{R}).$$

由此不难得知，对于 $\alpha,\beta\in I$，如果 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$，则 $F(M)$ 和 $F^*(M)$ 在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上的转移函数分别是

$$g_{\alpha\beta}(p)=\psi_{\alpha,p}^{-1}\circ\psi_{\beta,p}=\left(\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}(p)\right);$$
$$\tilde g_{\alpha\beta}(p)=\tilde\psi_{\alpha,p}^{-1}\circ\tilde\psi_{\beta,p}=\left(\frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j}(p)\right),$$
$$\forall p\in U_\alpha\cap U_\beta.$$

显然，$g_{\alpha\beta}$ 和 $\tilde g_{\alpha\beta}$ 分别是切丛 TM 和余切丛 T^*M 的转移函数族.

4. 定义自然投影 $\pi:O(M)\to M$，使得对于任意的 $p\in M$, $\pi(O_p(M))=\{p\}$. 参照本章习题第 1 题的作法，可以确定 $O(M)$ 上的拓扑结构和光滑结构，使之成为 $m(m+1)/2$ 维光滑流形. 取定 M 的一个开覆盖 $\{U_\alpha;\alpha\in I\}$，使得对于任意的 $\alpha\in I$, M 在 U_α 上有单位正交标架场 $\{\delta_i^{(\alpha)}\}$. 记

$$\delta^{(\alpha)}=(\delta_1^{(\alpha)},\cdots,\delta_m^{(\alpha)}),$$

则有映射 $\psi_\alpha:U_\alpha\times\mathrm{O}(m,\mathbb{R})\to\pi^{-1}(U_\alpha)$，它的定义是

$$\psi_\alpha(p,A)=\delta^{(\alpha)}(p)\cdot A,\quad \forall p\in U_\alpha,\ A\in\mathrm{O}(m,\mathbb{R}).$$

不难验证，$\{\psi_\alpha;\alpha\in I\}$ 是 $O(M)$ 的一个局部平凡结构，并且使得 $O(M)$ 成为 M 上一个 $\mathrm{O}(m,\mathbb{R})$-主丛.

5. 在本章习题第 4 题的解答中，取 M 的一个开覆盖 $\{U_\alpha;\alpha\in I\}$，使得对于任意的 $\alpha\in I$, M 在 U_α 上有与其定向相符的标架场 $\{\delta_i^{(\alpha)}\}$. 其余的作法同第 4 题.

6. 取 M 的一个开覆盖 $\{U_\alpha;\alpha\in I\}$，使得对于任意的 $\alpha\in I$, M 在 U_α 上有与其定向相符的单位正交标架场 $\{\delta_i^{(\alpha)}\}$. 然后仿照本章习题第 4 题的作法.

7. 参看参考文献 [3, 第六章，定理 5.1].

8. 群 $\mathbb{Z}_2$ 在 S^n 上有自然的右作用，它显然是自由的，并且 $\mathbb{R}P^n$ 就是 S^n 在这个右作用下的商空间. 下面给出 S^n 的局部平凡化结构.

取 $\mathbb{R}P^n$ 的一个局部坐标覆盖

$$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha; \xi_\alpha^i); 1 \leq \alpha \leq n+1\},$$

其中

$$U_\alpha = \{(x^1, \cdots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1};\ x^\alpha \neq 0\}.$$

定义映射 $\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{Z}_2 \to \pi^{-1}(U_\alpha)$, 使得

$$\psi_\alpha([(x^1, \cdots, x^{n+1})], \pm 1) = \frac{\pm \mathrm{Sgn}\,(x^\alpha)}{\sqrt{\sum_\beta (x^\beta)^2}}(x^1, \cdots, x^{n+1}),$$
$$\forall [(x^1, \cdots, x^{n+1})] \in U_\alpha.$$

如果用局部坐标 ξ_α^i 表示, 则有

$$\psi_\alpha(\xi_\alpha^i, \pm 1) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \sum_i (\xi_\alpha^i)^2}}(\xi_\alpha^1, \cdots, \xi_\alpha^{\alpha-1}, 1, \xi_\alpha^\alpha, \cdots, \xi_\alpha^n),$$
$$\forall (\xi_\alpha^i) \in \varphi_\alpha(U_\alpha).$$

显然, 映射 ψ_α 是从 $U_\alpha \times \mathbb{Z}_2$ 到 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 的光滑同胚. 容易看出, 对于任意的 α, ψ_α 在 $\mathbb{Z}_2$ 的右作用下是等变的. 故由定理 3.3, $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ 成为一个 $\mathbb{Z}_2$-主丛.

9. 设 $\pi : F(M) \to M$ 是 M 的切标架丛.

(必要性) 任意取定 M 的一个定向. 对于任意的 $p \in M$, 令

$$F_p^0(M) = \{e \in \pi^{-1}(p);\ e \text{ 与 } M \text{ 在点 } p \text{ 的定向相符}\},$$
$$F^0(M) = \bigcup_{p \in M} F_p^0(M).$$

则由本章习题第 5 题, $F^0(M)$ 是 M 上的一个 $\mathrm{GL}_0(m, \mathbb{R})$-主丛, 它显然是 $F(M)$ 的一个开子流形. 可以直接验证, 包含映射 $i : F^0(M) \to F(M)$ 是丛同态. 由此容易知道, $F^0(M)$ 是 $F(M)$ 的约化丛, 因而 $F(M)$ 的结构群 $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ 可以约化为 $\mathrm{GL}_0(m, \mathbb{R})$.

(充分性) 设 $F(M)$ 的结构群 $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ 可以约化为 $\mathrm{GL}_0(m, \mathbb{R})$, 则存在 M 上的 $\mathrm{GL}_0(m, \mathbb{R})$ 主丛 $\tilde\pi : P \to M$ 和主丛同态 $\Phi : P \to F(M)$, 使得相应的群同态 $\phi : \mathrm{GL}_0(m, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ 为单同态, 并且诱导映射 $\Phi^b : M \to M$ 是恒同映射. 通过映射 Φ 可以把 P 和 $\Phi(P) \subset F(M)$ 等同起来, 因而不妨假设 $P \subset F(M)$. 设 $\mathscr{A}$ 是 M 的光滑结构, 定义 $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}$, 使得对于任意的 $(U; x^i) \in \mathscr{A}$,

$$(U; x^i) \in \mathscr{A}_1 \Longleftrightarrow \left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^m}\right|_p \right\} \in \tilde\pi^{-1}(p), \quad \forall p \in M.$$

可以验证, $\mathscr{A}_1$ 满足光滑流形可定向定义中的条件. 所以 M 是可定向的.

10. 同上题, 设 $\pi : F(M) \to M$ 是 M 的切标架丛.

(必要性) 在 M 上取定一个黎曼度量. 对于任意的 $p \in M$, 用 $O_p(M)$ 表示 M 在点 p 的所有单位正交标架构成的集合, 并且令

$$O(M) = \bigcup_{p \in M} O_p(M).$$

则由本章习题第 6 题, $O(M)$ 是 M 上的一个 $\mathrm{O}(m, \mathbb{R})$-主丛, 它显然是 $F(M)$ 的一个闭子流形. 可以直接验证, 包含映射 $i : O(M) \to F(M)$ 是丛同态. 由此容易知道, $O(M)$ 是 $F(M)$ 的约化丛, 因而 $F(M)$ 的结构群 $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ 可以约化为 $\mathrm{O}(m, \mathbb{R})$.

(充分性) 设 $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ 可以约化为正交群 $\mathrm{O}(m, \mathbb{R})$, 则存在 M 上的 $\mathrm{O}(m, \mathbb{R})$ 主丛 $\tilde\pi : P \to M$ 和主丛同态 $\Phi : P \to F(M)$, 使得相应的群同态 $\phi : \mathrm{O}(m, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ 为单同态, 并且诱导映射 $\Phi^b : M \to M$ 是恒同映射. 通过映射 Φ 可以把 P 和 $\Phi(P) \subset F(M)$ 等同起来, 因而不妨假设 $P \subset F(M)$. 对于任意的 $p \in M$, 取点 p 的一个充分小开邻域 U 和 P 在 U 上的一个光滑截面 $\sigma : U \to P$. 把 $\sigma(p)$ 作为单位正交基, 可以定义 T_pM 上的一个内积 g_p. 容易验证, g_p 与截面 σ 的取法无关, 并且 g_p 光滑地依赖于点 p. 因此, $\{g_p; p \in M\}$ 是 M 上的一个黎曼度量.

11. 设 $\pi : F(M) \to M$ 是 M 的切标架丛, 取定 M 的一个定向.

(必要性) 在 M 上取定一个黎曼度量. 对于任意的 $p \in M$, 用 $SO_p(M)$ 表示 M 在点 p 的所有与定向相符的单位正交标架构成的集合, 并且令

$$SO(M) = \bigcup_{p \in M} SO_p(M).$$

则由本章习题第 7 题, $SO(M)$ 是 M 上的一个 $\mathrm{SO}(m, \mathbb{R})$-主丛, 它显然是 $F(M)$ 的一个闭子流形. 可以直接验证, 包含映射 $i : SO(M) \to F(M)$ 是

丛同态. 由此容易知道, $SO(M)$ 是 $F(M)$ 的约化丛, 因而 $F(M)$ 的结构群 $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ 可以约化为 $\mathrm{SO}(m,\mathbb{R})$.

(充分性) 和上一题的充分性证明相同.

12. 如果微分纤维丛 (B,M,F,π,G) 是平凡丛, 即 $B=M\times F$. 取 M 的开覆盖 $\{M\}$, 并且令 $\psi=\mathrm{id}_B$, 则 $\{\psi\}$ 是 B 的一个平凡化结构, 相应的转移函数族是 $\{g\equiv \mathrm{id}_F=e\}$, 这里 e 表示结构群 G 的单位元素. 由于 B 的相配主丛 $\tilde{B}$ 和 B 具有相同的转移函数族, $\tilde{B}$ 具有转移函数族 $\{g\}$. 因此, $\tilde{B}$ 可以约化为 $\{e\}$-主丛. 反过来, 如果 $\tilde{B}$ 可以约化为 $\{e\}$-主丛, 则存在 M 的一个开覆盖 $\{U_\alpha;\alpha\in I\}$ 和 $\tilde{B}$ 的平凡化结构

$$\tilde{\psi}_\alpha: U_\alpha\times G\to\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha),\quad \forall\alpha\in I,$$

使得相应的转移函数族 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 在 $\{e\}$ 中取值, 即对于任意的 $\alpha,\beta\in I$, 如果 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$, 则 $g_{\alpha\beta}(p)=e$. 于是, 对于任意的 $p\in M$, 如果 $p\in U_\alpha(\alpha\in I)$, 则 $\tilde{\psi}_\alpha(p,e)$ 与 α 的取法无关. 因此, $\tilde{B}$ 有大范围地定义在 M 上光滑截面 s, 使得对于任意的 $\alpha\in I$,

$$s|_{U_\alpha}(p)=\tilde{\psi}_\alpha(p,e),\quad \forall p\in U_\alpha).$$

于是可以定义 $\tilde{B}$ 的平凡化

$$\tilde{\psi}: M\times G\to\tilde{\pi}^{-1}(M)=\tilde{B},$$

使得 $\tilde{\psi}(p,g)=s(p)\cdot g(\forall p\in M, g\in G)$. 显然, 对应于平凡化结构 $\{\tilde{\psi}\}$ 的转移函数族是 $\{g\equiv e\}$. 由相配丛的定义, $\{g_{\alpha\beta}\}$ 也是微分向量丛 B 的转移函数族. 于是, 纤维丛 B 具有整体的平凡化 $\psi: M\times F\to B$.

此外, 从上面的证明不难看出, 主丛 $\tilde{B}$ 可以约化为 $\{e\}$-主丛当且仅当 $\tilde{B}$ 具有大范围地定义在底流形 M 上的光滑截面.

13. 对于任意的 $p\in\mathbb{R}P^n$, 因为 S^n 在点 p 处的纤维 $\pi^{-1}(p)$ 仅含有两个点, 因而是零维流形, 所以对于每一点 $b\in\pi^{-1}(p)$, S^n 在点 b 的铅垂空间 $V_b=\{0\}$. 因此, 主丛 $\pi: S^n\to\mathbb{R}P^n$ 上的每一个联络在 b 点所对应的水平空间 $H_b=T_bS^n$. 这说明, 一方面, 如果把 S^n 在任意一点的切空间视为水平空间, 就可以得到主丛 $\pi: S^n\to\mathbb{R}P^n$ 上的一个联络 H; 另一方面, 这样得到的联络 H 也是该主丛上的唯一联络.

14. 首先指出, 由于 M 的连通性, M 的基本群的基点可以取在任意一点 (不同点所对应的基本群是相互共轭的). 在此意义下, 基本群 $\pi_1(M)$ 可以光滑地右作用于 $\tilde{M}$. 事实上, 对于任意的 $\tilde{p}\in\tilde{M}$ 和任意的 $[\gamma]\in\pi_1(M)$, 其中 γ 是 M 上以 $p=\pi(\tilde{p})$ 为基点的闭曲线, 以 $\tilde{\gamma}$ 表示 γ 在点 $\tilde{p}$ 处的唯一提升曲线, 其终点记为 $\Psi(\tilde{p},[\gamma])$. 显然, $\Psi(\tilde{p},[\gamma])$ 与代表元 γ 的选取无关. 不难看出, 由 $(\tilde{p},[\gamma])\mapsto\Psi(\tilde{p},[\gamma])$ 确定了 $\pi_1(M)$ 在 $\tilde{M}$ 上的一个光滑的右作用. 由 $\tilde{M}$ 的单连通性可知, $\pi_1(M)$ 在 $\tilde{M}$ 上的这种作用是自由的. 此外, 由覆叠空间的定义, 对于任意的 $p\in M$, 存在点 p 的开邻域 U, 使得 π 在 $\pi^{-1}(U)$ 的每一个连通分支 U_i 上的限制 $\pi|_{U_i}: U_i\to U$ 是光滑同胚. 任意固定一个指标 i_0, 令 $\sigma=(\pi|_{U_{i_0}})^{-1}: U\to U_{i_0}$, 则有 $\pi\circ\sigma=\mathrm{id}_U$. 定义映射

$$\psi: U\times\pi_1(M)\to\pi^{-1}(U),$$

使得

$$\psi(p',[\gamma])=\Psi(\sigma(p'),[\gamma]),\quad \forall(p',[\gamma])\in U\times\pi_1(M).$$

不难验证, ψ 是 $\tilde{M}$ 的一个局部平凡化, 并且满足

$$\Psi(\psi(p',[\gamma_1]),[\gamma_2])=\psi(p',[\gamma_1]*[\gamma_2]),\quad \forall p'\in U,\ [\gamma_1],[\gamma_2]\in\pi_1(M),$$

即局部平凡化 ψ 在 $\pi_1(M)$ 的作用下是等变的. 另外, 容易知道

$$M=\tilde{M}/\pi_1(M).$$

由定理 3.3, $(\tilde{M},M,\pi,\pi_1(M))$ 是 M 上的一个 $\pi_1(M)$-主丛.

对于任意的 $p\in M$, $\pi^{-1}(p)$ 是离散的, 因而是 M 的零维子流形. 所以主丛 $\pi:\tilde{M}\to M$ 上的联络也是唯一的, 它在任意一点 $\tilde{p}\in\tilde{M}$ 的水平空间就是 $\tilde{M}$ 在该点的切空间 $T_{\tilde{p}}\tilde{M}$.

16. (3) 对于任意的 $g\in G$ 和任意的 $v\in T_gG$, v 是水平向量当且仅当

$$\pi^{\mathfrak{k}}(\tilde{\omega}_g(v))=\omega_g(v)=0,$$

它等价于 $\tilde{\omega}_g(v)\in\mathfrak{m}$. 由 Maurer-Cartan 形式的定义知, v 是水平向量当且仅当 $v\in(L_g)_*(\mathfrak{m})$. 所以主丛 $\pi: G\to G/K$ 在 g 点关于联络 H 的水平空间 $H_g=(L_g)_*(\mathfrak{m})$. 当 $X,Y\in\mathfrak{m}$ 时, 它们可以视为 T_eG 中的向量, 也

可以看作 G 上的左不变向量场. 如果把 X,Y 视为 G 上的左不变向量场, 则对于任意的 $g\in G$, $X_g,Y_g\in(L_g)_*(\mathfrak{m})=H_g$, 即 X,Y 在 G 的每一点处的值都是水平向量. 于是有 $\omega(X)=\omega(Y)\equiv 0$. 另一方面, 如果把 $\mathfrak{g}$ 看作是 G 的所有左不变向量场所构成的李代数, 则 Maurer-Cartan 形式在 $\mathfrak{g}$ 上的作用相当于恒同映射. 所以由曲率形式的定义,

$$\begin{aligned}\Omega(X,Y)=&\mathrm{d}\omega(X,Y)=X\omega(Y)-Y\omega(X)-\omega([X,Y])\\=&-\pi^{\mathfrak{k}}(\tilde{\omega}([X,Y]))=-\pi^{\mathfrak{k}}([X,Y]),\end{aligned}$$

其中最后一步是因为 $[X,Y]$ 是 G 上的左不变向量场.

17. 因为 ω 是 G-主丛 $\pi:P\to M$ 上的联络形式, 故由定理 4.3, 对于任意的 $A\in\mathfrak{g}$, 如果 A 在 P 上确定的基本向量场记为 A^*, 则

$$\omega_b(A_b^*)=A,\quad \forall b\in P,$$

$$R_g^*\omega=\mathrm{Ad}(g^{-1})\cdot\omega,\quad \forall g\in G.$$

特别地, 当 $A\in\mathfrak{k}$ 时, 对于任意的 $b\in\tilde{P}$,

$$\tilde{\omega}_b(A_b^*)=\pi^{\mathfrak{k}}(\omega_b(A_b^*))=\pi^{\mathfrak{k}}(A)=A.$$

同时, 由于 $\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{m}$ 都是 $\mathrm{Ad}(K)$-不变的, 对于任意的 $k\in K\subset G$ 有

$$\begin{aligned}R_k^*\tilde{\omega}=&R_k^*(\pi^{\mathfrak{k}}\omega)=\pi^{\mathfrak{k}}(R_k^*\omega)=\pi^{\mathfrak{k}}(\mathrm{Ad}(k^{-1})\cdot\omega)\\=&\mathrm{Ad}(k^{-1})\cdot(\pi^{\mathfrak{k}}\omega)=\mathrm{Ad}(k^{-1})\cdot\tilde{\omega}.\end{aligned}$$

所以, $\tilde{\omega}$ 满足定理 4.3 的条件, 因而是主丛 $\tilde{\pi}:\tilde{P}\to M$ 上的联络形式.

18. 李群 $\mathrm{U}(1)$ 在 S^{2n+1} 上有自然的右作用, 它显然是自由的, 并且 $CP^n=S^{2n+1}/\mathrm{U}(1)$. 取 $\mathbb{C}P^n$ 的一个局部坐标覆盖

$$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha;\xi_\alpha^i);1\le\alpha\le n+1\},$$

其中

$$U_\alpha=\{(z^1,\cdots,z^{n+1})\in\mathbb{C}^{n+1};\ z^\alpha\neq 0\}.$$

定义映射 $\psi_\alpha:U_\alpha\times\mathrm{U}(1)\to\pi^{-1}(U_\alpha)$, 使得

$$\psi_\alpha([(z^1,\cdots,z^{n+1})],\lambda)=\frac{\lambda\cdot|z^\alpha|}{z^\alpha\sqrt{\sum_\beta|z^\beta|^2}}(z^1,\cdots,z^{n+1}),$$

$$\forall[(z^1,\cdots,z^{n+1})]\in U_\alpha,\ \lambda\in\mathrm{U}(1).$$

如果用局部坐标 ξ_α^i 表示, 则有

$$\psi_\alpha(\xi_\alpha^i,\lambda)=\frac{\lambda}{\sqrt{1+\sum_i|\xi_\alpha^i|^2}}(\xi_\alpha^1,\cdots,\xi_\alpha^{\alpha-1},1,\xi_\alpha^\alpha,\cdots,\xi_\alpha^n),$$

$$\forall(\xi_\alpha^i)\in\varphi_\alpha(U_\alpha),\ \lambda\in\mathrm{U}(1).$$

显然, 映射 ψ_α 是从 $U_\alpha\times\mathrm{U}(1)$ 到 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 的光滑同胚. 容易看出, 每个 ψ_α 在 $\mathrm{U}(1)$ 的右作用下是等变的. 故由定理 3.3, $\pi:S^n\to CP^n$ 成为一个 $\mathrm{U}(1)$-主丛.

19. (1) 由于 $\mathfrak{u}(1)=T_e\mathrm{U}(1)$, 只需证明 $T_e\mathrm{U}(1)=\sqrt{-1}\mathbb{R}$. 为此设 $v\in\mathbb{C}$, 则 $v\in T_e\mathrm{U}(1)$ 当且仅当存在 $\mathrm{U}(1)$ 中满足 $\lambda(0)=1$ 的光滑曲线 $\lambda(t)$, 使得 $v=\lambda'(0)$. 由于 $\lambda(t)\overline{\lambda(t)}\equiv 1$,

$$\lambda'(t)\overline{\lambda(t)}+\lambda(t)\overline{\lambda'(t)}=0,\quad \forall t.$$

两边在 $t=0$ 处取值得 $\lambda'(0)+\overline{\lambda'(0)}=0$, 即 $v+\overline{v}=0$, 因而 $v\in\sqrt{-1}\mathbb{R}$. 因为 $T_e\mathrm{U}(1)$ 和 $\sqrt{-1}\mathbb{R}$ 都是实一维向量空间, 所以 $T_e\mathrm{U}(1)=\sqrt{-1}\mathbb{R}$.

(2) 对于任意的 $A=a\sqrt{-1}\in\mathfrak{u}(1)(a\in\mathbb{R})$, A 在 S^3 上所对应的基本向量场记为 A^*, 则 A^* 在任意一点 $z=(z^1,z^2)\in S^3$ 处的值

$$A_z^*=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(z\cdot\exp tA)=(z^1A,z^2A)=Az^1\frac{\partial}{\partial z^1}+Az^2\frac{\partial}{\partial z^2}.$$

于是,

$$\omega_z(A_z^*)=\sqrt{-1}\mathrm{Im}(Az^1\overline{z}^1+Az^2\overline{z}^2)=\sqrt{-1}\mathrm{Im}(A)=a\sqrt{-1}=A.$$

另一方面, 由于 $\mathrm{U}(1)$ 是一个交换群, 对于任意的 $\lambda\in\mathrm{U}(1)$, $\mathrm{Ad}(\lambda^{-1})$ 在 $\mathfrak{u}(1)$ 上的作用是平凡的, 即 $\mathrm{Ad}(\lambda^{-1})=\mathrm{id}_{\mathfrak{u}(1)}$. 因此, 对于任意的 $z=(z^1,z^2)\in S^3$ 和任意的 $X\in T_zS^3$,

$$\begin{aligned}(R_\lambda^*\omega)_z(X)=&(R_\lambda^*\omega_{z\cdot\lambda})(X)=\omega_{z\cdot\lambda}((R_\lambda)_*(X))\\=&\omega_{z\cdot\lambda}(X\cdot\lambda)=\sqrt{-1}((\overline{z}^1\overline{\lambda}\mathrm{d}z^1+\overline{z}^2\overline{\lambda}\mathrm{d}z^2)(X\cdot\lambda))\\=&\sqrt{-1}((\overline{\lambda}\lambda)(\overline{z}^1\mathrm{d}z^1+\overline{z}^2\mathrm{d}z^2)(X))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sqrt{-1}(\bar{z}^1\mathrm{d}z^1+\bar{z}^2\mathrm{d}z^2)(X)=\omega_z(X)\\
&=(\mathrm{Ad}(\lambda^{-1})\cdot\omega)(X),
\end{aligned}
$$

其中利用了等式 $\bar{\lambda}\lambda=1$. 所以

$$R_\lambda^*\omega=\omega=\mathrm{Ad}(\lambda^{-1})\cdot\omega,\quad \forall\lambda\in\mathrm{U}(1).$$

于是，ω 满足定理 3.3 的条件，因而是主丛 $\pi:S^3\to S^2$ 上某一个联络 H 的联络形式.

21. 首先取定向量空间 V 的一个基底 $\delta=\{\delta_1,\cdots,\delta_r\}$, 其中 $r=\dim V$. 由本章习题第 20 题知，对于任意的 $b\in P$, 由 $v\mapsto\phi_b(v)=[(b,v)]$ 给出的映射 $\phi_b:V\to\tilde{\pi}^{-1}(p)$ 是线性同构，这里 $p=\pi(b)$. 定义

$$\Phi(b)=\phi_b(\delta)=\{\phi_b(\delta_1),\cdots,\phi_b(\delta_r)\},\quad \forall b\in P,$$

则 $\Phi(b)$ 是向量丛 $\tilde{\pi}:E\to M$ 在点 $p=\pi(b)$ 的纤维 $\tilde{\pi}^{-1}(p)$ 的基底, 因而有 $\Phi(b)\in\pi_1^{-1}(p)\subset F(E)$. 于是由 $b\mapsto\Phi(b)$ 给出了一个映射 $\Phi:P\to F(E)$. 由于 $\phi_b(v)=[(b,v)]$ 光滑地依赖于 b,v, 因而 $\Phi(b)$ 光滑地依赖于 b, 即 $\Phi:P\to F(E)$ 是光滑映射. 再定义结构群之间的同态 $\phi:G\to\mathrm{GL}(r)$, 使得对于任意的 $g\in G$, $\phi(g)$ 是线性变换 $\rho(g):V\to V$ 在基底 δ 下对应的矩阵，即

$$(\rho(g)\delta_1,\cdots,\rho(g)\delta_r)=(\delta_1,\cdots,\delta_r)\phi(g).$$

不难知道，$\phi:G\to\mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$ 是李群同态，且有

$$\Phi(b\cdot g)=\Phi(b)\phi(g),\quad \forall b\in P,\ \forall g\in G.$$

这就说明，$\Phi:P\to F(E)$ 是主丛同态.

24. 命题的充分性可以直接利用第 23 题的结论 (2) 得到. 设 $\mathfrak{g}$ 是结构群 G 的李代数，ω 和 Ω 分别是联络 H 的联络形式和曲率形式，$r=\dim G$. 下面证明必要性. 取定李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个基底 $\{E_\lambda\}$, 并且令

$$\omega=\sum\omega^\lambda E_\lambda,\quad \Omega=\sum\Omega^\lambda E_\lambda.$$

那么，联络 H 的结构方程化为 (见 (5.12) 式)

$$\mathrm{d}\omega^\lambda=-\frac{1}{2}C^\lambda_{\mu\nu}\omega^\mu\wedge\omega^\nu+\Omega^\lambda.$$

由联络形式的定义，对应于联络 H 的水平子空间分布 $\{H_b;b\in P\}$ 等价于 Pfaff 方程组 $\omega^\lambda=0$, $\lambda=1,\cdots,r$.

如果联络 H 是平坦的，即 $\Omega^\lambda E_\lambda=0$, 则

$$\mathrm{d}\omega^\lambda\equiv 0,\quad \mathrm{mod}\ (\omega^1,\cdots,\omega^r).$$

于是由 Frobenius 定理，Pfaff 方程组 $\omega^\lambda=0(1\leq\lambda\leq r)$ 是完全可积的，即对于任意的 $b\in P$, 水平分布 H 有通过点 b 的积分子流形. 于是，对于任意的 $p\in M$ 和 $b\in\pi^{-1}(p)$, 有点 p 的开邻域 U 和定义在 U 上的水平截面 $s_U:U\to\pi^{-1}(U)$, 使得 $s_U(p)=b$. 定义映射 $U\times G\to\psi:P_U$ 如下：

$$\psi(p',g)=s(p')\cdot g,\quad \forall p'\in U,\ g\in G.$$

利用水平空间在 G 作用下的 G-不变性可以验证, 映射 $\psi:U\times G\to\pi^{-1}(U)$ 是主丛同构，并且把平坦联络 $\tilde{H}$ 映射为 H 在 $P|_U$ 上的诱导联络 H.

25. (1) 显然，李群 $G=\mathrm{SO}(n+1,\mathbb{R})$ 的李代数

$$\mathfrak{g}=\{T\in\mathrm{M}(n+1;\mathbb{R});\ T^t+T=0\};$$

同时，作为 $\mathfrak{g}(n+1)$ 的李子代数，$K=\mathrm{SO}(n)\times\mathrm{SO}(1)$ 的李代数是

$$\mathfrak{k}=\left\{\begin{pmatrix}A&0\\0&0\end{pmatrix}\in\mathfrak{g};\ A^t+A=0\right\}.$$

对于任意的 $g\in K$ 和任意的 $X\in\mathfrak{m}$, 有 $A\in\mathrm{SO}(n)$ 和 $\xi\in\mathbb{R}^n$, 使得

$$g=\begin{pmatrix}A&0\\0&1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}0&\xi^t\\-\xi&0\end{pmatrix}.$$

于是

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(k)(X)&=\begin{pmatrix}A&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\xi^t\\-\xi&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&0\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\\
&=\begin{pmatrix}0&A\xi^t\\\xi&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^t&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&A\xi^t\\-\xi A^t&0\end{pmatrix}\in\mathfrak{m}.
\end{aligned}
$$

所以，$\mathfrak{m}$ 是 $\mathrm{Ad}(K)$-不变的. 此外还容易看出，$\mathfrak{k}\cap\mathfrak{m}=\{0\}$. 故有 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m}$.
(2) 定义映射 $\Phi:G\to SO(S^n)$ 如下：对于任意的 $T\in G=\mathrm{SO}(n+1)$,

用 $e_1, \cdots, e_n$ 和 $x \in S^n$ 分别表示矩阵 T 的前 n 列元素和最后一列元素所对应的单位向量，并且令 $\Phi(T) = \{e_1, \cdots, e_n\}$，则 $\Phi(T)$ 是 S^n 在点 x 处的与其定向相符的单位正交标架，因而 $\Phi(T) \in SO(S^n)$. 容易验证，映射 $\Phi : G \to SO(S^n)$ 是光滑同胚，并且关于

$$K = \mathrm{SO}(n) \times \mathrm{SO}(1) \equiv \mathrm{SO}(n)$$

的右作用是等变的，因而是一个主丛同构. 由 Φ 的定义即知，它的映射映射 $\Phi' : G/K \to S^n$ 就是第九章例 4.2 中的等同映射 φ.

(3) 根据结论 (2)，只需证明：在假设条件下，主丛 $\pi : G \to G/K$ 具有大范围定义的光滑截面即可. 事实上，由第 24 题的证明可知：对于任意的 $x \in G/K$ 和任意的 $g \in \pi^{-1}(x)$，都存在一个定义在点 x 附近且通过 g 点的水平截面. 固定一点 $x_0 \in G/K$ 和 $g_0 \in \pi^{-1}(x_0)$，用 $\sigma_0 : U \to G(x_0 \in U)$ 表示通过点 g_0 的水平截面. 因为 G/K 和 S^n 光滑同胚，它是单连通的. 由此不难推知 σ_0 的定义可以光滑地延拓到整个底流形 G/K 上.

29. σ_1 的两个分量函数是

$$z^1 = \cos\frac{1}{2}\varphi, \quad z^2 = \sin\frac{1}{2}\varphi\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\frac{1}{2}\varphi\sin\theta.$$

所以

$$\mathrm{d}z^1 = -\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\varphi\mathrm{d}\varphi,$$

$$\mathrm{d}z^2 = \left(\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\varphi\cos\theta\mathrm{d}\varphi - \sin\frac{1}{2}\varphi\sin\theta\mathrm{d}\theta\right) - \sqrt{-1}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\varphi\sin\theta\mathrm{d}\varphi + \sin\frac{1}{2}\varphi\cos\theta\mathrm{d}\theta\right).$$

把 z^1, z^2 和 $\mathrm{d}z^1, \mathrm{d}z^2$ 代入 ω 的表达式直接计算即可得到

$$\sigma_1^*\omega = -\frac{1}{2}\sqrt{-1}(1-\cos\varphi)\mathrm{d}\theta.$$

为了计算 $\sigma_1^*\Omega$，首先注意到，作为一维实李代数，$\sqrt{-1}\mathbb{R}$ 的李括号积是平凡的. 所以，$[\omega, \omega] = 0$. 再利用结构方程进行计算便得

$$\sigma_1^*\Omega = \sigma_1^*\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\sigma_1^*\omega = -\frac{1}{2}\sqrt{-1}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta.$$

同样的计算可以得到 $\sigma_2^*\omega$ 和 $\sigma_2^*\Omega$.

30. (12) 下面只证明 $\mathbb{H}P^1$ 和 S^4 的光滑同胚性.

首先，取定 $\mathbb{H}P^1$ 的一个局部坐标覆盖 $\{(U_1, \varphi_1; \xi_1), (U_2, \varphi_2; \xi_2)\}$，其中

$$U_1 = \{[(z^1, z^2)] \in \mathbb{H}P^1;\ z^1 \neq 0\},\quad U_2 = \{[(z^1, z^2)] \in \mathbb{H}P^1;\ z^2 \neq 0\},$$

$\varphi_i : U_i \to \mathbb{H} \equiv \mathbb{R}^4 (i = 1, 2)$ 是同胚，它们的定义是

$$\xi_1 = \varphi_1([(z^1, z^2)]) = z^2(z^1)^{-1}, \quad \xi_2 = \varphi_2([(z^1, z^2)]) = z^1(z^2)^{-1}.$$

于是，在 $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{H}_*$ 上，

$$\xi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\xi_1) = \frac{1}{\xi_1}.$$

另一方面，四维单位球面

$$S^4 = \left\{(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4, \tilde{x}^5) \in \mathbb{R}^5;\ \sum_{i=1}^{5}(\tilde{x}^i)^2 = 1\right\}$$

有四元数坐标覆盖 $\{(\tilde{U}_1, \tilde{\varphi}_1; \tilde{\xi}_1), (\tilde{U}_2, \tilde{\varphi}_2; \tilde{\xi}_2)\}$，其中

$$\tilde{U}_1 = S^4 \backslash \{0, 0, 0, 0, -1\}, \quad \tilde{U}_2 = S^4 \backslash \{0, 0, 0, 0, 1\};$$

$\tilde{\varphi}_i : \tilde{U}_i \to \mathbb{H} \equiv \mathbb{R}^4 (i = 1, 2)$ 是同胚，它们的定义是

$$\tilde{\xi}_1 = \tilde{\varphi}_1(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4, \tilde{x}^5) = \frac{\tilde{x}^1 - \tilde{x}^2 i - \tilde{x}^3 j - \tilde{x}^4 k}{1 + \tilde{x}^5},$$

$$\tilde{\xi}_2 = \tilde{\varphi}_2(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4, \tilde{x}^5) = \frac{\tilde{x}^1 + \tilde{x}^2 i + \tilde{x}^3 j + \tilde{x}^4 k}{1 - \tilde{x}^5}.$$

容易看出，在 $\tilde{\varphi}_1(\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2) = \mathbb{H}_*$ 上有如下的四元数坐标变换

$$\tilde{\xi}_2 = \tilde{\varphi}_2 \circ \tilde{\varphi}_1^{-1}(\tilde{\xi}_1) = \frac{1}{\tilde{\xi}_1}.$$

所以有

$$\tilde{\varphi}_2 \circ \tilde{\varphi}_1^{-1} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{H}_* \to \mathbb{H}_*.$$

从上式可知

$$\tilde{\varphi}_1^{-1} \circ \varphi_1|_{U_1 \cap U_2} = \tilde{\varphi}_2^{-1} \circ \varphi_2|_{U_1 \cap U_2}.$$

所以可以定义映射 $\psi : \mathbb{H}P^1 \to S^4$，使得

$$\psi|_{U_1} = \tilde{\varphi}_1^{-1} \circ \varphi_1, \quad \psi|_{U_2} = \tilde{\varphi}_2^{-1} \circ \varphi_2.$$

显然，ψ 的定义有意义并且是光滑同胚. 因此，可以把 $\mathbb{H}P^1$ 和 S^4 通过 ψ 等同起来.

(13) 将 $\mathbb{H}$ 上的标准坐标系记为 (x^0, x^1, x^2, x^3). 对于 $q = (q^1, q^2) \in S^7 \subset \mathbb{H}^2$，设

$$q^1 = x^0 + x^1\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + x^3\boldsymbol{k},$$

则

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\overline{q}^1 \mathrm{d}q^1) =&(x^0\mathrm{d}x^1 - x^1\mathrm{d}x^0 - x^2\mathrm{d}x^3 + x^3\mathrm{d}x^2)\boldsymbol{i}\\ &+ (x^0\mathrm{d}x^2 - x^2\mathrm{d}x^0 - x^3\mathrm{d}x^1 + x^1\mathrm{d}x^3)\boldsymbol{j}\\ &+ (x^0\mathrm{d}x^3 - x^3\mathrm{d}x^0 - x^1\mathrm{d}x^2 + x^2\mathrm{d}x^1)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

因此，对于任意的 $X \in T_q\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$，当把 $\mathbb{R}^4$ 和 $\mathbb{H}$ 等同起来时，X 具有表达式

$$X = X^0 + X^1\boldsymbol{i} + X^2\boldsymbol{j} + X^3\boldsymbol{k}.$$

在自然标架场

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right\}$$

下，X 的表达式是

$$X = X^0\frac{\partial}{\partial x^0} + X^1\frac{\partial}{\partial x^1} + X^2\frac{\partial}{\partial x^2} + X^3\frac{\partial}{\partial x^3}.$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\overline{q}^1 \mathrm{d}q^1)(X) &= \mathrm{Im}(\overline{q}^1 \mathrm{d}q^1(X))\\ &=(x^0X^1 - x^1X^0 - x^2X^3 + x^3X^2)\boldsymbol{i}\\ &\quad+ (x^0X^2 - x^2X^0 - x^3X^1 + x^1X^3)\boldsymbol{j}\\ &\quad+ (x^0X^3 - x^3X^0 - x^1X^2 + x^2X^1)\boldsymbol{k}\\ &=\mathrm{Im}(\overline{q}^1 \cdot X),\end{aligned}$$

其中最后的 X 视为一个四元数. 同理有

$$\mathrm{Im}(\overline{q}^2\mathrm{d}q^2)(X) = \mathrm{Im}(\overline{q}^2 \cdot X).$$

由结论 (10), $\mathrm{Sp}(1)$ 李代数 $\mathfrak{sp}(1) = \mathrm{Im}(\mathbb{H})$. 对于任意的

$$A = a^1\boldsymbol{i} + a^2\boldsymbol{j} + a^3\boldsymbol{k} \in \mathfrak{sp}(1),$$

A 在 S^7 上所对应的基本向量场记为 A^*，则 A^* 在任意一点 $q = (q^1, q^2) \in S^7$ 处的值

$$A_q^* = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (q \cdot \exp tA) = (q^1A, q^2A),$$

其中 $q^1A \in T_{q^1}\mathbb{H} = \mathbb{H}$, $q^2A \in T_{q^2}\mathbb{H} = \mathbb{H}$. 于是，

$$\begin{aligned}\omega_q(A_q^*) =&\mathrm{Im}(\overline{q}^1\mathrm{d}q^1(q^1A) + \overline{q}^2\mathrm{d}q^2(q^2A))\\ =&\mathrm{Im}(\overline{q}^1 \cdot q^1A + \overline{q}^2 \cdot q^2A) = \mathrm{Im}(A) = A.\end{aligned}$$

另一方面，当 $q = (q^1, q^2) \in S^7 \subset \mathbb{H}^2$ 并且 $\lambda \in \mathrm{Sp}(1)$ 时，由结论 (3) 和恒等式 $\lambda\overline{\lambda} = 1$ 知

$$\overline{q^i\lambda} = \overline{\lambda}\overline{q}^i = \lambda^{-1}\overline{q}^i, \quad i = 1, 2.$$

于是对于任意的 $X = (X_1, X_2) \in T_qS^7 \subset \mathbb{R}^8 = \mathbb{H}^2$，

$$\begin{aligned}(R_\lambda^*\omega)_q(X) &= (R_\lambda^*\omega_{q\cdot\lambda})(X)\\ &= \omega_{q\cdot\lambda}((R_\lambda)_*(X)) = \omega_{q\cdot\lambda}(X\cdot\lambda)\\ &= \mathrm{Im}(\overline{q^1\lambda}\mathrm{d}q^1 + \overline{q^2\lambda}\mathrm{d}q^2)(X_1\cdot\lambda, X_2\cdot\lambda)\\ &= \mathrm{Im}(\lambda^{-1}\cdot\overline{q}^1\cdot X_1\cdot\lambda + \lambda^{-1}\cdot\overline{q}^2\cdot X_2\cdot\lambda)\\ &= \mathrm{Im}(\lambda^{-1}(\overline{q}^1\mathrm{d}q^1 + \overline{q}^2\mathrm{d}q^2)(X)\cdot\lambda)\\ &= \lambda^{-1}\cdot(\mathrm{Im}(\overline{q}^1\mathrm{d}q^1 + \overline{q}^2\mathrm{d}q^2)(X))\cdot\lambda\\ &= \mathrm{Ad}(\lambda^{-1})\omega_q(X).\end{aligned}$$

因此

$$R_\lambda^*\omega = \mathrm{Ad}(\lambda^{-1})\cdot\omega, \quad \forall\lambda \in \mathrm{Sp}(1).$$

所以，ω 满足定理 3.3 的条件，因而它是主丛 $\pi: S^7 \to S^4$ 上的一个联络 H 的联络形式.

(14) 把 $\tilde{s}$ 的定义式代入 ω 的表达式直接计算得

$$\tilde{s}^*\omega = \mathrm{Im}\left(\frac{\overline{\xi}\mathrm{d}\xi}{1 + |\xi|^2}\right).$$

另外，

$$\tilde{s}^*\Omega = \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\xi}\wedge\mathrm{d}\xi}{(1 + |\xi|^2)^2}\right) = \frac{\mathrm{d}\overline{\xi}\wedge\mathrm{d}\xi}{(1 + |\xi|^2)^2}.$$

31. (1) 对于任意的 $\lambda > 0$ 和任意的 $h \in \mathbb{H}$, 定义映射 $\Psi_{\lambda,h}: S^7 \to S^7$ 如下:

$$\Psi_{\lambda,h}(q) = (|\lambda q^1 + hq^2|^2 + |q^2|^2)^{-\frac{1}{2}}(\lambda q^1 + hq^2, q^2),$$
$$\forall q = (q^1, q^2) \in S^7 \subset \mathbb{H}^2.$$

容易看出, $\Psi_{\lambda,h}$ 和 $\Phi_{\lambda,h}$ 都是光滑映射. 可以直接验证: $\Psi_{\lambda,h} = \Phi_{\lambda,h}^{-1}$. 所以, $\Phi_{\lambda,h}$ 是光滑同胚. 此外, 对于任意的 $a \in \mathrm{Sp}(1)$, 由于 $|a|^2 = 1$,

$$\begin{aligned}\Phi_{\lambda,h}(q \cdot a) =& (|q^1 a - hq^2 a|^2 + \lambda^2 |q^2 a|^2)^{-\frac{1}{2}}(q^1 a - h \cdot q^2 a, \lambda \cdot q^2 a)\\ =& (|q^1 - hq^2|^2 + \lambda^2 |q^2|^2)^{-\frac{1}{2}}(q^1 - hq^2, \lambda q^2) \cdot a\\ =& (\Phi_{\lambda,h}(q)) \cdot a, \quad \forall q = (q^1, q^2) \in S^7 \subset \mathbb{H}^2.\end{aligned}$$

所以, $\Phi_{\lambda,h}: S^7 \to S^7$ 是主丛同构.

(2) 由 $\Phi_{\lambda,h}$ 和 $\tilde{s}$ 的定义, 对于任意的 $\xi \in \mathbb{H}$,

$$\begin{aligned}(\Phi_{\lambda,h} \circ \tilde{s})(\xi) =& \Phi_{\lambda,h}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1+|\xi|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)\\ =& (|\xi - h|^2 + \lambda^2)^{-\frac{1}{2}}(\xi - h, \lambda)\\ =& \left(\frac{\xi - h}{\sqrt{|\xi - h|^2 + \lambda^2}}, \frac{\lambda}{\sqrt{|\xi - h|^2 + \lambda^2}}\right).\end{aligned}$$

所以

$$\tilde{s}^* \omega_{\lambda,h} = \tilde{s}^*(\Phi_{\lambda,h}^* \omega) = (\Phi_{\lambda,h} \circ \tilde{s})^* \omega = \mathrm{Im}\left(\frac{(\overline{\xi} - \overline{h})}{|\xi - h|^2 + \lambda^2} d\xi\right).$$

再由结构方程 (5.15), 有

$$\begin{aligned}\tilde{s}^* \Omega_{\lambda,h} =& \tilde{s}^*\left(d\omega_{\lambda,h} + \frac{1}{2}[\omega_{\lambda,h} \wedge \omega_{\lambda,h}]\right) = \mathrm{d}(\tilde{s}^* \omega_{\lambda,h}) + \tilde{s}^* \omega_{\lambda,h} \wedge \tilde{s}^* \omega_{\lambda,h}\\ =& \mathrm{Im}\left(\frac{\lambda^2}{(|\xi - h|^2 + \lambda^2)^2} \mathrm{d}\overline{\xi} \wedge \mathrm{d}\xi\right) = \frac{\lambda^2}{(|\xi - h|^2 + \lambda^2)^2} \mathrm{d}\overline{\xi} \wedge \mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

参 考 文 献

1. 陈省身、陈维桓著, 微分几何讲义 (第二版), 北京: 北京大学出版社, 2001.
2. 陈维桓编著, 微分几何初步, 北京: 北京大学出版社, 1990.
3. 陈维桓编著, 微分流形初步 (第二版), 北京: 高等教育出版社, 2001.
4. 伍鸿熙、陈维桓著, 黎曼几何选讲, 北京: 北京大学出版社, 1993.
5. 伍鸿熙、沈纯理、虞言林著, 黎曼几何初步, 北京: 北京大学出版社, 1989.
6. 白正国、沈一兵等编著, 黎曼几何初步, 北京: 高等教育出版社, 1992.
7. 村上信吾, 齐性流形引论, 上海: 上海科学技术出版社, 1983.
8. 丁同仁、李承志编著, 常微分方程教程, 北京: 高等教育出版社, 1991.
9. 项武义、侯自新、孟道骥著, 李群讲义, 北京: 北京大学出版社, 1992.
10. 孟道骥编著, 复半单李代数引论, 北京: 北京大学出版社, 1998.
11. 严志达著, 实半单李代数, 天津: 南开大学出版社, 1998.
12. 严志达、许以超, Lie 群及其 Lie 代数, 北京: 高等教育出版社, 1985.
13. 尤承业编著, 基础拓扑学讲义, 北京: 北京大学出版社, 1997.
14. W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*(Second Edition), Academic Press, Inc., 1986.
15. J. Cheeger, D. G. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975.
16. S. S. Chern, *Complex Manifolds Without Potential Theory*, New York: Springer-Verlag, 1979.
17. S. S. Chern, A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds, In: Selected Papers, Vol.1, 83~88. New York: Springer-Verlag, 1978.
18. S. S. Chern, Minimal submanifolds in a Riemannian manifold, In: Selected Papers, Vol.4, 399~462, New York: Springer-Verlag, 1989.

19. S. S. Chern, Vector bundle with connection, In: Selected Papers, Vol.4, 245~268, New York: Springer-Verlag, 1989.

20. M. Dajczer, *Submanifolds and Isometric Immersions*, Houston: Publish or Perish, 1990.

21. M. P. doCarmo, *Riemannian Geometry*, Boston: Birkhauser, 1992.

22. Ph. Griffiths, J. Haris, *Principles of Algebraic Geometry*, New York: John Wiley & Sons, 1978.

23. M. Gromov, *Partial Relations*, New York: Springer-Verlag, 1986.

24. S. Helgason, *Differential Geometry, Lie groups, and Symmetric Spaces*, New York: Academic Press, 1978.

25. M. W. Hirsch, *Differential Topology*, GTM33, New York: Springer-Verlag, 1976.

26. D. Husemoller, *Fibre Bundles*, New York: McGraw-Hill, 1966.

27. G. L. Naber, *Topology, Geometry, and Gauge Fields: Foundations*, New York: Springer-Verlag, 1997.

28. G. L. Naber, *Topology, Geometry, and Gauge Fields: Interactions*, New York: Springer-Verlag, 1997.

29. S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 1, Vol. 2, New York: Wiley-Intersciences, 1963, 1969.

30. M. Spivak, *A Comprehensive Introdiction to Differential Geometry*, Vols. 1~5, Berkeley: Publish or Perish, 1979.

31. J. A. Wolf, *Space of Costant Curvature*, Berkeley: Publish or Perish, 1974.

进一步的参考文献

32. T. Aubin, *Nonlinear Analysis on Manifolds, Monge-Ampere Equations*, New York: Springer-Verlag, 1982.

33. M. Berger, *Riemannian Geometry During The Second Half of The 20th Century*, University Lecture Series, vol.17, Providence: Amer. Math. Soc., 2000.

34. M. Berger, B. Gostiaux, *Differential Geometry: Manifolds, Curves, and Surfaces*, New York: Springer-Verlag, 1988.

35. R. Bryant, S. S. Chern, R. B. Gardner, I. L. Goldschmidt and Ph. A. Griffiths, *Exterior Differential Systems*, New York: Springer-Verlag, 1991.

36. I. Chavel, *Riemannian Geometry: A Modern Introduction*, Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

37. M. doCarmo, R. N. Wallach, Minimal immersions of spheres into spheres, In: Ann. of Math., 93(1971), 43~62.

38. S. Gallot, D. Hullin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Berlin: Springer-Verlag, 1990.

39. J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, New York: Springer-Verlag, 1998.

40. W. Klingenberg, *Riemannian Geometry*, Berlin: De Gruyter, 1982.

41. S. Lang, *Differential and Riemannian Manifolds*, GTM 160, Springer-Verlag, 1995.

42. J. M. Lee, *Riemannian Manifolds*, GTM176, New York: Springer-Verlag, 1997.

43. P. Petersen, *Riemannian Geometry*, GTM171, New York: Springer-Verlag, 1998.

44. T. Sakai, *Riemannian Geometry*, TMM149, Providence: Amer. Math. Soc., 1996.

45. P. W. Sharpe, *Differential Geometry*, GTM166, New York: Springer-Verlag, 1997.

46. F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo: Springer-Verlag, 1983.

47. T. J. Willmore, *Riemannian Geometry*, Oxford: Oxford University Press, 1993.

48. 吴光磊，示性式的超渡（(I), (II)），《数学学报》，第 19 卷 (1976), 52~62, 119~125 .

49. W. Zhang, *Lectures on Chern-Weil Theory and Witten Deformations*, Singapore: World Scientific, 2002.

索　引

(以拼音为序)